VIII FƏSİL

MƏKTƏB RİYAZİYYATININ DİLİ.

§1. Ad, məzmun və məna.

Ad (termin) obyekti nitqdə ifadə etmək üçün istifadə olunan dil vasitəsidir. Bu zaman obyekt termini geniş mənada başa düşülməlidir. Obyektlərin adları (terminlər) sadə və mürəkkəb ola bilər. Bölünməyən ad sadə ad adlanır. Məsələn, çevrə, dairə, ədəd və s. sadə adlardır. Əgər ad bir neçə sadə ad vasitəsilə yaranırsa, onda o mürəkkəb ad adlanır. Məsələn, «*ABM* üçbucağı», «*ABCD* kvadratı», «a və b ədədlərinin fərqi» və s. mürəkkəb adlardır. Eyni bir obyektin bir neçə adı ola bilər. Məsələn, «1», «vahid» və «3 və 2 ədədlərinin fərqi» eyni obyektin müxtəlif adlarıdır. Adi dildə eyni sözlə bir neçə obyekti adlandırmaq olar. Məsələn «Çay» sözü müxtəlif obyektlərin adıdır. Riyazi dildə bu mümkün deyil. Riyazi dildə ad birqiymətli olur. Riyazi dildə bir adı onunla eyni məna verən başqa adla əvəz etmək olur. Bu zaman uyğun təklifin həqiqilik qiyməti dəyişmir. Məsələn, «5>3» və «5>6:2» təklifləri eynigüclüdür.

Obyekt öz adının mənasıdır, yəni obyektin dərkedilən məzmunu obyektin mənasıdır. Riyazi dildə ad öz mənası ilə birqiymətli təyin olunur. Fəlsəfi kateqoriya kimi məzmun, obyektin bütün elementlərinin məcmusu, onun xassələrinin əlaqələri, ziddiyyətləri və inkişaf meyllərinin vəhdətidir. Ona görə də riyazi obyektin məzmunu onun bütün elementlərinin məcmusu, onun xassələrinin əlaqələri, ziddiyyətləri və inkişaf meyllərinin vəhdətidir.

§2. Riyazi dil.

Riyazi dil süni dildir. Riyazi dilin inkişafının əsas mərhələləri olaraq aşağıdakıları göstərmək olar:

1. Natural ədədlərin və kəsrlərin işarə edilməsi mərhələsi.

2. Cəbri simvolikanın yaranması mərhələsi.
3. Diferensial və inteqral hesabının simvolikasının yaranması mərhələsi.
4. Müasir riyaziyyatın simvolikasının yaranması mərhələsi.

Semiotika – işarələr və işarələr sistemi haqqında elmdir. Başqa sözlə semiotika işarələrin şəklini, formasını, müxtəlif sistemlərdə işarə birləşmələrinin düzəldilməsi qanunauyğunluqlarını öyrənir. Semiotikada işarələr üç növə ayrılır:

1) işarə-indeks;
2) ikonik-işarə;
3) işarə simvol.

İşarə-indeks aid olduğu obyektlə birbaşa əlaqəsinə əsasən obyekt haqqında təsəvvür yaradır. Riyaziyyatda işarə-indekslərdən istifadə olunmur.

Obyektləri işarə etmək üçün ikonik işarələrdən də istifadə olunur. İkonik işarə, onunla onun işarə etdiyi obyekt arasındakı oxşarlığa əsasən obyekt haqqında təsəvvür yaradır. Məsələn, «sürüşkən yol» qarşıdakı yol hissəsi haqqında sürücüdə təsəvvür yaradır. Riyaziyyatda ikonik işarələrdən istifadə olunur. Məsələn, // (paralellik), $\perp$(perpendikulyarlıq) ikonik işarələrdir.

İşarə-simvol obyektin şərti qəbul olunmuş işarəsidir. Riyaziyyatda obyektlər əsasən işarə-simvollarla işarə olunur.

Simvol-işarələrin seçilməsində müəyyən qaydalara əməl olunur.

İşarələr sistemində bir-birindən fərqlənən aşağıdakı münasibətlər mövcuddur:

1) işarələrin bir-birinə münasibəti;
2) işarələrin onların işarə etdiyi obyektlərə münasibəti;
3)işarələrin konkret obyektə münasibəti.

Bunlara uyğun olaraq semiotika 3 hissəyə ayrılır:

1) sintaktika;
2) semantika;
3) praqmatika.

Riyazi sintaktika riyazi ifadələrin düzəldilməsi qanunauyğunluqlarını öyrənir. Riyazi dilin semantikası formal qurulmuş tekliflər arasındakı münasibətləri və bu münasibətlərin konkret oblastda məntiqi şərhi qanunauyğunluqlarını öyrənir.

Məktəb riyaziyyat kursunda istifadə olunan işarələri aşağıdakı siniflərə ayırmaq olar:

1. Sabitlər;
2. Dəyişənlər;
3. Funksional hərflər;
4. Predikat hərfləri;
5. Durğu işarələri.

Qeyd edək ki, məktəb riyaziyyat kursunda istifadə olunan işarələri riyaziyyatın ayrı-ayrı bölmələrini əsas götürməklə də siniflərə ayırmaq olar.

Çoxluqlar nəzəriyyəsinin işarələri istifadə cəhətdən daha ümumidir.

Çoxluqlar nəzəriyyəsi üçün sabitlər aşağıdakılardır: $N, Z, Q, R, R_T, R^1, C, (a,b), [a,b], [a,b), (a,b], (a,+\infty), (-\infty,a), (-\infty,a]$, Ø – boş çoxluq, u - universal çoxluq, $[a,b,c\} - a,b,c$ elementlərindən ibarət çoxluq, $\{x : P(x)\} - P(x)$ təklifinin doğru olduğu x-lər çoxluğu.

Çoxluğun konkret elementlərinin işarəsi:
Məsələn, natural ədədlər çoxluğunun elementləri (5, 17, 124 və s.); a və b elementlərinin nizamlanmış üçlüyü – (a,b,c) və s. kimi.

Çoxluqlar nəzəriyyəsinin dəyişənləri aşağıdakılardır:

1) İstənilən çoxluğun işarəsi. Məsələn, $A \cap B, A \cup B$ və s.
2) Verilən çoxluğun ixtiyari elementinin işarəsi. Məsələn, «A və B çoxluqlarının hər birinə daxil olan elementi» əvəzinə $a \in A \cap B$ kimi.
3) Çoxluqlar nəzəriyyəsində funksional hərflər aşağıdakılardır:
    - Konkret çoxluqların işarələri;

- Bul əməllərinin işarələri: $\cap$ (kəsişmə), $\cup$(birləşmə), \ (fərq), – (tamamlama); (birinci üç əməliyyat binar, sonuncu isə inar əməliyyatdır); çoxluqların dekart hasilinin işarəsi - X və Π ; X çoxluğunun Y çoxluğuna inikasının işarəsi – $f : A \to B$.

Çoxluqlar nəzəriyyəsinin peredikat hərfləri aşağıdakılardır:
= (bərabərlik); $\subset$ (çoxluğun alt çoxluğu), $\in$ (elementin çoxluğa daxil olması), $\neq, \not\subset, \not\subset, \notin$ (yuxarıdakıların inkarı).

Çoxluqlar nəzəriyyəsində çoxluqları və eyni zamanda burada aparılan mülahizələri ayırmaq üçün durğu işarələri kimi mötərizə və nöqtədən istifadə edilir.

§3. Məktəb cəbr kursunun əlifbası.

Məktəb cəbr kursunda sözlərlə ifadə olunan cümlələrlə yanaşı bir sıra xüsusi işarələrdən də istifadə edilir. Məktəb cəbr kursunda ədədlər üzərində əməllərə və onlar arasında münasibətlərə baxılır. Ədədləri işarə etmək üçün

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

rəqəmlərindən, ədədin kəsr hissəsini tam hissəsindən ayırmaq üçün vergüldən, mənfi ədədi işarə etmək üçün «–» (minus işarəsindən istifadə edilir. Göstərilənlərdən istifadə edərək bütün rasional ədədlər yazılır.

Ədədi dəyişənlər kimi latın əlifbasının sətir hərflərindən $(a, b, c, ..., x, y, z, ...,)$ və bu hərflərdən indekslə x_1, a_1, b_2 və s. istifadə edilir.

Cəbr kursunda funksional hərfləri $+, -, \cdot, :$ və s. işarələri təşkil edir. Məktəb cəbr kursunda predikat hərflər kimi $=, <, >$ işarələrindən durğu işarələri kimi « . » (nöqtə), « , » (verqül) və s. işarələrindən istifadə olunur. Birləşmələr nəzəriyyəsində $A_n^m, C_n^m, P_n(n!)$ və işarələrindən istifadə olunur.

§4. Məktəb həndəsə kursunun əlifbası.

Həndəsə kursunda cəbr kursunun əlifbasından istifadə edilir. Eyni zamanda həndəsənin özünə məxsus aşağıdakı işarələrdən də istifadə edilir: $A, B, C, ..., X, Y, Z$ - sabit və dəyişən nöqtələr; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}$ - sabit və dəyişən vektorlar. Koordinatorları x və y olan A nöqtəsi $A(x, y)$ kimi işarə edilir.

$|\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$ - vektorun uzunluğu,

$(\vec{a}, \vec{b})$ - iki vektorun skalyar hasili,

$\angle A$ (və ya $\hat{A}$) – təpəsi A nöqtəsində olan bucaq,

$(AB) - A$ və B nöqtələrindən keçən düz xətt,

$[AB)$ - başlanğıcı A nöqtəsində olan və B nöqtəsindən keçən şüa,

$\cup AB$ - ucları A və B nöqtələri olan qövs,

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) - \vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq,

f^{-1} - tərs çevirmə (tərs inikas),

$f(x) - f$ çevirməsində x nöqtəsinin obrazı,

H_0^k - mərkəzi O və əmsalı K olan homotetiya,

«//» - paralellik,

«$\perp$» - perpendikulyarlıq.

§5. Riyazi analizin başlanğıcının əlifbası.

Burada yuxarıda göstərilənlərdən başqa aşağıdakılardan da istifadə edilir: f, F, φ və s. Latın əlifbasının hərflərilə funksiyanı işarə edirlər: f^{-1}- tərs funksiya, $\sin, \cos, tg, ctg, \arcsin, \arccos, arctg, arcctg, \exp, \lg, lu, \log$ - və s. müxtəlif funksiyaların adlarıdır; $|x|, [x], \{x\}, \sqrt{x}$ - arqument aşkar şəkildə daxil olan funksiyalardır; $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f$ funksiyasının a nöqtəsində limiti; $f'(a) - f$ funksiyasının a nöqtəsində törəməsi; $\int\limits_a^b f(x)dx - f$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında inteqralı; $f(a-0), f(a+0) - x \to a$ olduqda uyğun olaraq f funksiyasının sol və sağ limitləri; $\Delta x, \Delta y$ - uyğun olaraq arqumentin və funksiyanın artımı; $\max\limits_{[a,b]} f$ və $\min\limits_{[a,b]} f - f$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətləri.

Məktəb riyaziyyat kursunun təsvir vasitələri müntəzəm olaraq dəyişir və təkmilləşir.

§6. Riyazi məntiqin elementləri.

Doğru və yaxud yalan olması haqqında fikir söyləmək mümkün olan hər bir cümlə təklif adlanır. Aşağıdakılar təklifə misal ola bilər:

1. Bakı – Azərbaycanın paytaxtıdır.
2. 221 ədədi – sadədir.
3. 13<17.

1 və 3-cü təkliflər doğrudur; 2-i təklif isə yalandır, çünki $221 = 13 \cdot 17$. Hər bir təklif ya doğru, ya da yalandır. Təklif eyni zamanda həm doğru və həm də yalan ola bilməz.

Təklif sözlərdən və simvollardan düzəlir. Sözlərdən və yaxud simvollardan düzəldilmiş (hətta mənası olan) hər bir cümlə təklif deyil. Məsələn,

1. Bakı Dövlət Universitetinə qəbul olmaq asandır və
2. $x > 0$

təklif deyil; çünki onların doğru və ya yalan olması barədə heç bir qəti fikir söyləmək olmur. Riyazi məntiqdə belə hökmlər öyrənilmir.

Təklifləri adətən böyük latın hərfləri ilə işarə edirlər: $A, B, C,,...$ və s. Məsələn, $A \equiv \{6 < 7\}$, $B \equiv \{6 -$ sadə ədəddir$\}$. A və B sadə təkliflərdir. «və», «və ya», «əgər…, onda…», «onda və yalnız onda, nə vaxt ki…» sözləri və söz birləşmələri məntiqi bağlayıcı adlanır. Məntiqi bağlayıcılardan istifadə etməklə sadə təkliflərdən yeni mürəkkəb təkliflər almaq olur. Məsələn yuxarıdakı A və B sadə mülahizələrindən məntiqi bağlayıcılar vasitəsilə aşağıdakı mürəkkəb təklifləri almaq olar:

$C \equiv \{6 < 7$ və ya 6 – sadə ədədlər$\}$,

$D \equiv \{6 < 7$ və ya 6 – sadə ədədlər$\}$,

$E \equiv \{6 < 7$ onda və yalnız onda olur ki, 6 sadə ədəd olsun$\}$,

$F \equiv \{$əgər $6 < 7$ isə, onda 6 – sadə ədəddir$\}$.

Sadə təkliflərin doğru və ya yalan olmasından istifadə edərək onlardan düzəldilmiş təkliflərin doğru və yalan olmasını təyin etmək olar.

A təklifinin doğru olmadığını göstərən təklifə A-nın inkarı deyilir və $\rceil A$ və ya $\overline{A}$ kimi işarə edilir. Məsələn, $A \equiv \{6 < 7\}$ təklifi üçün $\rceil A \equiv \overline{A} \equiv \{6 \geq 7\}$ təklifidir.

A və B təkliflərindən «və» bağlayıcısının köməyilə düzəldilən mürəkkəb təklifə A və B təkliflərinin konyunksiyası deyilir və $A \Lambda B$ kimi işarə edilir.

A və B təkliflərindən «və ya» bağlayıcısının köməyi ilə düzəldilən mürəkkəb təklif A və B təkliflərinin dizyunksiyası adlanır və $A \vee B$ kimi işarə edilir.

A və B təkliflərindən «əgər A isə, onda B-dir» kimi düzəldilmiş mürəkkəb təklifə A və B-nin implikasiyası deyilir və $A \Rightarrow B$ kimi işarə olunur, burada A-ya şərt, B-yə isə nəticə deyilir.

A və B təkliflərindən «A onda və yalnız onda olur ki, B olsun» kimi düzəldilən təklifə A və B-nin «eyni güclülüyü» deyilir və $A \Leftrightarrow B$ kimi işarə edilir.

Aşağıdakı cədvəllərdə A və B təkliflərinin doğru və ya yalan olmasından asılı olaraq onların konyuksiyası, dizyunksiyası, implikasiyası və eynigüclülüyü təkliflərinin doğru və ya yalan olması cədvəlləri verilib.

Cədvəl 1.

***D* – doğru; *Y* – yalan.**

A	B	$A \wedge B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Cədvəl 2.

A	B	$A \vee B$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Cədvəl 3.

A	B	$A \Rightarrow B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Cədvəl 4.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

A təklifinin inkarı üçün aşağıdakı cədvəl doğrudur:

Cədvəl 5.

A	$\overline{A}$
D	Y
Y	D

Misal 1. Tutaq ki, $A \equiv \{2=3\}$ və $B \equiv \{2<3\}$ təklifləri verilib. Bu təkliflərin dizyunksiyasını ($A \wedge B$), konyunksiyasını ($A \vee B$), implikasiyasını ($A \Rightarrow B$), eynigüclülüyünü ($A \Leftrightarrow B$) təyin edək.

$A \vee B \equiv \{2=3$ və ya $2<3\}$ təklifi doğrudur;

$A \wedge B \equiv \{2=3$ və $2<3\}$ təklifi yalandır;

$A \Rightarrow B \equiv$ {əgər 2=3-sə, onda $2<3\}$ təklifi doğrudur.

$A \Leftrightarrow B \equiv$ {«2=3» onda və yalnız onda olur ki, «$2<3$» olsun} təklifi yalandır.

Eynilik kimi doğru olan təkliflərə həmişə doğru deyilir və I simvolu ilə işarə edilir. Məsələn,

$$A \vee \overline{A} \equiv I,\ A \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \equiv I,\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \equiv I\,.$$

Eynilik kimi yalan olan təklifə həmişə yalan deyilir və L simvolu ilə işarə edilir, məsələn,

$$A \Lambda A \equiv L,\ \ (B \Lambda A) \Lambda \overline{A} = L,\ \ A \Lambda L = L\,.$$

Aşağıdakı eyniliklərin doğru olduğunu asanlıqla göstərmək olar:

1. $A \vee B \equiv B \vee A.$ 2. $A \Lambda B \equiv B \Lambda A.$ 3. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.

4. $A \Lambda (B \Lambda C) \equiv (A \Lambda B) \Lambda C$. 5. $A \Lambda (B \vee C) \equiv (A \Lambda B) \vee (A \Lambda C)$.

6. $(A \vee B) \Lambda (A \vee C) \equiv A \vee (B \Lambda C).$ 7. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \Lambda \overline{B}$. 8. $\overline{A \Lambda B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

9. $\overline{\overline{A}} \equiv A,\ A \vee A \equiv A,\ A \Lambda A \equiv A$.

10. $A \vee \overline{A} \equiv I,\ A \Lambda \overline{A} = L,\ \ A \vee I = I,\ \ A \Lambda I = A,\ A \vee L \equiv A,\ \ A \Lambda L \equiv L.$

§7. Dəyişəndən asılı təkliflər.

Riyaziyyatda dəyişənin hər bir konkret qiymətində təklifə çevrilən dəyişəndən asılı təkliflər də öyrənilir. Məsələn, «5 ədədi n ədədinin bölənidir» təklifi, natural ədədlər çoxluğundan olan n dəyişənindən asılıdır. Əgər $n = 5k,\ k \in N$ isə onda bu təklif doğru, əks halda isə yalandır.

Tənlik və bərabərsizliklər də bu tipli təkliflərdəndir. Məsələn, $x-2>0$ bərabərsizliyinə x dəyişənindən asılı təklif kimi baxmaq olar. x dəyişəninə 2-dən böyük hər hansı qiyməti versək bu təklif doğru olacaq; x dəyişəninə 2-dən böyük olmayan hər hansı bir qiyməti versək, onda bu təklif yalan olacaq. $x+y=7$ tənliyinə iki x və y dəyişənlərindən asılı təklif kimi baxmaq olar. x=3 və y=4 isə bu təklif doğrudur. x=2 və y=3 olanda bu təklif yalandır.

Dəyişəndən asılı təkliflər adətən $A(x), B(x)$ $C(x,y)$ və s. kimi işarə edilir. Bu zaman x, y kəmiyyətlərinin dəyişmə çoxluğunu göstərmək lazımdır: $A(x),\ x\in M$. $A(x),\ x\in M$ yazılışına əsasən onun doğru və ya yalan olduğunu demək olmaz. Yalnız x-in qeyd olunmuş konkret x_0 qiymətində $A(x),\ x\in M$ təklifdir. $A(x)$ təklifinin verildiyi M çoxluğunu iki M_1 və M_2 alt çoxluqlarına bölmək olar: M_1 altçoxluğuna daxil olan istənilən x üçün $A(x)$ təklifi doğrudur; M_2 alt çoxluğuna daxil olan istənilən x üçün isə $A(x)$ təklifi yalandır. Məsələn,

$$A(x)\equiv\{x^2-5x+6<0\},\ x\in R,$$

təklifi üçün $M_1=(2,3)$ və $M_2=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$.

Eyni bir M çoxluğunda verilmiş $A(x)$ və $B(x)$ təkliflərinin doğru olduğu çoxluqlar eyni olarsa, onda bu təkliflər M çoxluğunda eynigüclü təkliflər adlanır. Məsələn, $A(x)\equiv\{x^2-5x+6<0\},\ x\in R$,

$B(x)\equiv\{x^4-5x^3+6x^2<0\},\ x\in R$ təklifləri eynigüclü təkliflərdir, çünki bu təkliflərin hər ikisi yalnız $x\in(2,3)$ olduqda doğru olur.

Misal. Fərz edək ki, $A(x) \equiv \{x-2>0\}$ və $B(x) \equiv \{x+2 \geq 0\}$, $x \in M$ təklifləri verilib:

$a)$ $A(x) \vee B(x)$, $b)$ $A(x) \Lambda B(x)$, $c)$ $A(x) \Rightarrow B(x)$,

$d)$ $B(x) \Rightarrow A(x)$, $e)$ $A(x) \Lambda \overline{B}(x)$, $f)$ $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$

təkliflərini təyin edək:

$a)$ $A(x) \vee B(x)$: $x-2>0$ və $x+2 \geq 0$ bərabərsizliklərinin heç olmazsa birinin doğru olduğu halda doğrudur, yəni $x \in [-2,+\infty)$ olduqda $A(x) \vee B(x)$ təklifi doğru təklifdir, $x \in (-\infty,-2)$ olanda $A(x) \vee B(x)$ təklifi yalan təklifdir.

$b)$ $A(x) \Lambda B(x)$ təklifi yalnız $x-2>0$ və $x+2 \geq 0$ bərabərsizliklərinin hər ikisi doğru olduqda doğru olur, yəni $x \in (-2,+\infty)$ olanda $A(x) \Lambda B(x)$ təklifi doğru təklifdir, əks halda, yəni $x \overline{\in} (2,+\infty)$ olanda $A(x) \Lambda B(x)$ təklifi yalan təklifdir.

$c)$ $A(x) \Rightarrow B(x)$ implikasiyası x-in bütün qiymətlərində doğru təklifdir.

$d)$ $B(x) \Rightarrow A(x)$ implikasiyası $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ qiymətlərində doğru təklifdir. Hər bir $x \in$[-2,2] bu təklif üçün yalan təklifdir.

$e)$ $A(x) \Lambda \overline{B}(x)$ konyuksiyasının doğru olduğu nöqtələr çoxluğu $\begin{cases} x-2>0, \\ x+2<0 \end{cases}$ bərabərsizliklər sisteminin həllər çoxluğudur. Bu sistemin həllər çoxluğu boş çoxluq olduğu üçün $A(x) \Lambda \overline{B}(x)$ konyuksiyasının doğru olduğu çoxluq boşdur.

$f)$ $B(x) \Rightarrow A(x)$ implikasiyası (əgər $x+2<0$ isə, onda $x-2 \leq 0$) bütün x-lər üçün doğru təklifdir.

IX FƏSİL

MƏKTƏB RİYAZİYYATINDA BİRLƏŞMƏLƏR VƏ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ ELEMENTLƏRİ.

§1. Birləşmə anlayışı.

Tərif. Hər hansı predmetlərdən düzəldilmiş və bir-birindən ya bu predmetlərin sırası və yaxud da müxtəlifliyi ilə fərqlənən müxtəlif qruplara ümumiyyətlə birləşmə deyilir.

Məsələn, fərz edək ki, **10** ədəd **0,1,2,3,…,9** rəqəmlərindən istifadə edərək, hər birində bir neçə rəqəm olmaqla belə qruplar düzəldək: **235,532,7146,94,53761,106** və s. Onda biz verilmiş rəqəmlərdən düzəldilmiş müxtəlif birləşmələr alırıq. Düzəldilmiş birləşmələri nəzərdən keçirdikdə görürük ki, onlardan bəziləri, məsələn, 235 və 532, bir-birindən yalnız rəqəmlərin sırası ilə fərqlənirlər, bəziləri isə, məsələn, 235 və 7146, onlara daxil olan rəqəmlərin müxtəlifliyi ilə (hətta rəqəmlərin sayı ilə) bir-birindən fərqlənirlər.

Birləşmələrin düzəldilməsində istifadə edilən predmetlər birləşmələrin elementləri adlandırılır. Elementlər ümumi şəkildə $a, b, c, \ldots$, kimi işarə edilir.

Birləşmələrin üç növü vardır: aranjemanlar, permutasyonlar və kombinezonlar. Eyni zamanda, təkrarsız və təkrarlı olmalarından asılı olaraq onların hər biri yenidən iki növə bölünürlər: təkrarsız aranjemanlar və təkrarlı aranjemanlar, təkrarsız permutasyonlar və təkrarlı permutasyonlar, təkrarsız kombinezonlar və təkrarlı kombinezonlar. Qeyd edək ki, təkrarsız birləşmələrdə hər bir element baxılan hər bir birləşmədə bir dəfə iştirak edə bilər. Lakin təkrarlı birləşmələrdə belə şərt yoxdur.

Biz yuxarıda adları çəkilən birləşmə növlərinin hər birini nəzərdən keçirəcəyik.

Əvvəlcə təkrarsız birləşmələri öyrənək və şərtləşək ki, biz bu zaman «təkrarsız» sözünü işlətməyəcəyik.

§2. Aranjemanlar.

Fərz edək ki, bizə üç müxtəlif a,b,c elementləri verilib və biz onlardan istifadə edərək müxtəlif birləşmələr düzəltmək istəyirik. Həmin elementlərdən istifadə edərək aşağıdakı kimi birləşmələr düzəltmək olar:

bir-bir: $a, b, c,$

iki-iki: $ab, ac, ba, bc, ca, cb;$

üç-üç: $abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

Burada, göründüyü kimi bir-bir düzəldilmiş birləşmələr müxtəlifdir; iki-iki düzəldilmiş birləşmələrin bəziləri elementlərinin sırası ilə fərqlənirlər, məsələn, ab və ba, bəziləri isə elementlərinin müxtəlifliyi ilə fərqlənirlər, məsələn, ab və ac; üç-üç düzəldilmiş birləşmələr isə yalnız elementlərin sırası ilə bir-birindən fərqlənirlər.

Burada yalnız bir şeyə diqqət yetirmək lazımdır ki, hər bir halda birləşmələrdə olan elementlərin sayı bərabərdir. Bu qayda ilə düzəldilmiş birləşmələri aranjemanlar adlandırırlar.

Tərif. Verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilən və bir-birindən ya elementlərinin sırası və yaxud da müxtəlifliyi ilə fərqlənən birləşmələrə m elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilən aranjemanlar deyilir.

Tərifdən aydın olur ki, m və n natural ədədlər olmaqla, həm də onların arasında $n \le m$ şərti ödənməlidir. Bu, yuxarıda baxdığımız misaldan da aydın görünür. Yəni verilmiş m sayda elementlərdən istifadə edərək bir-bir, iki-iki, üç-üç və nəhayət hər birində m sayda element olmaqla aranjemanlar düzəltmək mümkündür.

Verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilə bilən bütün mümkün olan aranjemanların ümumi sayı A_m^n -kimi işarə edilir, burada A hərfi fransız dilində olan «aranjement» sözünün ilk hərfidir.

m elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilə bilən bütün aranjemanların sayının, yəni A_m^n-in tapılması (m və n-in istənilən qiymətlərində) əvvəlcə onların bilavasitə düzəldilib, sonra sayılması yolu ilə çox çətin olardı. Ona görə də bu sayı asanlıqla müyyən etmək üçün hər hansı bir düsturun tapılması çox səmərəli ola bilər. Bunun üçün yuxarıda baxdığımız misala yenidən qayıdaq. Verilmiş üç elementdən (a,b,c, bu halda $m=3$ olur) hər birində bir element olmaqla $(n=1)$ düzəldilən aranjemanların ümumi sayı 3-ə bərabərdir, yəni $A_3^1=3$. Həmin üç elementdən iki-iki aranjemanlar düzəltmək üçün artıq düzəldilmiş və hər birində bir element olan həmin aranjemanların hər birinə orada iştirak etməyən elementləri növbə ilə birləşdirməklə ala bilərik. Məsələn, birinci aranjemana, yəni a-ya b və c-ni növbə ilə birləşdirərək ab,ac aranjemanlarını alırıq. Beləliklə, üç elementdən iki-iki düzəldilmiş bütün aranjemanların sayı $A_3^2=A_3^1\cdot 2=3\cdot 2=6$ olar.

Verilmiş üç elementdən üç-üç aranjemanları düzəltmək üçün artıq iki-iki götürməklə düzəldilmiş aranjemanların hər birinə, orada iştirak etməyən elementi birləşdirmək kifayətdir. Məsələn, ab-yə c-ni birləşdirməklə abc-ni, ac-yə b-ni birləşdirməklə acb-ni və s. almaq olar. Beləliklə, verilmiş üç elementdən hər birində üç element olmaqla düzəldilə bilən bütün aranjemanların ümumi sayı:

$$A_3^3=A_3^2\cdot 1=3\cdot 2\cdot 1=6 \quad \text{olacaqdır.}$$

İndi fərz edək ki, verilmiş elementlərin sayı m-ə bərabərdir və onlardan hər dəfə n sayda element götürməklə aranjemanlar düzəltmək istəyirik. Bu halda həmin aranjemanların ümumi sayını, yəni A_m^n-ni necə hesablamaq olar, başqa sözlə bunun üçün bir düstur tapmaq olarmı? Bu suala cavab vermək üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. Verilmiş m sayda elementdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilə bilən bütün mümkün olan aranjemanların ümumi sayı aşağıdakı düsturla hesablana bilər:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-2)]\cdot[m-(n-1)] \quad (1)$$

İsbatı. Fərz edək ki, bizə m sayda

$$a, b, c, d, \ldots, k, l$$

elementləri verilmişdir. Əvvəlcə bu elementləri bir-bir götürməklə aranjemanlar düzəldək. Onda aydındır ki, həmin aranjemanların sayı elə verilmiş elementlərin sayına, yəni m-ə bərabər olar. Onda $A_m^1 = m$ olar.

İndi iki-iki götürməklə verilmiş m sayda elementlərdən bütün mümkün olan aranjemanları düzəldək. Bunun üçün verilmiş elementlərin hər birini götürüb, ona növbə ilə yerdə qalan $(m-1)$ sayda elementləri birləşdirmək kifayətdir. Göstərilən qayda ilə aşağıdakı cədvəli düzəldə bilərik:

$$\begin{cases} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots,\ ak,\ al & (m-1\ aranjeman) \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots,\ bk,\ bl & (m-1\ aranjeman) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ ka,\ kb,\ kc,\ \ldots,\ kl,\ kl & (m-1\ aranjeman) \\ la,\ lb,\ lc,\ \ldots,\ li,\ lk & (m-1\ aranjeman) \end{cases}$$

Bu cədvəldəki sətirlərin sayı verilmiş elementlərin sayına, yəni m-ə bərabərdir. Həmin düzbucaqlı cədvəldəki aranjemanların ümumi sayını tapmaq üçün oradakı sətirlərin sayını hər sətirdəki aranjemanların sayına vurmaq lazımdır. Onda tapırıq:

$$A_m^2 = A_m^1 \cdot (m-1) = m(m-1) \quad \text{yəni} \quad A_m^2 = m(m-1). \quad (2)$$

Verilmiş m sayda elementlərdən üç-üç götürməklə bütün mümkün olan aranjemanları düzəltmək üçün, artıq iki-iki götürməklə düzəldilmiş aranjemanların hər birini ayrılıqla götürüb, onlara yerdə qalan $(m-2)$ sayda elementlərin hamasını növbə ilə birləşdirmək lazımdır. Onda aşağıdakı cədvəli alarıq:

$$\begin{cases} abc,\ abd,\ \ldots,\ abk,\ abl & (m-2\ aranjeman) \\ acb,\ acd,\ \ldots,\ ack,\ acl & (m-2\ aranjeman) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ lka,\ lkb,\ \ldots,\ lkj,\ bkl & (m-2\ aranjeman) \end{cases}$$

Bu düzbucaqlı cədvəldəki bütün aranjemanların ümumi sayını belə tapmaq olar:

$$A_m^3 = A_m^2 \cdot (m-2) = m(m-1)(m-2),$$

yəni

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2). \qquad (3)$$

İndi (1) düsturunun doğruluğunu isbat etmək üçün riyazi induksiya üsulundan istifadə edək.

Biz artıq yuxarıda gördük ki, $n=1, n=2$ və $n=3$ qiymətlərində (1) düsturu doğrudur. $n-1$ üçün (1) düsturunun doğruluğunu fərz edərək, həmin düsturun n üçün də doğru olduğunu isbat edək.

Beləliklə, fərz edək ki,

$$A_m^{n-1} = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-3)]\cdot[m-(n-2)]. \qquad (4)$$

İndi isbat edək ki, (1) düsturu doğrudur. (4) düsturunun doğruluğunu fərz edərək, biz qəbul etmiş oluruq ki, verilmiş m sayda elementlərdən hər dəfə $(n-1)$ sayda element götürməklə bütün mümkün olan aranjemanların hamısını düzəltmişik və onların ümumi sayı (4) düsturu ilə təyin edilir.

Verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə bütün mümkün olan aranjemanları düzəltmək üçün, artıq düzəldilmiş hesab etdiyimiz və hər birində $(n-1)$ sayda element olan aranjemanların hər birinə yerdə qalan $[m-(n-1)]$ sayda elementlərin hər birini növbə ilə birləşdirmək lazımdır. Bu halda hər sətirdə $[m-(n-1)]$ sayda və hər birində n element iştirak edən aranjemanlar olan, A_m^{n-1}-sayda sətirlərdən ibarət olan bir düzbucaqlı cədvəl almış olarıq. Həmin cədvəldəki bütün aranjemanların ümumi sayını tapmaq üçün sətirlərin sayını hər sətirdəki aranjemanların sayına vurmaq lazımdır. Onda alarıq:

$$A_m^n = A_m^{n-1} \cdot [m-(n-1)] = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot[m-(n-2)]\cdot[m-(n-1)].$$

Beləliklə, isbat etmək istədiyimiz düsturu alırıq:

$$\boldsymbol{A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-2)]\cdot[m-(n-1)]}. \quad (1)$$

Bu düsturu sözlərlə belə ifadə edə bilərik: verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilən bütün mümkün olan aranjemanların ümumi sayı, ən böyüyü $\boldsymbol{m}$ olan, n sayda ardıcıl gələn tam ədədlərin hasilinə bərabərdir.

(1) düsturunu başqa şəkildə də ifadə etmək olar. Bunun üçün (1) düsturunun sağ tərəfini

$$\boldsymbol{(m-n)[m-(n+1)]\cdots3\cdot2\cdot1}$$

hasilinə vuraq və bölək:

$$A_m^n = \frac{m-(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-2)]\cdot[m-(n-1)](m-n)[m-(n+1)]\cdots3\cdot2\cdot1}{(m-n)\cdot[m-(n+1)]\cdots3\cdot2\cdot1}$$

və ya

$$\boldsymbol{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}}. \quad (5)$$

Misal. Hər biri üç müxtəlif qiymətli rəqəmlə ifadə olunan neçə üçrəqəmli tam ədəd düzəltmək olar?

Həlli. Bilirik ki, cəmi 9 sayda qiymətli rəqəm vardır: 1,2, 3,4,5,6,7,8,9. Bu rəqəmlərdən üç-üç götürməklə düzəldilən birləşmələr bir-birindən ya elementlərinin sırası, yaxud da müxtəlifliyi ilə fərqlənəcəklər. Deməli, həmin birləşmələr aranjemanlar olacaqdır. Bu halda $\boldsymbol{m=9, n=3}$ olduğunu nəzərə alaraq (1) düsturundan istifadə etməklə, tapırıq:

$$\boldsymbol{A_9^3 = 9\cdot8\cdot7 = 504}.$$

Deməli, 9 qiymətli rəqəmdən cəmi 504 sayda müxtəlif üçrəqəmli tam ədəd düzəltmək olar.

§3. Permutasyonlar.

Əgər verilmiş m sayda elementlərdən hər dəfə m sayda element götürməklə (yəni verilmiş elementlərin hamısını) aranjemanlar düzəldilərsə (aydındır ki, bu halda onlar bir-birindən yalnız elementlərin sırası ilə fərqlənəcəklər), onda belə aranjemanları permutasyonlar adlandırırlar.

Məsələn, iki a və b elementlərindən düzəldilmiş permutasyonlar, həmin elementlərdən iki-iki düzəldilmiş aranjemanlardır ki, bunlar da ab və ba-dır. Üç a,b və c elementlərindən düzəldilmiş permutasyonlar, həmin elementlərdən üç-üç götürməklə düzəldilən aranjemanlardır ki, bunlar da $abc, acb, bac, bca, cab, cba$-dır və s.

Verilmiş m sayda elementlərdən düzəldilə bilən bütün mümkün olan permutasyonların ümumi sayı P_m ilə işarə edilir ki, burada P-fransız dilində olan «permutasyon» sözünün ilk hərfidir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi m sayda elementlərdən düzəldilən permutasyonlar m elementdən hər birində m element olmaqla düzəldilən aranjemanlar olduğundan, permutasyonların sayı düsturunu belə yaza bilərik:

$$P_m = A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(m-3)]\cdot$$
$$\cdot[m-(m-2)]\cdot[m-(m-1)] = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 =$$
$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-2)(m-1)m = m!,$$

yəni

$$P_m = m!. \qquad (6)$$

Beləliklə, verilmiş m sayda elementlərdən düzəldilə bilən bütün mümkün olan permutasyonların ümumi sayı 1-dən m-ə qədər olan natural ədədlərin hasilinə, yəni $m!$-a bərabərdir.

Misal. Üzərində 6 dəst yemək əşyaları qoyulmuş masanın arxasında 6 nəfəri neçə üsulla əyləşdirmək mümkündür?

Həlli. Hər dəfə 6 nəfərin hamısı masanın arxasında oturduğundan axtarılan üsulların sayı hər birində 6 element olmaqla düzəldilən permutasyonların sayına bərabərdir:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Deməli, 6 nəfəri həmin yemək masasının arxasında 720 üsulla əyləşdirmək olar.

§4. Kombinezonlar.

Əgər verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilən aranjemanlardan bir-birindən heç olmazsa bir elementləri ilə fərqlənənləri götürsək, belə aranjemanları kombinezonlar adlandırmaq qəbul edilmişdər.

Məsələn, verilmiş a, b, c, d kimi dörd elementdən üç-üç götürməklə düzəldilə bilən kombinezonlar bunlardır:

$$abc, \; abd, \; acd, \; bcd.$$

Əgər bu kombinezonların hər birində iştirak edən elementlər arasında bütün mümkün yerdəyişmələri etsək, dörd elementdən üç-üç götürməklə düzəldilən bütün mümkün olan aranjemanları alarıq:

$$\begin{array}{cccc}
abc & abd & acd & bcd \\
acb & adb & adc & bdc \\
bac & bad & cad & cbd \\
bca & bda & cda & cdb \\
cab & dab & dac & dbc \\
cba & dba & dca & dcb \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{6 \cdot 4 = 24}
\end{array}$$

Bu cədvəldə sütunlar üzrə yazılanlar üç elementdən düzəldilmiş permutasyonlar, sətirlər üzrə yazılanlar isə dörd elementdən üç-üç götürməklə düzəldilmiş kombinezonlardır. Deməli, onda belə yaza bilərik:

$$P_3 \cdot C_4^3 = A_4^3, \tag{7}$$

burada C-fransız dilində olan «kombinaison» sözünün ilk hərfidir.

Əgər veriliş elementlərin sayını m ilə və götürülən elementlərin sayını isə n ilə işarə etsək, onda (7) münasibətini ümumiləşdirərək belə yaza bilərik.

$$P_n \cdot C_m^n = A_m^n . \tag{8}$$

Deməli, verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element olmaqla düzəldilə bilən bütün aranjemanların sayı n elementdən düzəldilən permutasyonların sayı ilə m elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilə bilən kombinezonların sayı hasilinə bərabərdir, burada C_m^n-lə verilmiş m elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilə bilən bütün kombinezonların sayı işarə edilmişdir.

(8) düsturundan tapırıq:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} . \tag{9}$$

və ya

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} . \tag{9'}$$

Məsələn, $m=4, n=3$ olarsa, tapırıq: $C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4;$ $C_4^3 = 4$.

Kombinezonların sayını ifadə edən ($9^/$) düsturunu başqa şəkildə ifadə etmək olar. Bunun üçün ($9^/$) düsturunun sağ tərəfindəki kəsrin surətini və məxrəcini $1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n)$ hasilinə vuraq:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]\cdot(m-n)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n)} = \frac{m!}{n!(m-n)!} .$$

Deməli,

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} . \tag{10}$$

İndi ($9'$) və (10) düsturlarının ciddi riyazi isbatını verək. Bunun üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. Verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element olmaqla düzəldilən bütün mümkün olan kombinezonların ümumi sayı (9′) və ya (10) düsturu ilə hesablana bilər, burada $0 \le n \le m$.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün riyazi induksiya üsulundan istifadə edəcəyik.

Verilmiş m sayda elementlər olaraq natural sıranın birinci m sayda elementlərini götürək: $1, 2, 3, \cdots, m$.

Əvvəlcə $n = 1$ götürək. Bu o deməkdir ki, verilmiş m sayda elementləri bir-bir götürməklə kombinezonlar düzəltmək lazımdır. Bu halda həmin kombinezonlar elə verilmiş elementlərin özləri, yəni $1, 2, 3, \ldots, m$ olacaqdır ki, onların sayı m-ə bərabərdir. Deməli, $C_m^1 = m$ olur. Əgər (10) düsturunda $n = 1$ hesab etsək, onda

$$C_m^1 = \frac{m!}{1!(m-1)!} = m$$

olar. Bu onu göstərir ki, $n = 1$ olduqda teorem doğrudur.

İndi $n = 2$ götürək. Bu halda verilmiş m sayda elementlərdən iki-iki götürməklə düzəldilən və sayı C_m^2 olan bütün kombinezonlar aşağıdakı cədvəldə yazılanlardan ibarət olacaqdır:

$$\begin{array}{c} 12, 13, 14, \ldots, 1m, \\ 23, 24, \ldots, 2m, \\ 34, \ldots, 3m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m-1, m\,. \end{array}$$

C_m^2 ədədini isə biz bilavasitə hesablaya bilərik. Əgər verilmiş m sayda elementlərin hər birinə növbə ilə yerdə qalan elementləri birləşdirsək, onda alınmış cütləri aşağıdakı cədvəl şəklində yazmaq olar:

$$12, 13, 14, \ldots, 1m,$$

$$21, 23, 24, \ldots, 2m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m-1\,1, m-1\,2 \ldots m-1\,m,$$

$$m\,1, m\,2, \ldots, m\,m-1.$$

Bu cədvəldə hər bir cüt iki dəfə yazılmışdır, belə ki, məsələn, 1 elementini götürüb, ona 2 elementini birləşdirməklə 12 cütünü alırıq, həmçinin 2 elementini götürüb, ona 1 elementini birləşdirməklə 21 cütünü alırıq. Cədvəldəki bütün sətirlərin sayı m-ə, sütunların sayı $(m-1)$-ə, bütün cütlərin sayı isə $m(m-1)$-ə bərabərdir. Onda cədvəldəki müxtəlif cütlərin sayı isə $\frac{m(m-1)}{2}$-yə bərabər olacaqdır. Beləliklə,

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$$

olur.

Əgər (10) düsturunda $n = 2$ yazmış olsaq, onda alarıq:

$$C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Deməli, $n = 2$ olduqda da teorem doğrudur.

İndi fərz edək ki, m sayda $1, 2, \ldots, m$ elementlərindən hər birində $(n-1)$ sayda (hansı ki, $n \le m$) element olan bütün mümkün kombinezonlar düzəldilmişdir və onların sayı üçün

$$C_m^{n-1} = \frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!} \tag{11}$$

düsturu doğrudur.

Əgər bu kombinezonların hər birinə, ona daxil olmayan $(m-n+1)$ sayda elementlərin hər birini (bir-bir olmaqla) ardıcıl olaraq birləşdirsək, onda hər birində n sayda element olan bütün mümkün olan kombinezonlar düzəldilmiş olacaqdır və eləcə də bu axırıncı kombinezonların hər biri n

dəfə iştirak edəcəkdir. Doğrudan da verilmiş çoxluğun elementlərindən n sayda element iştirak edən ixtiyari bir kombinezona baxaq. Ümumiliyi pozmadan belə bir kombinezona baxaq:

$$12\cdots n-1\ n$$

Hər birində n sayda element iştirak edən kombinezonların düzəldilməsinin yuxarıda təsvir edilən qaydasına əsasən baxdığımız bu kombinezon aşağıdakı n sayda üsullarla alınacaqdır:

$23\cdots n-1\ n$ kombinezonuna 1 birləşdirilir,

$13\cdots n-1\, n$ kombinezonuna 2 birləşdirilir,

$124\cdots n-1\, n$ kombinezonuna 3 birləşdirilir,

....

$12\cdots n-1$ kombinezonuna n birləşdirilir.

Beləliklə, hər birində $(n-1)$ element olan C_m^{n-1} sayda kombinezonların hər biri $(m-n+1)$ sayda yeni kombinezonlar əmələ gətirir: bütövlükdə, hər birində n element olan $(m-n+1)\cdot C_m^{n-1}$ sayda kombinezonlar yaranmış olacaqdır və hər bir yeni kombinezon bura n dəfə daxil olacaqdır, deməli,

$$C_m^n = \frac{m-n+1}{n} C_m^{n-1}$$

olur.

Əgər (11) düsturunu burada nəzərə alsaq, onda taparıq:

$$C_m^n = \frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Beləliklə, $n=1$ və $n=2$ qiymətlərində doğru olduğunu bilavasitə gördüyümüz (10) düsturu, $1 \le n \le m$ şərtini ödəyən istənilən n üçün də doğrudur və burada m istənilən natural ədəddir. Onu da qeyd edək ki, xüsusi halda, əgər $n=m$ olarsa, onda düzəldilən kombinezonların sayı $C_m^m = 1$ olar. Doğrudan da əgər verilmiş m sayda elementlərdən m sayda element (yəni elementlərin hamısını) götürsək, onda aydındır ki, yeganə bir kombinezon düzəldə bilərik. Bu nəticəni (10) düsturundan da ala bilərik:

$$C_m^m = \frac{m!}{m!(m-m)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \quad (0! = 1$$

olduğunu nəzərə aldıq). Bununla teoremin isbatı başa çatdı.

Misallar.

1. n bucaqlının diaqonallarının sayını tapın.

Həlli. Çoxbucaqlının təpə nöqtələri müstəvinin n sayda nöqtələrindən təşkil olunmuş bir çoxluqdur ki, onlardan heç bir üçü bir düz xətt üzərində yerləşməyir.

Məlumdur ki, çoxbucaqlının diaqonalı, onun qonşu olmayan hər hansı iki təpə nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasıdır. Deməli, burada söhbət verilmiş n elementdən iki-iki götürməklə düzəldilən kombinezonlardan gedə bilər.

Beləliklə, verilmiş n bucaqlının bütün təpə nöqtələrini cüt-cüt, bütün mümkün üsullarla birləşdirsək, onda

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

sayda düz xətt parçaları alarıq ki, onlardan n saydası çoxbucaqlının tərəfləridir. Onda diaqonalların sayı:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

qədərdir.

2. Bir vəzifəyə 10 nəfər nümayəndələrin arasından 3 nəfər namizəd seçilməlidir. Burada neçə müxtəlif üsul ola bilər?

Həlli. Məsələnin mahiyyətindən aydın olur ki, axtarılan üsulların sayı ancaq kombinezonlarla tapıla bilər. Burada verilmiş elementlərin sayı $m = 10$, götürülən elementlərin sayı isə $n = 3$ olduğundan yaza bilərik.

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120\,.$$

Deməli, 10 nəfər nümayəndələrin arasından 3 nəfər namizədi 120 üsulla seçmək olar.

Kombinezonların bir mühüm xassəsini qeyd edək. (10) düsturunun sağ tərəfini permutasyonlarla ifadə etsək, alarıq:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}} . \tag{12}$$

Əgər (12) düsturunda n-i $(m-n)$-lə əvəz etsək, alarıq:

$$C_m^{m-n} = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_{m-(m-n)}} = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_n} = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}} = C_m^n .$$

Beləliklə, çox mühüm olan bir düsturu tapırıq:

$$C_m^n = C_m^{m-n} . \tag{13}$$

(13) düsturunun vacibliyi orasındadır ki, $n > \frac{1}{2}m$ olduqda bu düsturu tətbiq etməklə kombinezonların sayının hesablanması çox sadələşir. Məsələn, tutaq ki, $m = 100$ və $n = 98$ olduqda C_{100}^{98}-i hesablamaq lazımdır. Bu halda əgər (9′) düsturundan istifadə edərək onu hesablamaq istəsək çox böyük hesablamalar aparmalı olarıq. Lakin (13) düsturunu tətbiq edərək bunu çox səmərəli şəkildə hesablayırıq:

$$C_{100}^{98} = C_{100}^{100-98} = C_{100}^{2} = \frac{100 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 4950 .$$

Biz yuxarıda göstərdik ki, $C_m^m = 1$. Bunu nəzərə alaraq və (13) düsturundan istifadə edərək yaza bilərik:

$$1 = C_m^m = C_m^{m-m} = C_m^0 .$$

Deməli,

$$C_m^0 = 1 .$$

Qeyd edək ki, bu nəticəni həmçinin (10) düsturundan istifadə etməklə də almaq olar:

$$C_m^0 = \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{1 \cdot m!} = 1 .$$

§5. Təkrarlı aranjemanlar.

Tərif. Verilmiş m sayda

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \qquad (1)$$

elementlərindən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilmiş hər bir sonlu n hədli ardıcıllığa, verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element olmaqla düzəldilmiş təkrarlı aranjeman deyilir. İki təkrarlı

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n} \text{ və } a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, \ldots, a_{j_n}$$

aranjemanları yalnız o zaman eyni sayılırlar ki, onlardan hər birində bütün eyni yerdə duran elementlər eyni olsunlar:

$$a_{i_1} = a_{j_1}, a_{i_2} = a_{j_2}, a_{i_3} = a_{j_3}, \ldots, a_{i_n} = a_{j_n}.$$

Təkrarlı aranjemanlarda (hər bir ardıcıllıqda olduğu kimi) eyni bir element bir neçə müxtəlif yerdə yerləşə bilər. Əgər təkrarlı $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots . a_{i_n}$ aranjemanında hər hansı bir element p sayda müxtəlif yerdə yerləşirsə, onda deyirlər ki, həmin element aranjemanda p dəfə təkrar olunur.

Misal. Verilmiş **3** sayda **1,2,3** elemnetlərindən iki-iki götürməklə düzəldilə bilən təkrarlı aranjemanlar aşağıdakılardan ibarətdir:

11, 12, 13,

21, 22, 23,

31, 32, 33.

Verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilə bilən bütün mümkün olan təkrarlı aranjemanların sayını tapmağa imkan verən aşağıdakı teoremi nəzərdən keçirək.

Teorem. Verilmiş m sayda elementlərdən hər birində n sayda element iştirak etməklə düzəldilən bütün mümkün olan təkrarlı aranjemanların sayı m^n-ə bərabərdir.

Təkrarsız aranjemanlardan fərqləndirmək məqsədilə təkrarlı aranjemanların sayını işarə etmək üçün $\overline{A}$ hərfindən istifadə edəcəyik. Onda teoremin hökmünə əsasən yaza bilərik:

$$\overline{A}_m^n = m^n. \qquad (2)$$

İsbatı.Ümumiliyi pozmadan verilmiş m sayda (1) elementləri olaraq natural sıranın birinci m sayda elementlərini götürək. n-ə ardıcıl olaraq $n = 1,2,3,\dots,m$ qiymətlərini verərək, müxtəlif təkrarlı aranjemanlar düzəldək və onların sayını tapmağa çalışaq.

Əgər $n = 1$ olarsa, onda m sayda müxtəlif

$$1,2,3,\dots,m$$

aranjemanlarını alarıq və $\overline{A}_m^1 = m$ olar.

Əgər bir-bir düzəldilmiş bu aranjemanların hər birinə verilmiş m sayda ədədlərin hər birini növbə ilə birləşdirsək, onda m elementdən hər birində iki element olmaqla düzəldilmiş təkrarlı aranjemanları alarıq:

$$\begin{cases} 11, \quad 12, \quad 13, \quad \dots, \quad 1m \quad (m - \text{aranjeman}), \\ 21, \quad 22, \quad 23, \quad \dots, \quad 2m \quad (m - \text{"------"}), \\ 31, \quad 32, \quad 33, \quad \dots, \quad 3m \quad (m - \text{"------"}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m1, m2, m3, \dots, mm \qquad (m - \text{"------"}). \end{cases}$$

Bu cədvəldəki bütün təkrarlı aranjemanların ümumi sayını belə taparıq: $\overline{A}_m^2 = \overline{A}_m^1 \cdot m = m \cdot m = m^2$. Deməli, $\overline{A}_m^2 = m^2$.

Əgər yuxarıdakı iki-iki düzəldilmiş aranjemanların hər birinə növbə ilə verilmiş m sayda elementlərin hər birini birləşdirsək, onda m elementdən hər birində üç element olmaqla düzəldilmiş təkrarlı aranjemanları almış olarıq. Həmin arajemanların ümumi sayını belə tapa bilərik: $\overline{A}_m^3 = \overline{A}_m^2 \cdot m = m^2 \cdot m = m^3$, yəni $\overline{A}_m^3 = m^3$.

İndi fərz edək ki, verilmiş m sayda elementlərdən hər birində $(n-1)$ sayda element iştirak etməklə düzəldilə bilən bütün mümkün olan təkrarlı aranjemanları düzəltmişik və onların ümumi sayı isə belə hesablanır:

$$\overline{A}_m^{n-1} = m^{n-1}.$$
Verilmiş m elementdən hər birində n sayda element olmaqla təkrarlı aranjemanları düzəltmək üçün $1,2,3,\ldots,m$ ədədlərindən düzəldilmiş və $(n-1)$ sayda elementi olan aranjemanlardan (ardıcıllıqlardan) hər hansı birini, məsələn,
$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1} \tag{3}$$
aranjemanını götürək və n-ci yerdə $1,2,3,\ldots,m$ ədədlərinin hər birini növbə ilə yazaq. Onda hər birində n sayda element olan m sayda təkrarlı aranjemanları alarıq. Əgər bu işi hər birində $(n-1)$ sayda element olan bütün aranjemanlar üçün təkrar etmiş olsaq, onda hər birində n sayda element olan bütün təkrarlı aranjemanları almış olarıq. Bu cür aranjemanların ümumi sayı belə olar:
$$\overline{A}_m^n = \overline{A}_m^{n-1} \cdot m = m^{n-1} \cdot m = m^n.$$
Beləliklə, isbat etmək itədiyimiz düsturu alırıq:
$$\overline{A}_m^n = m^n.$$
Asanlıqla inanmaq olar ki, düzəldilmiş n tərtibli aranjemanlar bir-birindən fərqlidir. Doğrudan da, onlar bir-birindən ya $(n-1)$ hədli (3) ardıcıllıqları ilə və yaxud da axırıncı (n-ci) elementləri ilə fərqlənəcəklər. Beləliklə, riyazi induksiya üsulu ilə isbat edilmiş bu təklif istənilən natural n ədədi üçün doğrudur. Bununla da teoremin isbatı başa çatır.

Misal. Hər biri p nüsxədən ibarət olan n sayda müxtəlif kitablar vardır. Verilmiş kitablar içərisindən neçə üsulla kitablar seçmək olar?

Həlli. Verilmiş n sayda kitabları müəyyən qaydada nömrələyək. Əgər birinci kitab k_1 nüsxədə, ikinci kitab k_2 nüsxədə və s. n-ci kitab k_n nüsxədə götürülərsə, onda bu seçimə
$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$
təkrarlı aranjemanı uyğun gəlir. Bu da $(p+1)$ sayda olan $0,1,2,\ldots,p$ elementlərindən hər dəfə n sayda element

götürməklə təkrarlı aranjemanların düzəldilməsi deməkdir (əgər $k_i = 0$ olarsa, bu o deməkdir ki, i-ci kitabdan tamamilə götürülməyib). Beləliklə,verilmiş $(p+1)$ sayda elementlərdən hər dəfə n sayda element götürməklə düzəldilən təkrarlı aranjemanların sayına uyğun olan $(p+1)^n$ sayda müxtəlif birləşmələr alınır. Onların içərisindən $0,0,\ldots,0$ birləşməsini (yəni heç bir kitabın götürülmədiyini ifadə edən) kənar etsək, onda kitabların seçilməsinin $((p+1)^n - 1)$ sayda müxtəlif üsulunu alarıq.

§6. Təkrarlı permutasyonlar.

Təkrarlı permutasyonlar təkrarlı aranjemanların elə xüsusi halıdır ki, burada hər bir elementin təkrarlanma sayı göstərilmiş olur.

Fərz edək ki, sonlu sayda elementləri olan $M = \{a, b, \ldots, c\}$ çoxluğu verilmişdir.

Tərif. a elementi n_1 dəfə, b elementi n_2 dəfə və nəhayət c elementi n_k dəfə təkrarlanan ($n_1, n_2, \ldots, n_k$ mənfi olmayan tam ədədlərdir) olduqda M çoxluğunun elementlərindən düzəldilmiş təkrarlı permutasyonlar elə təkrarlı aranjemanlara deyilir ki, onların hər biri göstərilən çoxluğun bütün elementlərindən düzəldilmişdir və hər bir element uyğun olaraq göstərilən ədəd sayda təkrar olunur. Bu halda $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ ədədi permutasyonun tərtibi adlanır.

Misal. a, b və c elementlərindən hər birinin təkrarlanma sayı olaraq $2,2$ və 1 olan bütün mümkün təkrarlı permutasyonları yazmalı. Həmin permutasyonlar aşağıdakılardır.

$$aabbc,\quad aabcb,\quad aacbb,\quad ababc,\quad abacb,$$

$$abbac,\quad abbca,\quad abcab,\quad abcba,\quad acabb,$$

$$acbab,\quad acbba,\quad baacb,\quad baacb,\quad babac,$$

$$babca,\quad bacab,\quad bacba,\quad bbaac,\quad bbaca,$$

$$bbcaa,\quad bcaab,\quad bcaba,\quad bcbaa,\quad caabb,$$

$$cabab,\quad cabba,\quad cbaab,\quad cbabc,\quad cbbaa.$$

Teorem. $\{a, b, \ldots, c\}$ çoxluğunun elementlərindən ($a - n_1$ dəfə, $b - n_2$ dəfə, nəhayət $c - n_k$ dəfə təkrarlanan olduqda) düzəldilən bütün təkrarlı müxtəlif permutasyonların ümumi sayı aşağıdakı düsturla hesablana bilər:

$$\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}. \tag{4}$$

İsbatı. Düzəldilən hər bir permutasyondakı elementlərin sayı $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$-ya bərabərdir. Ona görə də, əgər bütün elementlər müxtəlif olsaydı, onda düzəldilmiş permutasyonlar təkrarsız permutasyonlar olardı və onların sayı $n!$ olardı. Lakin burada düzəldilən permutasyonların bəziləri eyni olduğundan onların sayı az olacaqdır. Doğrudan da bir permutasyonu nəzərdən keçirək:

$$\underbrace{a\, a \cdots a}_{n_1} \quad \underbrace{b\, b \cdots b}_{n_2} \cdots \underbrace{c\, c \cdots c}_{n_k}, \tag{5}$$

burada şərti olaraq belə desək, əvvəlcə bütün birinci növ elementlər yazılmış, sonra bütün ikinci növ elementlər yazılmış və s., nəhayət bütün k-cı növ elementlər yrzılmışdır. Birinci növ elementlərin arasında $n_1!$ üsulla yerdəyişmə etsək bu heç nəyi dəyişməz, çünki həmin elementlərin hamısı eynidir. İkinci növ elementlərin arasında $n_2!$ sayda yerdəyişmə aparsaq o, da heç nəyi dəyişməz və s., nəhayət k-cı növ elementlər arasında $n_k!$ sayda aparılan yerdəyişmələr də heç nəyi dəyişməyəcək. Birinci növ, ikinci növ və nəhayət k-cı növ elementlər arasında yerdəyişmələri bir-birindən asılı olmayaraq etmək olar. Ona görə də (5) permutasyonundan növ elementləri arasında yerdəyişmələri elə etmək olar ki (vurma qaydasına əsasən), həmin permutasyon dəyişməz qalar. Bu, eyni ilə permutasyonlarda elementlərin başqa cür düzülüşü üçün də doğrudur. Ona görə də $n!$ sayda permutasyonlar çoxluğu, hər biri $n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!$ sayda eyni permutasyonlardan ibarət olan hissələrə bölünürlər. Onları kənar etmək üçün $n!$-ı həmin hasilə bölmək lazımdır. Deməli, verilmiş elementlərdən düzəldilə bilən bütün təkrarlı müxtəlif permutasyonların ümumi sayı belə olar:

$$\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!},$$

burada $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Misal. «Missisipi» sözündəki hərflərdən neçə təkrarlı müxtəlif permutasyon düzəltmək olar?

Həlli. Bu sözdəki hərflərin sayı aşağıdakı kimidir:

$$M - 1, \quad n_1 = 1,$$

$$i - 4, \quad n_2 = 4,$$

$$s - 3, \quad n_3 = 3,$$

$$p - 1, \quad n_4 = 1.$$

Onda (4) düsturundan istifadə edərək tələb edilən sayı tapa bilərik:

$$\overline{P}(1,4,3,1) = \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 2520.$$

Deməli, «Missisipi» sözündəki hərflərdən **2520** sayda təkrarlı müxtəlif permutasyonlar düzəltmək olar.

§7. Təkrarlı kombinezonlar.

Fərz edək ki, $M=\{a,b,\ldots,c\}$ sonlu, n sayda elementləri olan çoxluqdur. Bu çoxluğun hər bir elementinə, onun təkrarlanma sayı adlandırılan müəyyən bir mənfi olmayan ədədi qarşı qoyaq. Onda belə uyğunluq arqumentinin qiymətləri verilmiş çoxluğun elementləri, özünün aldığı qiymətlər isə mənfi olmayan tam ədədlər - elementlərin təkrarlanma sayları olan bir ədədi funksiyanı ifadə edəcəkdir.

Fərz edək ki, a elementinin təkrarlanma sayı -α, b elementinin təkrarlanma sayı-β,..., nəhayət c elementinin təkrarlanma sayı-γ-dır. Baxılan uyğunluğu işarə etmək məqsədilə yazılan birləşmələrdə verilmiş elementi ifadə edən simvol həmin elementin təkrarlanma sayını bildirən müsbət ədədə uyğun sayda yazılır, əgər elementin təkrarlanma sayı sıfırdırsa, onda həmin elementə uyğun olan simvol yazılmır. Bu zaman elementləri ifadə edən simvolları istənilən ardıcıllıqla yazmaq olar, lakin onların hər biri uyğun olduğu elementin təkrarlanma sayını bildirən ədəd sayda yazılmalıdır. Məsələn,

$$aaabbcdd,\quad ababacdd,\quad dbdabaca$$

yazıları onu bildirir ki, a-nın təkrarlanma sayı 3-ə, b-nin təkrarlanma sayı 2-yə, c-nin təkrarlanma sayı 1-ə, d-nin təkrarlanma sayı isə 2-yə bərabərdir. Belə də deyirlər ki, hər bir element onun təkrarlanma sayı qədər götürülür. Baxılan halda a elementi 3 dəfə, b elementi 2 dəfə, c elementi 1 dəfə və d elementi 2 dəfə götürülmüşdür.

Tərif. Əgər hər hansı bir sonlu çoxluğun hər bir elementinə, həmin elementin təkrarlanma sayı adlandırılan bir mənfi olmayan tam ədəd qarşı qoyulmuşdursa, onda deyirlər ki, təkrarlı kombinezon verilmişdir. Bütün elementlərin təkrarlanma saylarının cəmi olan k ədədinə kombinezonun tərtibi deyilir.

n sayda elementi olan çoxluğun elementlərindən düzəldilmiş hər bir k-tərtibli təkrarlı kombinezon həmçinin verilmiş n elementdən hər birində k sayda element olan təkrarlı kombinezon adlanır.

Əgər $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ ədədləri uyğun olaraq $a, b, \ldots, c$ elementlərinin təkrarlanma saylarıdırsa, onda tərifə əsasən $(\alpha + \beta + \cdots + \gamma)$ cəmi aşağıdakı təkrarlı kombinezonun tərtibini ifadə edir:

$$\overbrace{aaa\ldots a}^{\alpha-sayda}\ \overbrace{bbb\ldots b}^{\beta-sayda}\ \ldots\ \overbrace{ccc\ldots c}^{\gamma-sayda}\ .$$

Misal. Aşağıda verilmiş üç elementdən beş-beş götürməklə düzəldilmiş bütün mümkün olan təkrarlı kombinezonlar yazılmışdır:

aaaaa, *aaacc*, *aaccc*, *abccc*, *bbbcc*,

aaaab, *aabbb*, *abbbb*, *acccc*, *bbccc*,

aaaac, *aabbc*, *abbbc*, *bbbbb*, *bcccc*,

aaabb, *aabcc*, *abbcc*, *bbbbc*, *ccccc*,

aaabc,

Teorem. Verilmiş n sayda elementlərdən hər birində k sayda element olmaqla düzəldilən təkrarlı kombinezonların sayı aşağıdakı düsturla ifadə edilir:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k\,. \tag{6}$$

İsbatı. Verilmiş çoxluğun elementlərini müəyyən sıra ilə, məsələn, belə yazaq:

$$a, b, \ldots, c \tag{7}$$

(kombinezonların sayının hesablanması üçün elementlərin düzülüş qaydasının xüsusi əhəmiyyəti yoxdur). a elementinin α-dəfə, b elementinin β-dəfə və s., c elementinin γ-dəfə təkrarlandığı hər bir təkrarlı kombinezona aşağıdakı simvolu qarşı qoyaq:

$$\overbrace{11\ldots1}^{\alpha-sayda}\ 0\ \overbrace{11\ldots1}^{\beta-sayda}\ 0\ldots0\ \overbrace{11\ldots1}^{\gamma-sayda}\ . \tag{8}$$

Əgər hər hansı bir element verilmiş təkrarlı kombinezonda iştirak etmirsə, yəni onun təkrarlanma sayı sıfra bərabərdirsə, onda uyğun vahidlər qrupu yazılmır. Beləliklə, baxılan simvolda $\mathbf{0}$ rəqəmi bir neçə dəfə ardıcıl yazıla bilər. $\boldsymbol{n}$ elementdən hər birində $\boldsymbol{k}$ sayda element olmaqla düzəldilmiş təkrarlı kombinezonlara uyğun olan simvollarda $\mathbf{1}$ rəqəmi $\boldsymbol{k}$ dəfə, $\mathbf{0}$ rəqəmi isə $\boldsymbol{(n-1)}$ dəfə iştirak edir. Bu simvollar mahiyyət etibarı ilə «ikilik» təkrarlı permutasyonlarıdır ki, onların hər biri iki rəqəmdən, yəni 0 və 1-dən təşkil olunmuşlar və onlarda $\boldsymbol{0-(n-1)}$ dəfə, 1 isə k dəfə iştirak edir.

Beləliklə, hər bir təkrarlı kombinezona tamamilə müəyyən bir ikilik permutasyonu uyğun gəlir və tərsinə, $\mathbf{0}$ rəqəminin $\boldsymbol{(n-1)}$ dəfə, $\mathbf{1}$ rəqəminin isə $\boldsymbol{k}$ dəfə iştirak etdiyi hər bir ikilik permutasyonuna $\boldsymbol{n}$ elementdən hər birində $\boldsymbol{k}$ sayda element iştirak edən bir təkrarlı, tamamilə müəyyən kombinezon uyğun gəlir. Belə bir kombinezonu düzəltmək üçün vahidlər qrupuna uyğun olan hər bir elementi (müəyyən edilmiş qaydaya əsasən) həmin qrupdakı vahidlərin sayı qədər uyğun yerdə yazmaq lazımdır.

Məsələn,

$$aaabbcddd \text{ və } abbbbbbbd$$

kombinezonlarına uyğun olan simvollar bunlardır:

$$11101101011 \quad \text{və} \quad 1011111110\,01.$$

Eyni zamanda

$$011100111111 \quad \text{və} \quad 110111010111$$

simvollarına uyğun olan kombinezonlar isə bunlardır:

$$\boldsymbol{bbbdddddd} \quad \text{və} \quad \boldsymbol{aabbbcddd}.$$

Yaradılmış bu qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq göstərir ki, təkrarlı kombinezonların $\overline{C}_n^k$- sayı, hər birində $\mathbf{0}$ rəqəminin $\boldsymbol{(n-1)}$ sayda, 1 rəqəminin isə $\boldsymbol{k}$ sayda iştirak etdiyi ikilik permutasyonların sayına bərabərdir, yəni

$$\boldsymbol{\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k}.$$

Bununla da teoremin isbatı başa çatdı.

Misal. n sayda eyni əşyaları p sayda şəxs arasında neçə üsulla bölmək olar?

Həlli. Əgər birinci şəxs α sayda, ikinci şəxs β sayda və s., axırıncı şəxs γ sayda əşya alıbsa, onda əşyaların belə bölgüsünü simvolik olaraq aşağıdakı kimi yazacağıq:

$$\underbrace{11\ldots1}_{\alpha-sayda}\ \underbrace{22\ldots2}_{\beta-sayda}\ \ldots\ \underbrace{pp\ldots p}_{\gamma-sayda},$$

burada $\boldsymbol{\alpha+\beta+\cdots+\gamma=n}$ (əgər müəyyən bir şəxs, məsələn, birinci şəxs heç bir əşya almayıbsa, onda bölgü simvolunda 1 rəqəmi yazılmır). Buradan aydın olur ki, əşyaların mümkün bölgülərinin sayı p elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilən təkrarlı kobinezonların sayına bərabərdir, yəni $\boldsymbol{C_{p+n-1}^{n}}$ qədər olar.

§8. Nyuton binomu. Yalnız ikinci hədləri ilə fərqlənən binomların hasili.

Ümumiyyətlə, ixtiyari ikihədliyə binom deyilir. Məsəslən, $x+a,\ 2x^2-3y,\ \frac{1}{2}a^3-5b^2,\ y^3+z^3$ və s. ikihədlilərə (yəni binoma) misal ola bilər. Yalnız ikinci hədləri ilə bir-birindən fərqlənən bir neçə sayda binomların hasilini nəzərdən keçirək. Əvvəlcə iki $x+a_1$ və $x+a_2$ binomlarının hasilinə baxaq:

$$(x+a_1)(x+a_2)=x^2+a_1x+a_2x+a_1a_2=$$

$$=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2\,.$$

Bundan istifadə edərək ikinci hədləri ilə fərqlənən üç binomun hasilini tapaq:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=\left(x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2\right)(x+a_3)=$$

$$=x^3+(a_1+a_2)x^2+a_1a_2x+a_3x^2+(a_1+a_2)a_3x+a_1a_2a_3=$$

$$=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3 .$$

Buna tamamilə uyğun olaraq, dörd binomun hasilini yaza bilərik:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3+$$

$$+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2+$$

$$+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4 .$$

Yuxarıdakı tapdığımız hasilləri nəzərdən keçirdikdə görürük ki, onların hamısı eyni bir qanunauyğunluq əsasında düzəldilmişdir. Doğrudan da:

Hasil x - in azalan dərəcəsi üzrə düzəlmiş bir çoxhədlidir. Birinci həddin dərəcəsi hasildə iştirak edən binomların sayına bərabərdir; hər sonrakı hədlərdə x - in dərəcəsi bir – bir azalır; axırıncı həddə x daxil olmur (0 dərəcə ilə daxil olur). Birinci həddin əmsalı 1-ə bərabərdir; ikinci həddin əmsalı hasildə iştirak edən binomların ikinci hədlərinin cəminə bərabərdir; üçüncü həddin əmsalı binomların ikinci hədlərinin cüt-cüt götürülmüş hasillərinin cəmidir; dördüncü həddin əmsalı binomların ikinci hədlərinin üç-üç götürülmüş hasillərinin cəmidir. Axırıncı hədd isə hasildə iştirak edən bütün binomların ikinci hədlərinin hasilidir. Indi isbat edək ki, bu qanunauyğunluq istənilən sayda binomların hasili üçün də doğrudur. Bunu isbat etmək üçün riyazi induksiya üsulundan istifadə edəcəyik. Bunun üçün həmin qanunauyğunluğun n-sayda binomların hasili üçün doğru olduğunu fərz edərək, onun $(n+1)$ sayda binomlar üçün də doğru olduğunu isbat edək.

Beləliklə, fərz edək ki, aşağıdakı düstur doğrudur:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)...(x+a_n)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+...+S_n \, . \quad (1)$$

Burada biz sadəlik üçün aşağıdakı işarələmələri etmişik:

$$\begin{aligned} &S_1=a_1+a_2+a_3+...+a_n, \\ &S_2=a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n, \\ &S_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+...+a_{n-2}a_{n-1}a_n, \qquad (2) \\ &... \qquad ... \qquad ... \\ &S_n=a_1a_2a_3...a_n \end{aligned}$$

$(n+1)$ sayda binomların hasili üçün də (1) şəklində düsturun doğruluğunu isbat etmək üçün (1) düsturunun hər iki tərəfini $(x+a_{n+1})$ ikihədlisinə vuraq. Onda aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\begin{aligned} &(x+a)_1(x+a_2)(x+a_3)...(x+a_n)(x+a_{n+1})= \\ &=(x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+...+S_n)(x+a_{n+1})= \\ &=x^{n+1}+S_1x^n+S_2x^{n-1}+...+S_nx+a_{n+1}x^n+a_{n+1}S_1x^{n-1}+ \\ &+a_{n+1}S_2x^{n-2}+...+a_{n+1}S_n=x^{n+1}+(S_1+a_{n+1})x^n+ \\ &+(S_2+a_{n+1}S_1)x^{n-1}+...+(S_n+a_{n+1}S_{n-1})x+a_{n+1}S_n \, . \qquad (3) \end{aligned}$$

Aldığımız (3) bərabərliyinin sağ tərəfini nəzərdən keçirdikdə görürük ki, n sayda binomların hasili üçün doğru olan qanun elə $(n+1)$ sayda binomların hasili üçün də doğrudur. Həqiqətən də, əvvələn, x - in dərəcələri həmin qanuna uyğun şəkildə düzülmüşdür; ikincisi, əmsallar da həmin qanuna uyğundur, belə ki, birinci həddin əmsalı 1-ə bərabərdir, ikinci həddin əmsalı olan (S_1+a_{n+1}) ifadəsi hasilləri tapılan binomların ikinci hədlərinin (o cümlədən a_{n+1} də daxil olmaqla) cəmidir, üçüncü həddin əmsalı, yəni $(S_2+a_{n+1}S_1)$ ifadəsi, a_{n+1} də daxil olmaqla, bütün binomların ikinci hədlərinin cüt – cüt götürülmüş hasillərinin cəmidir və s. Nəhayət, $a_{n+1}S_n$ bütün ikinci hədlərin hasilidir, yəni $a_1a_2a_3...a_na_{n+1}$ - dir.

Beləliklə, biz xüsusi hallarda, yəni $n = 2,3,4$ olduqda qanunun doğruluğunu bilavasitə gördük, n üçün onun doğruluğunu fərz edərək, $(n+1)$ üçün də onun doğruluğunu isbat etdik. Ona görə də hökm edə bilərik ki, həmin qanun natural n ədədinin istənilən qiymətində doğrudur.

§9. Nyuton binomu düsturu.

Artıq isbat edilmiş

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)...(x+a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + ... + S_n \quad (1)$$

düsturunda bütün binomların ikinci hədlərinin bərabər olduğunu fərz edək, yəni

$$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = a$$

qəbul edək. Onda (1) bərabərliyinin sol tərəfi $(x+a)$ binomunun n-ci qüvvətinə, yəni $(x+a)^n$-ə bərabər olar. Bu halda $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ əmsallarının nəyə çevrildiyini müəyyən edək:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \overbrace{a + a + a + ... + a}^{n\, sayda} = na; S_1 = na,$$

$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + ... + a_{n-1}a_n = a^2 + a^2 + ... + a^2 + ... + a^2.$$

Axırıncı cəmdəki a^2-ların sayı n elementdən hər birində iki element iştirak etməklə düzəldilə bilən kombinezonların sayina bərabər olacaq, yəni

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\qquad\qquad S_2=C_n^2a^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2,$$

$$S_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n=a^3+a^3+\ldots+a^3.$$

Burada a^3-ların sayı n-elementdən hər birində 3 element olmaqla düzəldilə bilən bütün kombinezonların sayına bərabər olacaqdır, yəni

$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3};\quad onda\quad S_3=C_n^3a^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3.$$

Nəhayət,

$$S_n=a_1a_2a_3\ldots a_n=\overbrace{aaa\ldots a}^{n}=a^n$$

olur.

Beləliklə, bütün bunları nəzərə alaraq, (1) düsturunu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1.)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{n-3}+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[k-1])}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}a^kx^{n-k}+\ldots+a^n. \qquad (4)$$

Yaxud da,

$$(x+a)^n=x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\ldots+C_n^ka^kx^{n-k}+\ldots+a^n. \qquad (5)$$

(4) və ya (5) düsturu Nyuton binomu düsturu adlanır. (4) düsturunun sol tərəfindəki $(x+a)^n$ ifadəsi Nyuton binomu, sağ tərəfindəki çoxhədli isə Nyuton binomunun açılışı adlanır.

Nyuton binomu düsturunun bir çox maraqlı xassələri vardır. Aşağıda onları nəzərdən keçirəcəyik.

§10. Nyuton binomu düsturunun xassələri.

Düsturun aşağıdakı 10 mühüm xassəsini göstərək.

1.Binomun açılışında x-in üstü birinci həddən başlayaraq, axırıncı həddə qədər hər dəfə bir vahid azalır, belə ki, birinci həddə x-in üstü binomun üstünə bərabər olur, axırıncı həddə isə o, sıfra bərabər olur; əksinə, a-nın üstü isə birinci həddən başlayaraq, axırıncı həddə qədər, hər dəfə bir vahid artır. Belə ki, birinci həddə a-nın üstü sıfra, axırıncı həddə isə binomun üstünə bərabər olur. Bunun nəticəsində açılışın hər bir həddində a ilə x-in üstlərinin cəmi bir-birinə bərabər olmaqla o, binomun üstünə bərabər olur.

2. Açılışdakı bütün hədlərin sayı $(n+1)$ - ə bərabər olur, belə ki, a-nın üstü 0-dan başlayaraq, n-ə qədər (0 və n- də daxil olmaqla) ardıcıl olaraq artır.

3. Əmsallar bərabərdir: birinci həddə vahidə, ikinci həddə binomun üstünə, üçüncü həddə n elementdən iki-iki götürülmüş kombinezonların sayına, dördüncü həddə n elementdən üç-üç götürülmüş kombinezonların sayına; ümumiyyətlə, $(k+1)$ -ci həddə n elementdən hər birində k sayda element olmaqla düzəldilən kombinezonların sayına; nəhayət, axırıncı həddin əmsalı n-elementdən hər birində n element olmaqla düzəldilən kombinezonların sayına, yəni 1-ə bərabərdir.

Qeyd edək ki, bu əmsalları binomial əmsallar adlandırırlar.

4. Açılışın hər bir həddini T hərfi ilə, həmin həddin açılışda tutduğu yerin nömrəsini onun indeksində yazsaq, yəni birinci həddi T_1, ikinci həddi T_2 və s. kimi işarə etsək, aşağıdakı düsturu yaza bilərik:

$$T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[k-1])}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} a^k x^{n-k}\,. \qquad (6)$$

(6) düsturu binomun açılışının ümumi hədd düsturu adlanır, belə ki, k-ya 0,1,2,..., n qiymətləri verməklə biz həmin düsturdan açılışın bütün hədlərini ala bilərik.

5. Birinci həddin əmsalı vahidə bərabərdir, axırdan birinci həddin əmsalı da vahidə bərabərdir. Başlanğıcdan ikinci həddin əmsalı n-ə, yəni $C_n^1 = n$-ə bərabərdir; lakin

$C_n^{n-1} = C_n^1$ olduğundan bu əmsallar bərabərdir. Başlanğıcdan üçüncü əmsal C_n^2-yə bərabərdir, lakin $C_n^{n-2} = C_n^2$ olduğundan bu əmsallar da eynidir. Deməli:

Nyuton binomunun açılışında başlanğıcdan və axırdan bərabər uzaqlıqda yerləşən hədlərin əmsalları bərabərdir.

6. Binomial əmsalları

$$1, n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ldots$$

nəzərdən keçirərək müəyyən edirik ki, bir əmsaldan sonrakı əmsala keçdikdə kəsrin surəti hər dəfə daha kiçik ədədlərə $((n-1)$-ə, $(n-2)$-yə, $(n-3)$-ə və s.$)$ vurulur, məxrəclər isə daha böyük ədədlərə (2-yə, 3-ə, 4-ə və s.) vurulur. Bunun nəticəsində əmsallar əvvəlcə artır (surətdəki vuruqlar məxrəcdəki uyğun vuruqlardan böyük olduqca), sonra isə azalır. Açılışda əvvəldən və axırdan bərabər uzaqlıqda yerləşən hədlərin əmsalları bərabər olduğundan ən böyük əmsal açılışın ortasında yerləşir. Bu vaxt, əgər açılışdakı hədlərin sayı tək ədəd olarsa (bu binomun üstü cüt ədəd olduqda olur), onda ortada ən böyük əmsallı bir hədd olacaq; əgər açılışdakı bütün hədlərin sayı cüt ədəd olarsa (binomun üstü tək ədəd olduqda belə olur), onda açılışın ortasında iki eyni, ən böyük əmsallı hədd olacaqdır.

Məsələn,

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

1. Açılışda iki ardıcıl dayanan

$$T_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} a^k \cdot x^{n-k},$$

$$T_{k+2} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)](n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} a^{k+1} \cdot x^{n-k-1}$$

hədləri müqayisə edərək belə nəticəyə gəlirik:

Sonrakı həddin əmsalını almaq üçün ondan əvvəlki həddin əmsalını həmin həddəki x-in üstünə vurub, alınan ədədi təyin ediliəcək həddən əvvəlki hədlərin sayına bölmək kifayətdir.

Bu xassədən istifadə edərək, açılışdakı hədlərin əmsallarını birbaşa yaza bilərik. Məsələn,

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7 .$$

Üçüncü əmsalı tapmaq üçün 7-ni 6-ya vurub, 42 alırıq və onu 2-yə bölərək 21 alırıq. Dördüncü əmsalı tapmaq üçün 21-i 5-ə vurub, 105 alırıq və onu 3-ə bölərək 35 alırıq. Əgər bu qayda ilə 5-ci əmsalı da hesablasaq, 35 alarıq. Beləliklə, açılışın ortasına çatmış oluruq. Sonrakı əmsallar isə 5-ci xassəyə əsasən yazılır.

8. Bütün binomial əmsalların cəmi 2^n-ə bərabərdir. Doğrudan da, əgər (4) və (5) düsturlarında $x = a = 1$ götürsək, alarıq:

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + 1, \qquad (7)$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n \quad (burada\ C_n^0 = 1, C_n^n = 1).$$

Məsələn, $(x+a)^7$ binomunun açılışındakı əmsalların cəmi bərabərdir:

$$1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7 .$$

9. Əgər (4) düsturunda a-nı $-a$ ilə əvəz etsək, alarıq:

$$(x-a)^n = x^n + n(-a)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(-a)^2 x^{n-2} + \ldots + a^n$$

və ya

$$(x+a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n a^n , \quad (8)$$

yaxud (5) düsturundan alırıq:

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 ax^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + (-1)C_n^n a^n . \qquad (9)$$

(8) və (9) düsturlarından aydın olur ki, “+” və “-” işarələri həmin düsturlarda növbələşir.

10. Əgər (8) və (9) düsturlarında $x = a = 1$ yazsaq, alarıq:

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + (-1)^n \ , \qquad (10)$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + (-1)^n C_n^n . \qquad (11)$$

Beləliklə, (10) və (11) düsturlarından aydın olur ki, tək yerdə duran əmsalların cəmi cüt yerdə duran əmsalların cəminə bərabərdir.

§11. Binom düsturunun çoxhədliyə tətbiqi.

Nyuton binomu düsturunun tətbiq edilməsi çoxhədlinin qüvvətə yüksəldilməsinə imkan verir.

Fərz edək ki, $(a+b+c)^4$ -ü hesablamaq tələb edilir. Bu halda onu aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

$$(a+b+c)^4 = [(a+b)+c]^4 = (a+b)^4 + 4c(a+b)^3 +$$

$$+6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4 .$$

$(a+b)^4, (a+b)^3, (a+b)^2$ ifadələrini açıb, sadələşdirdikdən sonra tapırıq:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc +$$

$$+12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4 .$$

Daha ümumi şəkildə olan $(a+b+c)^n$ ifadəsini hesablamaq üçün xüsusi hala uyğun olaraq, onu $[(a+b)+c]^n$ şəklində yazıb, hesablamaq lazımdır.

Misallar.

1) Nyuton binomu düsturundan istifadə edərək $(3x+4y)^6$ ifadəsini hesablayın.

Həlli.

$$(3x+4y)^6=(3x)^6+6(4y)(3x)^5+15(4y)^2(3x)^4+20(4y)^3(3x)^3+$$

$$+15(4y)^4(3x)^2+6(4y)^5(3x)+(4y)^6=729x^6+5832x^5y+19440x^4y^2+$$

$$+34560x^3y^3+25560x^2y^4+18432xy^5+4096y^6.$$

2) $(5x-6a^2)^{10}$ binomunun açılışındakı 6-cı həddi tapın.

Həlli. Açılışın ümumi hədd düsturundan istifadə edək.

$$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k},$$

burada $n=10, x\to 5x^2, a\to(-6a^2), k=5$ götürmək lazımdır. Onda

$$T_6=C_{10}^5(-6a^2)^5\cdot(5x^2)^{10-5}=-252\cdot 6^5\cdot 5^5\cdot a^{10}\cdot x^{10}.$$

3) $\left(x^2-\dfrac{3}{x^3}\right)^{15}$ binomunun açılışında x daxil olmayan həddi tapın.

Həlli. Ümumi hədd düsturundan istifadə edək.

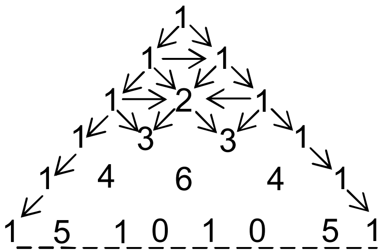
$$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}=C_{15}^k\left(-\frac{3}{x^3}\right)^k\cdot(x^2)^{10-k}=$$

$$=C_{15}^k\cdot(-1)^k\cdot 3^k\cdot x^{-3k}\cdot x^{20-2k}=(-1)^k C_{15}^k\cdot 3^k\cdot x^{20-5k}.$$

Axtarılan həddə x-in iştirak etməməsi üçün $20-5k=0$ olmalıdır. Buradan tapırıq ki, $k=4$ olmlıdır. Onda axtarılan hədd $T_5=C_{15}^4 3^4$ - dür.

§12. Paskal üçbucağı.

Fransız alimi Blez Paskal (1629-1662) Parisdə yaşamış, riyaziyyat və fizika elmləri sahəsində bir sıra kəşflər etmişdir. Üçbucaq şəklində müəyyən qanunauyğunluqla düzələn ədədlər cədvəlini də Paskalın adı ilə bağlayırlar. Lakin bəzi ədəbiyyatlarda qeyd edilir ki, bu üçbucaq Fars şairi, filosofu və riyaziyyatçısı Ömər Xəyyama məlum imiş. Bu üçbucaq aşaıdakı kimi qurulur:



Şəkil 1.

Birinci sətirdə 1 ədədi, ikinci sətirdə 1 ədədinin sağında və solunda yenə də 1 ədədi yazılır. Üçüncü sətirdə ikinci sətirdəki ədədlərin cəmi olan 2 ədədi ortada yazılır, yanlardan yenə də 1 ədədi yazılır. Dördüncü sətirdə yanlardan yenə də 1 ədədi, ortada isə üçüncü sətirdəki ədədlərin cüt-cüt cəmi yazılır və bu qayda davam etdirilir. Deməli, hər sonrakı sətirdəki ədədləri almaq üçün bilavasitə ondan əvvəlki sətirdəki ədədləri bilmək kifayət edir.

Bu üçbucağın bir xüsusiyyəti çox maraqlıdır. Onun hər bir sətrindəki ədədlər binomial əmsallardır. Məsələn, birinci sətirdəki 1 ədədi

$$(a+b)^0 = 1 \qquad (n=0)$$

binomunun, ikinci sətirdəki 1 və 1 ədədləri

$$(a+b)^1 = a+b \qquad (n=1)$$

binomunun, üçüncü sətirdəki 1, 2 və 1 ədədləri

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (n=2)$$

binomunun və s. əmsallarıdır.

Bu qanunauyğunluq Paskal üçbucağındakı binomial əmsallar haqqındakı aşağıdakı teorem şəklində ümumiləşdirilir.

Teorem. Paskal üçbucağında *n+1* –ci sətirdə duran ədədlər $(a+b)^n$ binomunun açılışındakı binomial əmsallardır.

Isbatı. Teoremi isbat etmək üçün riyazi induksiya metodundan istifadı edək.

1) $n=0 \;\; olduqda \;\; (a+b)^0 = 1, n=1 \;\; olduqda \;\; a+b=a+b$ olur. Deməli, 1-ci və 2-ci sətirlər üçün teorem doğrudur (burada ikinci sətir üçün yoxlama aparmaya da bilərik).

2) İndi təklifin "k-1" üçün doğru olduğunu qəbul edib, onun k üçün də doğru olduğunu isbat edək. Tutaq ki, k-cı sətirdə $(a+b)^{k-1}$ binomunun açılışındakı binomial əmsallardır:

$$1, C_{k-1}^1, C_{k-1}^2, \ldots, C_{k-1}^S, \ldots, 1$$

Onda $(k+1)$-ci sətirdəki binomial əmsallar Paskal üçbucağının qurulma qaydasına əsasən, aşağıdakı şəklidə təyin edilir:

$$1, \left(1 + C_{k-1}^1\right), \left(C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2\right), \ldots, \left(C_{k-1}^{S-1} + C_{k-1}^S\right), \ldots, 1.$$

Bu əmsalları hesablayaq:

$$1 + C_{k-1}^1 = 1 + k - 1 = k = C_k^1;$$

$$C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 = k - 1 + \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2} = \frac{2(k-1) + (k-1)(k-2)}{2} =$$

$$= \frac{(k-1)(2+k-2)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = C_k^2.$$

Deməli, $C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 = C_k^2$ olar. $C_{k-1}^{S-1} + C_{k-1}^S = C_k^S$ düsturunun k və s-in $(s \le k)$ itiyari natural qiymətində doğru olduğunu göstərək:

$$C_{k-1}^{1}+C_{k-1}^{1}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!(s+k-s)}{s!(k-s)!}=$$
$$=\frac{k(k-1)!}{s!(k-s)!}=\frac{k!}{s!(k-s)!}=C_k^S.$$

Deməli, $C_{k-1}^{S-1}+C_{k-1}^{S}=C_k^S$ olur. Nəticədə

$$1, C_{k-1}^{1}, C_{k-1}^{2}, \ldots, C_{k-1}^{S}, \ldots, 1$$

əmsallarını alarıq. Bu əmsallar doğrudan da Paskal üçbucağında $(k+1)$-ci sətrindəki ədədlərdir, başqa sözlə, $(a+b)^n$ binomunun açılışındakı əmsallardır. Beləliklə, riyazi induksiya metodundan istifadə edərək, təklifin "k-1" üçün doğru olduğunu qəbul edib, onun k üçün də doğru olduğunu göstərdik. Bu da o deməkdir ki, təklif n-in bütün qiymətlərində doğrudur.

Teorem isbat olundu.

Misal. Paskal üçbucağının 5-ci sətrindəki *1, 4, 6, 4, 1* ədədləri ilə $(a+b)^4$-ün açılışındakı əmsalları müqayisə edin.

$$(a+b)^4=a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^1ab^3+b^4$$

Doğrudan da Paskal üçbucağının 5-ci sətrindəki ədədlərlə $(a+b)^4$ binomunun açılışındakı əmsallar eynidir.

§13. Hadisə anlayışı.

Biz gündəlik həyatda müxtəlif hadisələri müşahidə edir, çoxlu təcrübələrin,sınaqların nəticələrini öyrənirik. Şərti olaraq hadisələri üç qrupa bölmək olar – yəqin, qeyri mümkün və təsadüfü hadisələr. Məsələn, bir oyun zərini atdıqda düşən xalın:

1) «natural ədəd olması» yəqin hadisədir;
2) «yeddi olması» mümkün olmayan hadisədir;
3) «beş olması» təsadüfü hadisədir.

Sınaq, təcrübə və ya müşahidə nəticəsində hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir.

Sınaq, təcrübə və ya müşahidə nəticəsində heç zaman baş verməyən hadisəyə mümkün olmayan hadisə deyilir.

Sınaq, təcrübə və ya müşahidə nəticəsində baş verən və ya baş verməyən hadisəyə təsadüfü hadisə deyilir.

Riyaziyyatın təsadüfü hadisələri öyrənən bölməsinə Ehtimal nəzəriyyəsi deyilir. Bu nəzəriyyə ayrı-ayrı hadisələri yox, kifayət qədər çox sayda keçirilən sınaqların nəticələrini öyrənilir, yəni kütləvi təsadüfü hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənir.

§14.`Elementar hadisələr fəzası.

Təcrübə və ya sınaq anlayışı ehtimal nəzəriyyəsində istifadə edilən əsas anlayışlardan biridir. Bu anlayışa riyazi tərif verilmir.

Hadisələr mürəkkəb (ayrılan) və elementar (ayrılmayan) hadisələrə bölünür. Sınaq, təcrübə və ya müşahidənin hər bir ayrılmayan nəticəsinə elementar hadisə deyilir. Bütün elementar hadisələr çoxluğuna isə elementar hadisələr fəzası deyilir. Adətən, elementar hadisələr fəzası U ilə işarə edilir.

Misal 1. Metal pulun atılma sınağında qerb üzünün yuxarı düşməsi elementar hadisədir; bu hadisəni G ilə işarə edək; rəqəm üzünün yuxarı düşməsi də elementar hadisədir, onu isə R ilə işarə edək. Bu zaman elementar hadisələr fəzası $U=\{G,R\}$ olacaq.

İki metal pulun atılmasında elementar hadisələr fəzasını U_2 ilə işarə etsək, $U_2=U^2=U\times U$ yəni $U_2=\{(G,G),(G,R),(R,G),(R,R)\}$ olacaq.

Üç metal pulun atılmasında elementar hadisələr fəzasını U_3 ilə işarə etsək, onda $U_3=U^3=U\times U\times U$.

Misal 2. Zərin atılmasında E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6 hadisələri elementar hadisələrdir, burada E_k ilə «yuxarı üzdə

k xal düşməsi» hadisəsi işarə olunub. Zərin atılmasında elementar hadisələr fəzası

$$U = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\} \qquad (1)$$

olacaq. İki zərin atılmasında elementar hadisələr fəzası U_2 aşağıdakı kimi olacaq

$$U_2 = U^2 = U \times U = \{(E_1, E_1), (E_1, E_2), ..., (E_6, E_6)\}\,.$$

Ümumiyyətlə, müəyyən sınaq nəticəsində bütün mümkün olan elementar hadisələr $E_1, E_2, ..., E_n$ olarsa, onda elementar hadisələr fəzası

$$U = \{E_1, E_2, ..., E_n\} \qquad (2)$$

olacaq. Başqa sözlə, S sınağı üçün elementar hadisələr fəzasının (2) münasibəti ilə verilməsi o deməkdir ki, S sınağının bir dəfə aparılması nəticəsində baş verən hər hansı E hadisəsi $E_1, E_2, ..., E_n$ hadisələrindən yalnız biri olacaq.

(2) elementar hadisələr fəzasının hər hansı alt çoxluğuna «hadisə» deyilir. Bu zaman $\{\varnothing\}$ qeyri mümkün hadisə, U isə yəqin hadisə olur.

Məsələn, (1) fəzasının $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ alt çoxluğu «atılmış bir zərin yuxarı üzündəki xalının cüt olması» hadisəsi olacaq; $B = \{E_2, E_3\}$ alt çoxluğu «atılmış bir zərin 2 yaxud 3 olması» hadisəsi olacaq.

Hər bir hadisə elementar hadisələr fəzasının alt çoxluğu olduğundan, çoxluqlar üçün təyin edilən əməllər hadisələr üçün də eyni qayda ilə təyin edilir.

Bütün nəticələri A və ya B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan hadisəyə A və B hadisələrinin birləşməsi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə edilir. Məsələn, yuxarıdakı $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ və $B = \{E_2, E_3\}$ hadisələrinin birləşməsi $A \cup B = \{E_2, E_3, E_4, E_6\}$ hadisəsi olacaq.

Bütün nəticələri həm A hadisəsinə, həm də B hadisəsinə daxil olan hadisəyə A və B hadisələrinin kəsişməsi deyilir və $A \cap B$ kimi işarə edilir. Məsələn, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ və

$B = \{E_2, E_3\}$ hadisələrinin kəsişməsi $A \cap B = \{E_2\}$ hadisəsidir.

Ortaq nəticələri olmayan hadisələrə uyuşmayan hadisələr deyilir. Məsələn, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ və $A = \{E_1, E_3, E_5\}$ hadisələri uyuşmayan hadisələrdir, yəni $A \cap B = \varnothing$.

Nəticələri B hadisəsinə daxil olmayıb, yalnız A hadisəsinə daxil olan hadisəyə A və ya B hadisələrinin fərqi deyilir və A / B kimi işarə edilir. Məsələn, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ və $B = \{E_2, E_3\}$ üçün $A \setminus B = \{E_4, E_6\}$ hadisəsi olacaq.

(2) elementar hadisələr fəzasının hər hansı alt çoxluğunun doğurduğu hadisəni A ilə işarə edək. $U \setminus A$ hadisəsinə A hadisəsinin əksi deyilir və $\overline{A}$ kimi işarə edilir, yəni $\overline{A} = U \setminus A$ olur.

Əgər A hadisəsinin hər bir nəticəsi həm də B hadisəsinin nəticəsidirsə, onda deyirlər ki, A hadisəsi B hadisəsini doğurur və bu fakt $A \subset B$ kimi yazılır.

§15. Hadisənin ehtimalı.

Tutaq ki, müəyyən sınaq m dəfə təkrarlanır və bu zaman qeyd olunmuş A hadisəsi $m(A)$ dəfə baş verir. Onda $\frac{m(A)}{m}$ nisbətinə A hadisəsinin baş vermə tezliyi deyilir.

Təcrübə göstərir ki, $m \to \infty$ olduqda bir qrup A hadisələri üçün $\frac{m(A)}{m}$ nisbəti müəyyən bir ədədə yaxınlaşır (bu ədədi $P(A)$ ilə işarə edirlər), yəni

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m(A)}{m} = P(A) \tag{3}$$

olur. Onda $P(A)$ ədədinə A hadisəsinin baş vermə ehtimalı deyilir.

Bu tərifdən görünür ki, $0 \le P(A) \le 1$. Yəgin hadisənin ehtimalı $P(U)=1$ və mümkün olmayan hadisənin ehtimalı $P(\varnothing)=0$ qəbul edilir.

Tutaq ki, (2) münasibəti ilə təyin olunan U fəzası S sınağı üçün elementar hadisələr fəzasıdır. S sınağını m dəfə təkrar etsək, (2)-dən alarıq

$$\frac{m(E_1)}{m}+\frac{m(E_2)}{m}+...+\frac{m(E_n)}{m}=1, \qquad (4)$$

burada $m(E_k)$ ilə m sınaq zamanı E_k hadisəsinin baş vermə sayı işarə olunub. Əgər

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m(E_k)}{m}=P_k \quad (0 \le P_k \le 1),\ k=1,2,...,n, \qquad (5)$$

limitləri varsa, onda (4) bərabərliyindən alırıq

$$P_1+P_2+...+P_n=1. \qquad (6)$$

Tərif. Aşağıdakı dörd şərti ödəyən sonlu

$$U=\{E_1,E_2,...,E_n\} \qquad (7)$$

hadisələr çoxluğuna ehtimal fəzası deyilir:

1) $E_1,E_2,...,E_n$ hadisələrindən ixtiyari ikisi uyuşmayandır, yəni $i \ne j$ olduqda $E_i \cap E_j = \varnothing$ $i,j=\overline{1,n}$.

2) (7) münasibəti ilə təyin olunan U hadisəsi yəgin hadisədir.

3) Hər bir E_k ($k=1,2,...,n$) hadisəsinə onun baş vermə ehtimalı adlanan müəyyən P_k ədədi qarşı qoyulur və $0 \le P_k \le 1$.

4) P_k ədədləri aşağıdakı bərabərliyi ödəyirpər:

$$P_1+P_2+...+P_n=1. \qquad (8)$$

Qeyd edək ki, bu zaman E_k hadisələrinin hər birinə elementar hadisələr deyilir.

Ehtimal fəzası (U,P) kimi işarə edilir, burada $U=\{E_1,E_2,...,E_n\}$ və $P=(P_1+P_2+...+P_n)$.

(7) çoxluğunun hər bir alt çoxluğuna hadisə deyilir.

Hadisəsinin $P(A)$ ehtimalı onun elementar hadisələrə ayrılışındakı elementar hadisələrin ehtimalları cəminə deyilir. Məsələn, $A=\{E_1,E_3,E_7\}$ isə, onda $P(A)=P_1+P_3+P_7$.

Teorem 1. *a*) İstənilən uyuşmayan $A\subset U$ və $B\subset U$ hadisələri üçün

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B); \tag{9}$$

b) $P(\varnothing)=0$ qəbul edilir;

c) $A\subset U$, $B\subset U$ və $A\subset B$ münasibətlərini ödəyən istənilən A və B hadisələri üçün

$$P(A)\le P(B); \tag{10}$$

d) istənilən $A\subset U$ hadisəsi üçün (10)

$$P(\overline{A})=1-P(A); \tag{11}$$

e) istənilən $A\subset U$ və $B\subset U$ hadisələri üçün

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \tag{12}$$

münasibəti doğrudur.

İsbatı. Tutaq ki,

$$\begin{gathered} A=\{E_{k_1},E_{k_2},...,E_{k_l}\},\ \ B=\{E_{m_1},E_{m_2},...,E_{m_s}\}, \\ 1\le k_1<k_2<...<k_l\le n,\ 1\le m_1<m_2<...<m_s\le n. \end{gathered} \tag{13}$$

a) fərz edək ki, (13) münasibəti ilə təyin olunan A və B hadisələri uyuşmayandır, yəni

$$k_1,k_2,...k_l,\ \ m_1,m_2,...m_s$$

indekslərinin istənilən ikisi bir birindən fərqlidir. Onda

$$A\cup B=\{E_{k_1},E_{k_2},...,E_{k_l},E_{m_1},E_{m_2},...,E_{m_s}\}$$

olacaq.

Deməli, ehtimalın tərifinə görə

$$P(A)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l},$$

$$P(B)=P_{m_1}+P_{m_1}+...+P_{m_s}$$

$$P(A\cup B)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l}+P_{m_1}+P_{m_1}+...+P_{m_s}. \tag{14}$$

(14) bərabərliyindən (9) bərabərliyinin doğruluğu alınır.

c) Tutaq ki,

$$A=\{E_{k_1},E_{k_2},...,E_{k_l}\},\quad B=\{E_{k_1},E_{k_2},...,E_{k_l},E_{k_l},E_{k_{l+1}},...,E_{k_{l+s}}\},$$

$$1\le k_1<k_2<...<k_l\le n,\ 1\le k_{l+1}<k_{l+2}<...<k_{l+s}\le n,$$

$$\{k_1<k_2<...<k_l\}\cap\{k_{l+1}<k_{l+2}<...<k_{l+s}\}=\text{Ø}.$$

Onda ehtimalın tərifinə görə

$$P(A)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l},$$

$$P(B)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l}+P_{k_{l+1}}+...+P_{k_{l+s}}$$

bərabərliklərindən (10) bərabərsizliyinin doğruluğu alınır.

d) fərz edək ki, A hadisəsi (7) çoxluğunun l $(1\le l\le n)$ sayda elementindən təşkil olunub, yəni

$$A=\{E_{k_1},E_{k_2},...,E_{k_l}\},\qquad .\qquad (15)$$
$$1\le k_1<k_2<...<k_l\le n\ .$$

Bu zaman

$$\overline{A}=\{E_{k_{l+1}},E_{k_{l+2}},...,E_{k_n}\},$$

$$1\le k_{l+1}<k_{l+2}<...<k_n\le n, \qquad (16)$$

$$\{k_1<k_2<...<k_l\}\cap\{k_{l+1}<k_{l+2}<...<k_n\}=\text{Ø}$$

olacaq. Əgər $l=n$ isə, onda $\overline{A}=\varnothing$ olur. Ehtimalın tərifinə görə (15) və (16)-dan

$$P(A)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l}.$$

$$P(\overline{A})=P_{k_{l+1}}+P_{k_{l+2}}+...+P_{k_n}$$

olduğunu alırıq. Toplananların yerini dəyişdikdə cəmin dəyişməməsi xassəsindən istifadə etməklə (8) bərabərliyindən

$$(P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l})+(P_{k_{l+1}}+P_{k_{l+2}}+...+P_{k_n})=1$$

bərabərliyinin doğruluğunu alırıq.

Onda axırıncı üç bərabərlikdən (11) bərabərliyinin doğruluğunu alırıq;

e) fərz edək ki,

$$A=\{E_{k_1},E_{k_2},...,E_{k_l},E_{k_{l+1}},...,E_{k_{l+s}}\},$$
$$B=\{E_{k_{l+1}},...,E_{k_{l+s+1}},E_{k_{l+1}},...,E_{k_{l+s+m}}\},$$
$$1\le k_1,...,k_l,k_{l+1},k_{l+s},k_{l+s+1},...,k_{l+s+m}\le n,$$

belə ki, $k_1,...,k_l,k_{l+1},k_{l+s},k_{l+s+1},...,k_{l+s+m}$ indekslərinin istənilən ikisi bir-birindən fərqlidir. Onda

$$A\cup B=\{E_{k_1}...,E_{k_l},E_{k_{l+1}},...,E_{k_{l+s}},E_{k_{l+s+1}},...,E_{k_{l+s+m}}\},$$
$$A\cap B=\{E_{k_{l+1}},...,,E_{k_{l+s}},\}$$

olacaq. Buradan, ehtimalın tərifinə görə,

$$P(A)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l}+P_{k_{l+1}}+...+P_{k_{l+s}},$$

$$P(B)=P_{k_{l+1}}+...+P_{k_{l+s}}+P_{k_{l+s+1}}+...+P_{k_{l+s+m}},$$

$$P(A\cup B)=P_{k_1}+P_{k_2}+...+P_{k_l}+P_{k_{l+1}}+...+P_{k_{l+s}}+P_{k_{l+s+1}}+...+P_{k_{l+s+m}},$$

$$P(A\cap B)=P_{k_{l+1}}+...+P_{k_{l+s}}$$

olduğunu alırıq. Bu axırıncı bərabərliklərdən (12) düsturunun doğruluğu alınır. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Əgər $A_1,A_2,...,A_n$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olarsa, onda onların birləşmələrinin ehtimalı ehtimallarının cəminə bərabərdir, yəni

$$P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (17)$$

İsbatı. Göstərək ki, $B=A_1\cup A_2\cup...\cup A_{n-1}$ və A_n hadisələri uyuşmayandır. Doğrudanda

$$B\cap A_n=(A_1\cup A_2\cup...\cup A_{n-1})\cap A_n=$$

$$=(A_1\cap A_n)\cup(A_2\cap A_n)\cup...\cup(A_{n-1}\cap A_n)=$$
$$=\varnothing\cup\varnothing\cup...\cup\varnothing=\varnothing.$$

Onda (9) düsturuna əsasən

$$P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=P((A_1\cup A_2\cup...\cup A_{n-1})\cup A_n)=$$

$$=P(B\cup A_n)=P(B)+P(A_n)=P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_{n-1})+P(A_n).$$

Yenidən bu mühakimələri $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ hadisələrinə tətbiq etməklə $(n-2)$ addımdan sonra (17) düsturunun doğruluğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

§16. Asılı olmayan hadisələr.

Məsələ. Kitab bağlamasında 10 kitab var, bu kitablardan üçü M.Ə.Sabirindir. Kitabxana otağında isə 1-dən 7-yə qədər nömrələnmiş 7 boş rəf var. Kitabxanaçı bağlamadan təsadüfən bir kitab götürüb boş rəflərdən birinə qoyur. Kitabxanaçının götürdüyü bu kitabın M.Ə.Sabirin kitabı olması və onun 1-ci, yaxud 4-cü rəfə qoyulması ehtimalını tapın.

Həlli. «Götürülmüş kitabın M.Ə.Sabirin kitabı olması» hadisəsini A hadisəsi ilə işarə edək; «bu kitabın 1-ci, yaxud 4-cü rəfə qoyulması» hadisəsini B hadisəsi ilə işarə edək. Onda «kitabxanaçının götürdüyü bu kitabın M.Ə.Sabirin kitabı olması və onun 1-ci yaxud 4-cü rəfə qoyulması» hadisəsi $A \cap B$ hadisəsi olacaq.

Məsələnin şərtindən göründüüü kimi

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{2}{7}, \quad P(A \cap B) = \frac{6}{70}$$

olur. $\frac{6}{70} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{7}$ olduğunu nəzərə alsaq, bu məsələ üçün

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alırıq.

Tərif. A və B hadisələri

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{18}$$

bərabərliyini ödədikdə onlara asılı olmayan hadisələr deyilir. Onda aşağıdakı təklif doğrudur.

Əgər A və B hadisələri asılı deyilsə, onda 1) A və $\overline{B}$ hadisələri; 2) $\overline{A}$ və B hadisələri; 3) $\overline{A}$ və $\overline{B}$ hadisələri də asılı deyil, yəni əgər

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

isə, onda
1) $P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})$; 2) $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$;
3) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$.

İsbatı. $U=B\cup\overline{B}$ olduğu üçün $A=A\cap U=A\cap(B\cup\overline{B})= =(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ olur. $(A\cap B)$ və $(A\cap\overline{B})$ uyuşmayan hadisələr olduğu üçün (9) düsturuna əsasən

$$P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}))=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=$$

$$=P(A)\cdot P(B)+P(A\cap\overline{B}).$$

Burdan, (11) düsturuna əsasən

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=P(A)\cdot\left(1-P(B)\right)=P(A)\cdot P(\overline{B}). \qquad (19)$$

düsturlarından birincisinin doğru olduğunu alırıq. Analoji qayda ilə (19) düsturlarının qalan iki bərabərliyinin də doğruluğu göstərilir.

A və B hadisələri asılı olmadıqda (18) düsturunu (12)-də nəzərə alsaq

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B) \qquad (20)$$

düsturunu alırıq.

Tərif. İstənilən $k=1,...,n$ və $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$ üçün

$$P(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})...P(A_{i_k}) \qquad (21)$$

olarsa, onda $A_1,A_2,...,A_n$ hadisələr sisteminə külliyə görə asılı olmayan sistem deyilir.

$A_1,A_2,...,A_n$ külliyə görə asılı olmayan sistem olduqda, xüsusi halda

$$P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)...P(A_n) \qquad (22)$$

ehtimalların vurulması düsturu alınır.

Məsələ. İsbat edin ki, zərin atılmasında «$A\equiv$ düşən xal təkdir»; «$B\equiv$ düşən xal 3-ə bölünür» hadisələri asılı deyil.

Həlli. A hadisəsi üçün əlverişli halar (1,3,5) B hadisəsi üçün (3,6) və $A \cap B$ hadisəsi üçün isə (3) olacaq. Ona görə $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ olur. Göründüyü kimi bu halda (18) düsturu doğrudur.

§17. Şərti ehtimal.

Sınaq zamanı hər hansı əlavə şərtin nəzərə alınması bu və ya digər hadisənin ehtimalını dəyişə bilər. Məsələn, zərin atılma sınağında, «$A \equiv$ düşən xal ikidir»; «$B \equiv$ düşən xal cütdür» hadisələri olsun. $P(A|B)$ ilə B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində A hadisəsinin baş vermə ehtimalını işarə edək. Bu halda

$$P(B) = \frac{3}{6},\ P(A \cap B) = \frac{1}{6},\ P(A|B) = \frac{1}{3}$$

olur

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

bərabərliyinə əsasən bu məsələ üçün

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{23}$$

olduğunu alırıq.

Tərif. Tutaq ki, B müsbət ehtimallı hadisə, A isə istənilən hadisədir. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ nisbətinə B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində A hadisəsinin şərti ehtimalı deyilir və

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{24}$$

kimi yazılır. (24)-dən alınır ki,

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{25}$$

(25) münasibəti ehtimalların vurulması qaydası adlanır.

Teorem 3. Tutaq ki, U eyni imkanlı elementar hadisələr fəzasıdır. Müəyyən $B \subset U$ hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində istənilən $A \subset U$ hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \tag{26}$$

düsturu ilə tapılır, burada $n(B)$ ilə n sınaq zamanı B hadisəsinin baş vermə sayı işarə olunub.

İsbatı. Bütün elementar hadisələr bərabər imkanlı olduğundan, ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} \quad \text{və} \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

olur. Bu bərabərlikləri (24)-də nəzərə alsaq (26) düsturunun doğruluğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Məsələ. Şagirdin çantasında 15 «ana dili» və 20 «riyaziyyat» dəftəri var. 4 «ana dili» və 7 «riyaziyyat» dəftəri təzədir. Çantadan təsadüfən götürülmüş bir dəftərin «ana dili» dəftəri olduğunu bilərək onun təzə olması ehtimalını tapın.

Həlli. Götürüşlmüş dəftərin «təzə olması» hadisəsi A, «ana dili dəftəri olması» hadisəsi B olsun. Məsələnin həli $P(A|B)$ şərti ehtimalının tapılmasına gəlir.

Məsələnin şərtindən çıxır ki,

$$P(B) = \frac{15}{35},\ P(A \cap B) = \frac{4}{35}.$$

Deməli (24) düsturuna görə

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{15}{35}} = \frac{4}{15}.$$

Teorem 4. Tutaq ki, U elementar hadisələr fəzası cüt-cüt uyuşmayan $E_1,...,E_n$ hadisələri üzrə ayrılır, yəni

$U = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ və istənilən $i \neq j$ üçün $E_i \cap E_j =$Ø. Onda istənilən A hadisəsi üçün

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i) \tag{27}$$

düsturu doğrudur.

Bu düstura tam ehtimal düsturu deyilir.

İsbatı. Qeyd edək ki,

$$A = A \cap U = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i) . \tag{28}$$

$i \neq j$ olduqda $(A \cap E_i)$ və $(A \cap E_j)$ hadisələri uyuşmayan olduğu üçün (17) düsturuna əsasən (28)-dən alırıq:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) . \tag{29}$$

(25) düsturuna əsasən

$$P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i), \;\; i = \overline{1,n} . \tag{30}$$

(30)-u (29)-da nəzərə alsaq, (27) düsturunun doğruluğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Nəticə. $U = B \cup \overline{B}$ və $B \cap \overline{B} =$Ø olduğu üçün (27) düsturuna əsasən

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \tag{31}$$

düsturunun doğruluğunu alırıq.

Teorem 5. Tutaq ki, U elementar hadisələr fəzası cüt-cüt uyuşmayan $E_1,...,E_n$ hadisələri üzrə ayrılır, yəni $U = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ və $i \neq j$ olduqda $E_i \cap E_j =$Ø, $i, j = \overline{1,n}$.

Onda ixtiyari A hadisəsi üçün $k = 1,2,...,n$ olduqda

$$P(E_k|A) = \frac{P(E_k) \cdot P(E_k|A)}{P(E_1)P(A|E_1) + ... + P(E_n)P(A|E_n)} \tag{32}$$

düsturları doğrudur.

(32) bərabərliyi Bayes düsturu adlanır.

İsbatı. (25) düsturuna əsasən

$$P(A \cap E_k) = P(E_k) \cdot P(A|E_k) = P(A) \cdot P(E_k|A).$$

Buradan çıxır ki,

$$P(E_k|A) = \frac{P(E_k) \cdot P(A|E_k)}{P(A)}. \tag{33}$$

(27) düsturunu (33)-də nəzərə alsaq (32) münasibətinin doğru olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem 6. Tutaq ki, A hadisəsinin ehtimalı P-dir. n sayda asılı olmayan sınaq zamanı bu A hadisəsinin m dəfə baş verməsi ehtimalı P_{mn} olsun. Onda

$$P_{mn} = C_n^m P^m q^{n-m} \tag{34}$$

düsturu doğrudur, burada $q = 1 - P$.

(34) düsturuna Bernulli düsturu deyilir.

İsbatı. Əvvəlcə $n = 7$ və $m = 3$ halına baxaq. Əgər A hadisəsi 2-ci, 3-cü və 5-ci sınaqlar zamanı baş veribsə, onda bu sınaqların nəticəsi $\overline{A} \cap A \cap A \cap \overline{A} \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A}$ hadisəsi olacaq. Keçirilən sınaqlar bir-birindən asılı olmadığı üçün (22) düsturuna əsasən, alarıq ki, $P(\overline{A} \cap A \cap A \cap \overline{A} \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A}) =$

$$= P(\overline{A}) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = P^3 \cdot q^{7-3}.$$

Belə seriyaların sayı C_7^3 olduğu və hər iki müxtəlif seriyaların nəticələri uyuşmayan hadisələr olduğuna görə (17) düsturuna əsasən

$$P_{3,7} = C_7^3 P^3 q^{7-3}$$

olduğunu alırıq. 7 ədədini n ilə və 3 ədədini m ilə əvəz edib yuxarıdakı mühakiməni analoji qayda ilə aparmaqla (34) düsturunun doğru olduğunu alırıq.

Məsələ. Zəri 20 dəfə atdıqda 5 xalının 3 dəfə düşmə ehtimalı nəyə bərabərdir?

Həlli. Zəri bir dəfə atdıqda 5 xalının düşmə ehtimalı $\frac{1}{6}$-dir. Ona görə $p=\frac{1}{6}$ və $q=1-p=\frac{5}{6}$. Məsələnin şərtinə görə $n=20$ və $m=3$-dir. (34) düsturuna əsasən

$$P_{3;20}=C_{20}^{3}p^{3}q^{20-3}=20\cdot 19\cdot 3\cdot\frac{1}{6^{3}}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{17}=\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{18}.$$

§18. Həndəsi ehtimal.

Bir çox praktiki məsələlərin həlli ehtimal nəzəriyyəsinin elə məsələlərinin həllinə gəlir ki, onları yuxarıda şərh olunmuş sxem əsasında həll etmək olmur.

Məsələ. Mili hər hansı qayda ilə üç hissəyə bölürlər. Alınmış bu hissələrdən üçbucaq qurmaq mümkün olması ehtimalı nəyə bərabərdir?

Bu məsələnin həlli üçün (7) münasibəti ilə təyin olunan sonlu ehtimal fəzasını qurmaq mümkün olmadığı üçün yuxarıdakı şərh olunmuş sxemlə bu məsələni həll etmək mümkün olmur. Bu məsələni həll etmək üçün biz ehtimalın başqa bir tərifindən – həndəsi tərifindən istifadə edəcəyik.

Tərif. Tutaq ki, Ω müəyyən müsbət ölçülü çoxluqdur və E $(E\subset\Omega)$ onun hər hansı ölçülən alt çoxluğudur. $\frac{m(E)}{m(\Omega)}$ nisbətinə Ω çoxluğundan ixtiyari qayda ilə götürülmüş bir x elementinin E çoxluğuna daxil olmasının həndəsi ehtimalı deyilir və

$$P(E)=\frac{m(E)}{m(\Omega)} \tag{35}$$

kimi yazılır, burada $m(E)$ və $m(\Omega)$ ilə uyğun olaraq E və Ω çoxluqlarının ölçüləri işarə olunub.

Ehtimalın bu həndəsi tərifi onun klassik tərifinə oxşardır, başqa sözlə, həndəsi ehtimal üçün də aşağıdakı hökmlər doğrudur:

1) Müsbət ölçülü Ω çoxluğunun istənilən ölçülən hissəsi üçün həndəsi ehtimal mənfi deyil və 1-i aşmır. Ω çoxluğunun özü üçün bu həndəsi ehtimal 1-ə bərabərdir, yəni $P(\Omega)=1$.

2) Əgər X və Y çoxluqları Ω çoxluğunun ölçülən hissələridirsə və $X \cap Y = \varnothing$ isə, onda

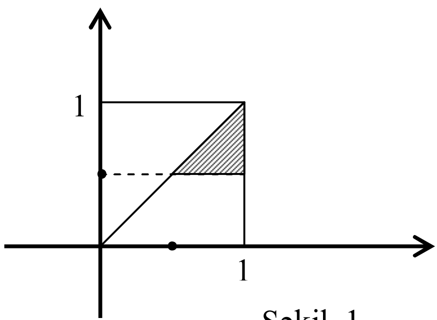
$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y).$$

Həndəsi ehtimalın bu iki xassəsindən istifadə etməklə klassik ehtimal üçün doğru olan düsturların həndəsi ehtimal üçün də doğru olduğunu asanlıqla göstərmək olar.

İndi ehtimalın bu tərifindən istifadə etməklə aşağıdakı məsələni həll edək.

Məsələ1. Uzunluğu 1 olan parçanın üzərində ixtiyari iki nöqtə qeyd edirlər. Onlar bu parçanı üç parçaya ayırır. Alınmış bu üç parçadan üçbucaq qurmaq mümkün olması necədir?

Həlli. Verilmiş parçaya ədəd oxunun $[0,1]$ parçasında ixtiyari qeyd olunmuş iki nöqtənin koordinatları x və y ədədləri olsun. Aydındır ki, $0 \le x \le 1$ və $0 \le y \le 1$. Biz (x,y) nöqtəsinə müstəvidə tərəfi 1 olan kvadratın ixtiyari qeyd olunmuş bir nöqtəsi kimi baxa bilərik.



Şəkil 1.

İndi görək koordinatları bizim məsələnin şərtlərini ödəyən nöqtələr müstəvidə hansı fiquru əmələ gətirir.

Bilirik ki, verilmiş üç parçadan üçbucaq qurmağın mümkün olması üçün zəruri və kafi şərt bu parçalardan hər hansı birinin qalan ikisinin cəmindən kiçik olmasıdır.

1) $x \le y$ olduqda bu parçaların uzunluqları x, $y-x$ və $1-y$ ədədləri olacaq. Deməli bu halda

$$x < (y-x)+(1-y),$$

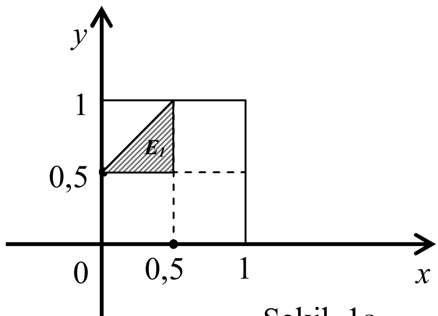
$$y-x < x+(1-y),$$

$$1-y < x+(y-x)$$

olmalıdır. Bu bərabərsizliklərdən alırıq

$$\left.\begin{array}{l} x < 0{,}5, \\ y < x+0{,}5, \\ y > 0{,}5, \\ x \le y. \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Koordinatları (35) şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğu şəkil 1 a)-da



Şəkil 1a.

ştrixlənmiş üçbucağın nöqtələri çoxluğudur; onu E_1 ilə işarə edək.

2) $y < x$ olduqda bu parçaların uzunluqları y, $x - y$ və $1 - x$ ədədləri olacaq. Deməli, bu halda

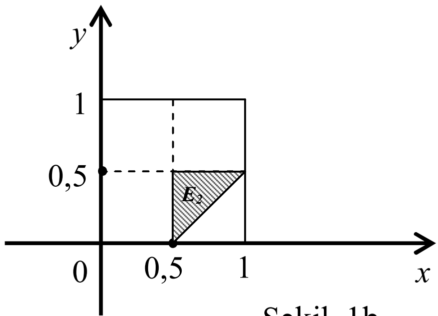
$$y < (x - y) + (1 - x),$$

$$x - y < y + (1 - x),$$

$$1 - x < y + (x - y)$$

olmalıdır. Buradan alırıq ki:

$$\left.\begin{array}{l} y < 0{,}5, \\ y > x - 0{,}5, \\ x > 0{,}5, \\ y < x. \end{array}\right\} \qquad (36)$$



Şəkil 1b.

Koordinatları (36) bərabərsizliklərini ödəyən nöqtələr şəkil 1 *b*) də ştrixlənmiş üçbucağın nöqtələridir; bu nöqtələr çoxluğunu E_2 ilə işarə edək.

$$E = E_1 \cup E_2 \qquad (37)$$

olsun.

Beləliklə, baxılan məsələnin həlli aşağıdakı məsələnin həndəsi ehtimalının tapılmasına gəlir.

Məsələ. Tutaq ki, Ω şəkil 1-də göstərilmiş tərəfi 1 olan kvadratın nöqtələri çoxluğudur, E isə (37) düsturu ilə təyin olunan nöqtələr çoxluğudur; aydındır ki, $E \subset \Omega$. Ω

çoxluğundan ixtiyari qayda ilə götürülmüş bir nöqtənin E çoxluğuna daxil olması ehtimalı neçədir?

Həlli. Məsələnin şərtindən çıxır ki, $m(\Omega)=1$ və $m(E)=0{,}25$-dir. Deməli (35) düsturuna əsasən

$$P=\frac{m(E)}{m(\Omega)}=\frac{0{,}25}{1}0{,}25.$$

Cavab: Məsələ 1-də axtarılan ehtimal $P=0{,}25$-dir.

ÇALIŞMALAR

1. m və n parametrlərinin hansı qiymətlərində $(m-3)x = n+2$ tənliyinin yeganə həlli var?
   Cavab: $m \neq 3$.
2. m və n parametrlərinin hansı qiymətlərində $(m-3)x = n+2$ tənliyinin sonsuz sayda həlli var?
   Cavab: $m = 3,\ n = -2$.
3. m və n parametrlərinin hansı qiymətlərində $(m-3)x = n+2$ tənliyinin həlli yoxdur?
   Cavab: $m = 3$ və $n \neq -2$.
4. m və n parametrlərinin hansı natural qiymətlərində
   $$\begin{cases} mx + 4y = 2 - n, \\ 2x + (n+1)y = -1 \end{cases}$$
   xətti tənliklər sisteminin sonsuz sayda həlli var?
   Cavab: $m = 2$ və $n = 3$.
5. a və c parametrlərinin hansı qiymətlərində $y = ax^2 + c \quad (a \neq 0)$ funksiyasının sıfrı yoxdur?
   Cavab: $ac > 0$.

6. m və n parametrlərinin hansı qiymətlərində
   $$\begin{cases} (m-1)x + 2y = n-1, \\ mx + y = 1 \end{cases}$$
   xətti tənliklər sisteminin sonsuz sayda həlli var?
   Cavab: $m = -1$ və $n = 3$.
7. m və n parametrlərinin hansı qiymətlərində
   $$\begin{cases} (m-1)x + 2y = n-1 \\ mx \qquad + y = 1 \end{cases}$$
   xətti tənliklər sisteminin həlli yoxdur?
   Cavab: $m = -1$ və $n \neq 3$.

8. a parametrinin hansı qiymətlərində $ax^2+4x+1=0$ tənliyinin həqiqi kökü yoxdur?
Cavab: $a>4$.

9. a parametrinin hansı qiymətlərində $ax^2+4x+1=0$ tənliyinin iki müxtəlif həqiqi kökü var?
Cavab: $a<4$.

10. a parametrinin hansı qiymətlərində $x^3+ax+2=0$ tənliyinin yalnız üç həqiqi kökü var?
Cavab: $a<-3$.

11. İlk 100 natural ədəd içərisində 2-ə, 3-ə və 5-ə bölünməyən neçə natural ədəd var?
Cavab: 26.

12. $y=5^x+2$ funksiyasının tərsini tapın.
Cavab: $y=loq_5(x-2)$.

13. $y=2\sin x-3$ funksiyasının tərsini tapın.
Cavab: $y=\arcsin\frac{x+3}{2}$.

14. $y=tgx+ctgx$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.
Cavab: $y\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

15. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x+1}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.
Cavab: $\left[\frac{1}{8};2\right]$.

16. $y=2\sin^2 x-\sin x-1$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.
Cavab: $\left[-\frac{9}{8};2\right]$.

17. $y=3^{2|x-1|+1}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.
Cavab: $[3;+\infty)$.

18. $y = 3|x-1| + 2x^2$ funksiyasının böhran nöqtələrini tapın.

Cavab: 1 və $\frac{3}{4}$.

19. p və q parametrlərinin hansı qiymətlərində $x^4 + px^2 + q = 0$ tənliyinin 4 kökü olar?

Cavab: $p < 0$ və $q > 0$.

20. a və b parametrlərinin hansı qiymətlərində $x^2 + a \cdot |x| + b = 0$ tənliyinin 4 kökü olar?

Cavab: $a < 0$ və $b > 0$.

21. $|x| - x \geq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Cavab: $x \in R$.

22. $\sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{8} - 3\sqrt{3}$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: $-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

23. $x < 0$ və $y < |y|$ olduqda $\sqrt{(x+y)^2} - 2x + y$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: $-3x$.

24. $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^4} + \sqrt[5]{\left(2-\sqrt{5}\right)^5}$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: 0.

25. $x < 0$ və $y > 0$ olduqda $\sqrt[8]{256x^8 \cdot y^8 \cdot z^4}$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: $-2xy \cdot \sqrt{|z|}$.

26. $y = f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş cüt funksiyadır, $[0,+\infty)$ çoxluğunda artır. $f(x) < f(7)$ bərabərsizliyini həll edin.

Cavab: (-7,7).

27. $y = f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş cüt funksiyadır və $[0,+\infty)$ çoxluğunda artır. $f(x) > f(7)$ bərabərsizliyini həll edin.
Cavab: $(-\infty;-7) \cup (7;+8)$.

28. $y = f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş tək funksiyadır və $(-\infty,0]$ çoxluğunda azalır. $f(x) < f(5)$ bərabərsizliyini həll edin.
Cavab: $(5,+\infty)$.

29. $y = f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş tək funksiyadır və $(-\infty,0]$ çoxluğunda azalır. $f(x) > f(-3)$ bərabərsizliyini həll edin.
Cavab: $(-\infty,-3)$.

30. $a < 0, b < 0$ olarsa, $a^2b^3 \cdot \sqrt[4]{ab}$ ifadəsində vuruğu kök işarəsi altına salın.
Cavab: $-\sqrt[4]{a^9b^{13}}$.

31. $y = x|x| + 2\sin^2 x + tgx - 1$ funksiyasının tək funksiya olan toplananı tapın:
Cavab: $x|x| + tgx$.

32. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ funksiyasının ən kiçik müsbət dövrünü tapın.
Cavab: $\frac{\pi}{2}$.

33. a və b parametrlərinin hansı qiymətlərində $y = ax^2 + bx + 3$ funksiyası cüt funksiyadır?
Cavab: $a \neq 0$ və $b = 0$.

34. a, b və c parametrlərinin hansı qiymətlərində $y = ax^2 + bx + c$ tək funksiyadır?
Cavab: $a = 0, c = 0$ və $b \neq 0$.

35. a və b parametrlərinin hansı qiymətlərində $f(x) = ax + b$ funksiyası təkdir?

Cavab: $b = 0$ və $a \in R$.

36. a və b parametrlərinin hansı qiymətlərində $f(x) = ax + b$ funksiyası cütdir?

Cavab: $a = 0$ və $b \in R$.

37. $2x^2 - 5x + 3y^2 + 7y - 17$ ifadəsinin ən kiçik qiymətini tapın.

Cavab: $-24\frac{5}{24}$.

38. $y = \sin^7(tg^2 3x)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Cavab: $\frac{42}{\cos^3 3x}\sin^6(tg^2 3x)\cdot\cos(tg^2 3x)\cdot\sin 3x$.

39. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \geq 0, \\ 3-x, & x < 0 \end{cases}$

funksiyasının böhran nöqtəsini tapın.

Cavab: $x = 0$.

40. a və b -nin hansı qiymətlərində

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3a+b, & x \geq 0 \\ 3a-x+b, & x < 0 \end{cases}$$

funksiyası $x = 0$ nöqtəsində kəsilməz olar?

Cavab: $a, b \in R$.

41. $y = |2 - \sin x|$ funksiyasının böhran nöqtələrini tapın.

Cavab: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in z$.

42. Koordinat başlanğıcından $y^2 + x^2 + 6x - 8y - 16 = 0$ çevrəsinin mərkəzinə qədər olan məsafəni tapın.

Cavab: 5.

43. $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3,\ \overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları arasındakı bucaq 120^0 olarsa, onda $|\overline{a} - \overline{b}|$ nəyə bərabərdir?

Cavab: $\sqrt{19}$.

44. $(1+i)^{24}$ ifadəsini hesablayın.

Cavab: 2^{12}.

45. Kvadrat kökləri tapın: $\sqrt{7+24i}$.

Cavab: $4+3i$ və $-4-3i$.

46. $|z+2i| = 3$ çevrəsinin mərkəzinin koordinatlarını tapın.

Cavab: (0;-2).

47. Kompleks ədədi triqonometrik şəkildə göstərin:

$z = \sin 55^0 + i\cos 125^0$.

Cavab: $\cos(-35^0) + i\sin(-35^0)$.

48. Muavr düsturundan istifadə etməklə $\cos 5\alpha$ -ı $\cos\alpha$ və $\sin\alpha$ ilə ifadə edin.

Cavab: $\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\cdot\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\cdot\sin^4\alpha =$

$= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$.

49. $x^2 - 6x + 10 = 0$ tənliyinin kompleks köklərini tapın:

Cavab: $x_1 = 3+i;\quad x_2 = 3-i$.

50. Perimetri 60 *sm* olan düzbucaqlılardan sahəsi ən böyük olan düzbucaqlının sahəsini tapın.

Cavab: 225 sm^2.

51. Tənliyi həll edin:

$x^2 + 2\sqrt{3x} + y - 4\sqrt{y} + 7 = 0$.

Cavab: $\begin{array}{l} x = -\sqrt{3}, \\ y = 4. \end{array}$

52. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$ funksiyasının ən böyük qiymətini tapın.

Cavab: $\dfrac{1}{4}$.

53. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: 1.

54. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\ldots+\sin 2n\alpha$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: $\dfrac{\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$.

55. Tənliyi həll edin:

$$\sqrt[3]{(65+x)^2}+4\sqrt[3]{(65-x)^2}-5\sqrt[3]{65^2-x^2}=0.$$

Cavab: 0 və 63.

56. İfadənin qiymətini hesablayın:

$$8\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ.$$

Cavab 1.

57. k parametrinin hansı qiymətlərində

$$x^4-13x^2+k=0$$

tənliyin 4 kökü var?

Cavab: $0<k<42.25$.

58. k parametrinin hansı qiymətlərində

$$x^4-13x^2+k=0$$

tənliyinin 2 kökü var?

Cavab: $k=42.25$ və $k<0$.

59. Tənliyi həll edin:

$$\cos(\pi\lg x)+\sin(\pi\lg x)=1.$$

Cavab: 10^{2n} və $10^{2n+\frac{1}{2}}, n\in z$.

60. a parametrinin hansı tam qiymətlərində

$$(1+a)^2=1+a\sin x$$

tənliyinin həlli var?

Cavab: $a=0;\ -1;\ -2;\ -3$.

61. Tənliyi həll edin:

$$|\sin x|+|\cos x|=\sqrt{2}.$$

Cavab: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in z$.

62. İfadənin qiymətini hesablayın:
$arcctg(tg12)$.

Cavab: $\frac{9\pi}{2}-12$.

63. Tənliyi həll edin:
$\sqrt{\cos x}+\sqrt[3]{\sin x}=1$.

Cavab: $2\pi n$, $n\in z$ və $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$.

64. Tənliyi həll edin:
$\sin 7x-\cos 2x=-2$.

Cavab: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$.

65. Tənliyi həll edin: $x^2+1+2x\cdot\sin\frac{3\pi}{2}x=0$.

Cavab: $x=\pm 1$.

66. q parametrinin hansı qiymətlərində $\frac{q\sin x+1}{\cos x-\sin x}=0$ tənliyinin həlli var?

Cavab: $|q|\geq 1$. $q=\sqrt{2}$ olsa $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in z$

$q=-\sqrt{2}$ olsa $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in z$.

67. a parametrinin hansı qiymətlərində $a\cos x+3>0$ bərabərsizliyi x-in bütün həqiqi qiymətlərində doğru-dur?
Cavab: $|a|<3$.

68. $Q(x)$ çoxhədlisini $(2x-3)$-ə böldükdə qalıqda 5, $(x+6)$-a böldükdə isə qalıqda 3 alınır. Bu çoxhədlini $(2x^2+9x-18)$-ə böldükdə qalıqda nə alınır?

Cavab: $\frac{4}{15}x+\frac{23}{5}$.

69. a və b -in hansı qiymətlərində

$$y=\begin{cases}3x+1, & x<0\\ x^3+ax+b, & x>0\end{cases}$$

funksiyası $x=0$ nöqtəsində diferensiallanandır?
Cavab: $a=3$ və $b=1$.

70. $P(x)$ çoxhədlisi $(x+1)-$ə qalıqsız bölünür, (x^2-3x)-a böləndükdə isə qalıqda $7x-1$ alınır. Bu çoxhədlinin $(x^3-2x^2-3x)-$ə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

Cavab: $2x^2+x-1$.

71. Limiti hesablayın: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|2x-1|-|3x-4|}{x^2-5x+4}$.

Cavab: $-\dfrac{5}{3}$.

72. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2007}-1}{x^{719}-1}$ limitini hesablayın.

Cavab: $\dfrac{2007}{719}$.

73. $f(x)$ çoxhədlisinin (x^2+4x-5)-ə bölünməsindən alınan qalıq $(3x+7)$-dir. $f(1)-f(-5)$ fərqini tapın.
Cavab: 18.

74. Tənliyi həll edin:

$$\cos(x^2-\sqrt{3}x+12)+\sin(x^2-\sqrt{3}x-4)=0.$$

Cavab: $x=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3\pi+4\pi n-13}}{2}$, $n\in N$.

75. $y=\dfrac{\cos 3x}{\cos(\pi/3-x)}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

Cavab: $[-1;3)$.

76. Tənliyi həll edin: $\sqrt{4\cos x - 6\sin x} = \sqrt{2 - tgx}$.

Cavab: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in z$;

$$x = \pi + arctg\frac{2}{3} + 2\pi k,\ k \in z.$$

77. $y = \cos 4x + 4\cos 2x - 4\cos x$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

Cavab: $\left[-\frac{9}{2};9\right]$.

78. İnteqralı hesablayın: $\int_{-2}^{2}\frac{\sin x}{x^2+1}dx$.

Cavab: 0.

79. İnteqralı hesablayın: $\int_{-3}^{3}\frac{x^3}{\cos^2 x + 4}dx$.

Cavab: 0.

80. k-ın hansı qiymətlərində $y = e^{kx}$ funksiyası $3y''' - 10y'' + 9y' - 2y = 0$ tənliyini ödəyir?

Cavab: $\frac{1}{3};1;2$.

81. Bərabərsizliyi həll edin:

$\sqrt[3]{5+x} - 2\sqrt[3]{5-x} > \sqrt[6]{25-x^2}$.

Cavab: (3; 5).

82. $y = \cos^2 x - \cos x - 5$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

Cavab: $[-5{,}25;-3]$.

83. m-in hansı qiymətlərində $y = e^{mx}$ funksiyası $2y''' - 5y'' + 7y' - 4y = 0$ tənliyini ödəyir?

Cavab: $m = 1$.

84. $y=\begin{cases} x^2-2, & x\geq 1 \\ x+1, & x<1 \end{cases}$ funksiyasının $x=1$ nöqtəsində sol və sağ limitlərini tapın.

Cavab: -1 və 2.

85. $\dfrac{2}{x^2-2x+7}$ kəsrinin ən böyük qiymətini tapın.

Cavab: $\dfrac{1}{3}$.

86. $y=\sin^3(tg^2 2x)$ funksiyasının törəməsini $x=\dfrac{\pi}{6}$ nöqtəsində hesablayın.

Cavab: $12\sqrt{3}\sin 6$.

87. Tənliyi həll edin: $\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$.

Cavab: $x=1$.

88. $x^2+y^2=10$ tənliyinin tam həllərinin sayını tapın.

Cavab: 8.

89. $y=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$ funksiyasının tək və cütlüyünü təyin edin.

Cavab: təkdir.

90. $x^2+y^2-2x+4y=-5$ tənliyinin tam həllərini tapın.

Cavab: (1, -2).

91. a-ın hansı qiymətində $\begin{cases} 7ax+4y=-8, \\ x+7ay=49a^2 \end{cases}$ tənliklər sisteminin həllərinin sayı 2-dən çox olar?

Cavab: $a=-\dfrac{2}{7}$.

92. Hesablayın: $arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}$.

Cavab: $\frac{\pi}{4}$.

93. $y=x|x|$ funksiyasının törəməsini tapın.

Cavab: $2|x|$.

94. İnteqralı hesablayın: $\int_{-3}^{4}(|x+2|+|x-5|)dx$.

Cavab: 50.

95. $F(x,y,z)=e^{-2x}\cdot\sin\pi y-3\sqrt{z}$ funksiyası üçün $\int\left(e^{-2x}\cdot\sin\pi y-3\sqrt{z}\right)dy$ ifadəsini hesablayın.

Cavab: $-\frac{1}{\pi}e^{-2x}\cdot\cos\pi y+c_1e^{-2x}-3\sqrt{z}\cdot y-3\sqrt{z}\cdot c_2$.

96. $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=\lg|x+1| \end{cases}$

sisteminin həllərinin sayını tapın.

Cavab: 4.

97. $f^3(x)$ və $\frac{1}{f(x)}$ funksiyalarının $x=8$ nöqtəsində törəmələri uyğun olaraq 12 və -1-ə bərabərdir. $f'(8)$-i tapın.

Cavab: 2.

98. Bərabərsizliyi həll edin:

$x^{\log_2 x}\cdot x^2<8$.

Cavab: $\left(\frac{1}{8},2\right)$.

99. Bərabərsizliyi həll edin:

$\left|x+|1-x|\right|>3$.

Cavab: $(2,+\infty)$.

100. $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$ olarsa, $x^3+3x-14$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Cavab: 0.

101. Əgər $0<x\le 4$ olarsa,

$$\frac{4\cdot\sqrt[4]{x}+x\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}+\sqrt{4+x-4\sqrt{x}}$$

ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: $4-\sqrt[4]{4x}$.

102. Əgər $0<x\le 4$ olarsa,

$\dfrac{\sqrt{4+x-4\sqrt{x}}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{x}}$ ifadəsini sadələşdirin.

Cavab: $2-\sqrt[4]{x}$.

103. * əvəzində eyni bir rəqəm yazılarsa

5*63-24*2+*09=4000

bərabərliyi doğru olar. Bu rəqəmi tapın.

Cavab: 7.

104. 40-a qədər olan sadə ədədlərin sayı neçədir?

Cavab: 7.

105. Hərbi hissədə əsgərlərin ən az sayı neçə olmalıdır ki, onları iki-iki, üç-üç, dörd-dörd cərqələrə düzmək mümkün olsun, lakin beş-beş düzdükdə biri kənarda qalsın?

Cavab: 31.

106. 2,0(6) ədədini adi kəsrə çevirin.

Cavab: $2\dfrac{2}{3}$.

107. İki nasos birlikdə hovuzu 7 saata doldurur. Birinci nasos hovuzu təklikdə $12\frac{1}{4}$ saata doldurursa, ikinci nasos neçə saata doldurar?

Cavab: $16\frac{1}{3}$.

108. Bir *ha* sahədən 70s. buğda yığılmışdır. Buğdanı üyüdərkən, ondan 90% un alınır. Çörək bişirdikdə isə 40% artım verir. 2,5 *ha* sahədən yığılan buğdadan nə qədər çörək alınar?

Cavab: 220,5.

109. Perimetri 30 *m* olan üçbucağın tərəflərinin uzunluqları 5, 7 və 8 ədədləri ilə mütənasibdir. Ən böyük tərəfin uzunluğunu tapın.

Cavab: 12.

110. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$ olarsa $(a+b+c)^3$ nəyə bərabər olar?

Cavab: $27abc$.

111. Həqiqi əmsallı kvadrat tənliyin bir kökü $x_1=i$-dir. Bu tənliyin ikinci kökünü tapın.

Cavab: i^3.

112. $\left|2x+\frac{2}{3}\right|-3\left|1-\frac{x}{3}\right|=\frac{11}{3}$ tənliyin kökünü tapın.

Cavab: 2.

113. $2x^2+x-a=0$ tənliyinin kökləri $2x_1-x_2=5$ şərtini ödəyirsə, a nəyə bərabərdir?

Cavab: 6.

114. $4x^2+7x-a=0$ tənliyinin kökləri $3x_1+4x_2=-6$ şərtini ödəyirsə, a nəyə bərabərdir?

Cavab: -3.

115. $x^2-3x+a+1=0$ tənliyinin köklərinin kvadratları cəmi 82-dir, a-nın qiymətini tapın.

Cavab: -8.

116. $2x^2+ax-7=0$ tənliyinin kökləri fərqi 4,5-dir, a-ı tapın.
Cavab: ± 5.

117. $x^2-a(x-1)+2=0$ tənliyinin köklərindən biri o birinin kvadratına bərabərdir. a-nın qiymətini tapın.
Cavab: 6.

118. $x^2-(a+1)x-2(a+1)=0$ tənliyinin köklərindən biri 2-dir. İkinci kökü tapın.
Cavab: -3/4.

119. $\dfrac{11x-b}{6x-11}=x^4$ tənliyinin köklərinin hasilini tapın.
Cavab: 1.

120. 1957-ci ildə yaşı anadan olduğu ilin rəqəmlərinin cəminə bərabər olan adamın 1992-ci ildə neçə yaşı olar?
Cavab: 55.

121. $x^2-4y^2=5$ tənliyinin tam həllərini tapın.
Cavab: (3;1), (3;-1), (-3;1), (-3;-1).

122. $x^4-9x^3+x^2+81x+70$ çoxhədlisinin x^2-4x-5 çoxhədlisinə bölünməsindən alınan qisməti tapın.
Cavab: $x^2-5x-14$.

123. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-3xy=4, \\ 2x^2+3y^2=14. \end{cases}.$$

Cavab: $(1;2)$, $(-1;-2)$, $\left(\dfrac{8\sqrt{58}}{29};\dfrac{5\sqrt{58}}{29}\right)$ və

$$\left(-\frac{8\sqrt{58}}{29};-\frac{5\sqrt{58}}{29}\right).$$

124. $|x-1|+|x+1|=2$ tənliyini həll edin.
Cavab: $-1\le x\le 1$.

125. $log_2(2^x-7)=3-x$ tənliyini həll edin.

Cavab: 3.

126. $f(x)=x^3\ln x$ olarsa $f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=0$ tənliyini həll edin.

Cavab: e^{-1}.

127. $lq(3{,}5+x)=lq2-lqx$ tənliyini həll edin.

Cavab: 0,5.

128. $log_3 2+log_3 x=log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Cavab: $\frac{1}{12}$.

129. $\begin{cases} log_2 x+log_2 y=4, \\ 2(x-2y)=y^3 \end{cases}$

sisteminin həlli üçün xy hasilini tapın.

130. $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^y=1152, \\ log_{\sqrt{5}}(x+y)=2 \end{cases}$

sisteminin həli üçün xy hasilini tapın.

Cavab: -14.

131. $\begin{cases} log_x y+log_y x=\frac{5}{2} \\ xy=27 \end{cases}$ sisteminin həlli üçün $x+y$ cəmini tapın.

Cavab: 12.

132 x-in $log_{0,5}\geq 2$ bərabərsizliyinin ən böyük həllini tapın.

Cavab: 0,25.

133. $y=x^2-6x+4$ parabolasının təpə nöqtəsinin ordinatını tapın.

Cavab: -5.

134. Düzbucaqlının tərəflərinin uzunluğu ədədi qiymətcə $2x^2 - 13x + 20$ tənliyinin köklərinə bərabərdir. Düzbucaqlının sahəsi neçədir?
Cavab: 10.

135. Tərəflərinin nisbəti $1:2:\sqrt{3}$ kimi olan düzbucaqlı üçbucağın kiçik bucağını tapın.
Cavab: 30^0.

136. $(1+\sin 60^0)tg15^0$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.
Cavab: 0,5.

137. $\sin 65^0 - \sin 55^0 - \sin 5^0$ ifadəsini hesablayın.
Cavab: 0.

138. $\dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} \cdot \sqrt{3}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.
Cavab: 3.

139. $\arccos(x-1) = 2\arccos x$ tənliyini həll edin.
Cavab: $0; \dfrac{1}{2}$.

140. Bərabərsizliyi həll edin $\sqrt{x+2} < x$.
Cavab: $x \in (2, \infty)$.

141. Bərabərsizliyi həll edin: $\sqrt{3x+1} < \sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}$.
Cavab: (1, 2).

142. Bərabərsizliyi həll edin: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} \le 3$.
Cavab: $[-1,0]$.

143. Tənliyi həll edin: $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.
Cavab: 2.

144. Tənliyi həll edin: $5^{2+4+6+...+2x} = 25^{28}$.
Cavab: 7.

145. $loq(x^2 + 21) - 1 = lqx \quad (x > 0)$ tənliyinin köklərinin fərqinin mütləq qiymətini tapın.
Cavab: 4.

146. $\dfrac{1}{5-lqx}+\dfrac{2}{1+lqx}=1$ tənliyinin köklərinin hasilini tapın.

Cavab: 10^5.

147. $f(x)=\dfrac{x+2}{3-x}-2$ funksiyası arqumentin hansı qiymətlərində müsbətdir?

Cavab: $\dfrac{4}{3}<x<3$.

148. $f(x)=\dfrac{2x-5}{9-3x}$ funksiyası arqumentin hansı qiymətlərində mənfidir?

Cavab: $(-\infty;2{,}5)\cup(3,+\infty)$.

149. Tənliyi həll edin: $x^2-\sqrt{x^2-4}=6$.

Cavab: $x=\pm 2\sqrt{2}$.

150. Tənliyi həll edin: $\sqrt[4]{3+x}+\sqrt[4]{14-x}=3$.

Cavab: $x_1=-2;\ x_2=13$.

151. $\sqrt{x+12}-\sqrt{x+5}=1$ tənliyini həll edin.

Cavab: 4.

152. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+12x+36}=13$ tənliyini həll edin.

Cavab: $x_1=-10;\ x_2=3$.

153. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$ tənliyini həll edin.

Cavab: $x_1=4;\ x_2=-5$.

154. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-11}$ tənliyini həll edin.

Cavab: $x=5$.

155. Tənliyi həll edin: $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$.

Cavab: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{8},\ \ x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$.

156. Bir kökü $x_1=5-2i$ olan həqiqi əmsallı kvadrat tənlik necədir?

Cavab: $x^2-10x+29=0$.

157. Kökləri $x_1 = 1 - i,\ x_2 = -2$ olan həqiqi əmsallı kvadrat tənlik necədir?

Cavab: Belə əmsallı kvadrat tənlik yoxdur.

158. Bir kökü $x_1 = 5 - 2i$ olan həqiqi əmsalı kvadrat tənlik necədir?

Cavab: $x^2 - 10x + 29 = 0$.

159. m və n-in elə bir tam qiymətləri varmı ki,

$x^2 + mx + n = 0$ tənliyinin bir kökü $x_1 = \frac{1}{3}$ olsun?

Cavab: yox.

160. m və n-in elə bir tam qiymətləri varmı ki,

$mx^2 + nx + 7 = 0$ tənliyinin bir kökü $x_1 = \frac{2}{3}$ olsun?

Cavab: yox.

161. $|5 - x| = 2x + 1$ tənliyini həll edin.

Cavab: $x = \frac{4}{3}$.

162. $(x-1)(x-3)(x+2)(x+6) = 72x^2$ tənliyinin köklərinin cəmini tapın.

ƏDƏBİYYAT

1. Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. М., «Высшая школа», 1965 г.
2. Проскуряков И.В. Энциклопедия элементарной математики. Кн.I.М.-Л.Изд-во Акад.пед.наук, 1948г.
3. Маркушевич А.И. Действительные числа и основные принципы теории пределов. М.-Л. Изд-во Акад.пед.наук, 1948 г.
4. Соминский И.С. Метод математической индукции. М., Физматгиз, 1961 г.
5. N.Sadıxov. Riyaziyyatın ibtidai kursunun elmi əsasları. «Maarif», 1991.
6. Адамар. Элементарная геометрия. М., 1953 г.
7. Новоселов С.И. Специальный курс тригонометрии. Советская наука. М., 1957 г.
8. А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. Москва, 1975 г.
9. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунун М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. Изд-во «Наука», Москва, 1969 г.
10. Виленкин Н.Я. Комбинаторика, Изд-во «Наука», Москва, 1974 г.
11. Namazov Q.K., Muradov R.İ. Cəbr və analizin başlanğıcı kursunun bəzi məsələləri. ADU, Bakı-1987.
12. Vəliyev B. Ehtimal nədir. Bakı, 1967.
13. Vəliyev B. Orta məktəbin riyaziyyat kursunda triqonometrik tənliklərin həlli metodikası. 1989.
14. Əliyev İ.F. Məktəb riyaziyyat kursunun semiotikası. Bakı, 1991.
15. Qasımov E.A. Ümumtəhsil məktəblərində bəzi mövzuların tədrisi. Bakı, 1995.
16. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. ГИТТЛ, Москва, 1957 г., 552 с.
17. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. Гостехиздат, Москва, 1948 г.
18. Хаусдорф Ф. Теория множеств. ОНТИ, Москва,1937 г.

M Ü N D Ə R İ C A T