V FƏSİL

MƏKTƏB RIYAZIYYATININ CƏBRI ƏSASLARI.

§1. Cəbri əməl və onun tərsi.

Məktəb riyaziyyat kursundan bilirik ki, verilmiş iki ədəd üzərində müxtəlif hesab əməlləri $(+,-,\times,/)$ apardıqda nəticədə yeni – üçüncü bir ədəd alınır. Məsələn, 5 və 7 natural ədədlərini topladıqda 12, vurduqda isə 35 ədədini alırıq. Bu ədədlərin cəmi və hasili naturaldır. Lakin $5-7=-2$ və $5/7$ əməllərinin nəticəsində aldığımız ədədlər natural ədədlər çoxluğuna daxil deyil. Deməli, çıxma və bölmə əməlləri natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmayıb. Deməli, iki ədəd üzərində əməl apardıqdan sonra nəticədə aldığımız ədəd həmin ədədlərin daxil olduğu çoxluğa daxil ola da bilər, olmaya da.

Tərif. Tutaq ki, F ixtiyari çoxluqdur. F çoxluğunun müəyyən nizamla götürülmüş ixtiyari iki a və b elementinə F çoxluğunda birqiymətli təyin olunmuş üçüncü c elementini qarşı qoyan münasibətə F çoxluğunda cəbri əməl deyilir. Cəbri əməli şərti olaraq $\otimes$ ilə işarə etsək, onda $a\otimes b=c$ yazmaq olar.

Əgər ρ münasibəti F çoxluğunda təyin olunmuş cəbri əməldirsə, onda ixtiyari $(x,y)\in F\times F$ cütü üçün elə yeganə $z\in F$ vardır ki, $\rho:(x,y)\to z$ və z olur.

Əgər verilmiş çoxluqdan götürülmüş istənilən iki ədəd üzərində aparılmış əməlin nəticəsi həmin çoxluğa daxil olarsa, onda həmin əməl verilmiş çoxluqda cəbri əməl adlanır. Məsələn: Natural ədədlər çoxluğunda toplama, vurma və qüvvətə yüksəltmə əməlləri cəbri əməldir, lakin çıxma və bölmə əməlləri cəbri əməl deyil.

Doğrudan da ixtiyari $a,b\in N$ olduqda $a+b=z\in N$ və $a\cdot b=z\in N$ və ya $(a,b)\in N\times N$ olur. Lakin çıxma və bölmədə alınan nəticə həmişə bu çoxluğa daxil deyil, ona görə də N çoxluğunda çıxma və bölmə cəbri əməl deyil.

Cəbri əməlin tərifindən göründüyü kimi:

1) Cəbri əməlin mahiyyətini qarşı qoyma qaydası təşkil edir;
2) Bu qarşı qoyma qaydası birqiymətlidir, yəni F çoxluğunun ixtiyari iki a və b elementinə həmin çoxluğun yeganə c elementi qarşı qoyulur;
3) Cəbri əməli F çoxluğunun ixtiyari iki a və b elementi üzərində aparmaq mümkün olmalıdır və bu cəbri əməl nəticəsində alınan üçüncü yeganə element hökmən F çoxluğuna daxil olmalıdır;
4) Cəbri əməlin nəticəsi bu əməlin aparıldığı a və b elementlərinin hansı nizamla götürülməsindən asılıdır.

Əgər cəbri əməl çoxluğun iki a və b elementinə aiddirsə, onu adətən "Binar cəbri əməl" adlandırırlar.

Aşağıdakı təkliflər doğrudur:

1. Tam ədədlər çoxluğunda toplama və vurma əməlləri təyin edilmişdir. Doğrudan da $\forall a,b \in Z$ üçün $a+b \in Z$ və $a \cdot b \in Z$ -dir.
2. Tam ədədlər çoxluğunda bölmə cəbri əməli təyin edilməmişdir. Çünki bu çoxluqda sıfra bölmək mümükün deyil və iki ədədin nisbəti heç də həmişə tam ədəd olmayır.
3. İrrasional ədədlər çoxluğunda vurma əməli təyin olunmayıb. Ona görə ki, iki irrasional ədədin hasili həmişə irrasional olmaya da bilər. Məsələn: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$.

Tərif. $F \neq \varnothing$ çoxluğunda təyin olunmuş $\otimes$ cəbri əməli üçün

$$f \otimes q = q \otimes f \qquad \forall f, q \in F$$

olarsa, onda $\otimes$ kommutativ cəbri əməl adlanır.

Tərif. $F \neq \varnothing$ çoxluğunda təyin olunmuş $\otimes$ cəbri əməli üçün

$$(f \otimes q) \otimes p = f \otimes (q \otimes p) \qquad \forall f, q, p \in F$$

olarsa, onda $\otimes$ assosiativ cəbri əməl adlanır.

Natural ədədlər çoxluğunda toplama və vurma əməlləri kommutativdir.

Tərif. F çoxluğunda təyin olunmuş $\otimes$ cəbri əməli üçün əgər elə $e \in F$ elementi varsa ki, ixtiyari $f \in F$ elementi üçün $e \otimes f = f (f \otimes e = f)$-dir, onda e elementinə $\otimes$ əməlinə nəzərən sol (sağ) neytral element deyilir. Əgər e elementi eyni zamanda həm sol, həm də sağ neytral element olarsa, onda e elementinə $\otimes$ cəbri əməlinə nəzərən ikitərəfli neytral element deyilir. Məsələn: Bütün tam ədədlər çoxluğunda sıfır ədədi toplama əməlinə nəzərən ikitərəfli neytral elementdir.

Natural ədədlər çoxluğunda toplama əməli üçün neytral element yoxdur. Lakin bu çoxluqda vurma əməli üçün vahid iki tərəfli neytral elementdir.

Boş olmayan F çoxluğunun bütün altçoxluqları çoxluğunda birləşmə əməlinə nəzərən $\varnothing$, kəsişmə əməlinə nəzərən isə F-in özü neytral elementdir:

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Asanlıqla isbat etmək olar ki, çoxluğun neytral elementi varsa, o yeganədir.

Tərif. Əgər boş olmayan F çoxluğunda təyin olunmuş $\otimes$ əməli üçün e neytral elementi varsa və $f \in F$ üçün $\exists f' \in F$ varsa ki, $f \otimes f' = f' \otimes f = e$ olur, onda f'-ə f-in bu cəbri əmələ nəzərən simmetrik elementi deyilir. Məsələn: Z tam ədədlər çoxluğunda toplama əməlinə nəzərən z ədədi və $-z$ ədədi simmetrik elementdir. Hər bir neytral element müəyyən əmələ görə özü-özünə simmetrik ola bilər. Məsələn: sıfır ədədi toplama əməlinə nəzərən, vahid isə vurma əməlinə nəzərən öz-özünə simmetrikdir.

Tərif. Fərz edək ki, F çoxluğunda $\otimes$ cəbri əməli təyin olunmuşdur. Əgər F çoxluğundan olan ixtiyari f və q

elementləri üçün bu çoxluqdan olan elə yeganə x və elə yeganə y elementləri varsa ki, $x \otimes f = q$ və $f \otimes y = q$ olur, onda $\otimes$ cəbri əməlinin tərsi vardır deyirlər.

§2. Qrup və altqrup anlayışı.

Tərif. Boş olmayan F çoxluğunda aşağıdakı şərtlər ödənərsə:

1) F çoxluğunda $\otimes$ cəbri əməli təyin olunub, yəni
$$\forall f, q \in F \text{ üçün } f \otimes q = p, p \in F;$$
(başqa sözlə, F çoxluğu $\otimes$ cəbri əməlinə nəzərən cəbri qapalıdır);
2) $\otimes$ cəbri əməli üçün assosiativlik qanunu doğrudur, yəni
$$f \otimes (q \otimes p) = (f \otimes q) \otimes p \quad \forall f, q, p \in F;$$
3) F çoxluğunda vahid element var, yəni
$\forall f \in F$ üçün $\exists e \in F$ var ki, $e \otimes f = f \otimes e = f$;
4) $\otimes$ cəbri əməli üçün F çoxluğunda hər bir elementinin tərsi var, belə ki,
$\forall f, q \in F$ üçün $\exists! f^{-1} \in F$ var *ki*, $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$;
$\forall f, q \in F$ üçün $\exists!(-f) \in F$ var*ki*, $f + (-f) = (-f) + f = 0$.

Onda deyirlər ki, F çoxluğu $\otimes$ cəbri əməlinə nəzərən qrup təşkil edir. əgər F $\otimes$ cəbri əməlinə nəzərən qrup təşkil edirsə, onda bunu $< F, \otimes >$ kimi işarə edirlər.

Qrupun elementləri sayı sonlu və sonsuz olarsa, uyğun olaraq qrupu sonlu və sonsuz qrup adlandırılır.

Qrupa aid misallara baxaq: Tam ədədlər çoxluğu toplama əməlinə nəzərən qrupdur: $< Z, +, 0 >$ strukturası toplama əməlinə nəzərən qrupun tərifindəki aksiomların hamısını ödəyir, yəni:

1) Tam ədədlərin cəmi yenə tam ədəddir, yəni
$$f, q \in Z \quad \text{üçün } f + q \in Z \quad ;$$
2) Toplamada assosiativlik qanunu doğrudur, yəni:
$$f, q \in Z \text{ üçün } \quad (f + q) + p = f + (q + p);$$

3) Bu çoxluqda sıfır elementi var, yəni

$$f + 0 = 0 + f = f;$$

4) Çoxluğun hər bir f – elementinin $f' = f$ təpsi (əksi) var, yəni

$$f + f' = f' + f = 0; \quad f' = -f.$$

Bu xassələrdən əlavə, $f + q = q + f$ şərti də ödəndiyi üçün qrup kommutativdir.

$Q^* = Q \setminus \{0\}$ çoxluğuna baxaq (Q - rasional ədədlər çoxluğudu):

1) $\forall f, q \in Q$ üçün $f \cdot q \in Q$;
2) $\forall f, q, p \in Q$ üçün $(f \cdot q) \cdot p = f \cdot (q \cdot p)$:
3) $\forall f \in Q$ üçün $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$ (vahid element var);
4) hər bir $f \neq 0$ üçün $f \cdot f' = f' \cdot f = 1$ (yəni tərs element var).

$f \cdot q = q \cdot f$ olduğundan bu qrup da kommutativ qrupdur.

Sonlu F çoxluğunun elementləri sayına onun tərtibi deyilir. Qrupda elementlərin sayı $Card\, F, |F|, (F, e)$ kimi işarə edilir.

Tərif. Tutaq ki, F çoxluğu $\otimes$ cəbri əməlinə nəzərən qrup təşkil edir və F çoxluğunun altçoxluğu olan F' çoxluğu da həmin $\otimes$ cəbri əməlinə nəzərən qrup təşkil edir. Onda F' qrupuna F qrupunun altqrupu deyilir.

Teorem. $< F, \otimes >$ qrupunun F' altçoxluğunun altqrup olması üçün

1) $\forall f, q \in F'$ üçün $f \otimes q \in F'$,

2) $f \in F'$ üçün $f^{-1} \in F'$ ($f \in F$ üçün $-f \in F$)

şərtlərinin ödənməsi həm zəruri, həm də kafidir.

Qeyd. Teoremi $< F, \cdot >$ qrupu üçün isbat edək.

Şərtin zəruriliyi. Tutaq ki, F' altçoxluğu $< F, \cdot >$ qrupunun altqrupudur. Onda altqrupun tərifinə əsasən F' çoxluğu qrupun tərifindəki bütün şərtləri, o cümlədən də, $\forall f, q \in F'$ üçün $f \cdot q \in F'$ və $f \in F'$ üçün $f \cdot f' = f' \cdot f = e$

şərtini ödəyən f^{-1} tərs elementinin varlığı şərtini də ödəməlidir.

Şərtin kafiliyi. $\forall f, q \in F'$ üçün $f \cdot q \in F'$ şərtinin ödənməsi F' altçoxluğunda vurma əməlinin təyin olunduğunu göstərir. Onda $\forall f, q, p \in F'$ üçün assosiativlik xassəsi ödənir, yəni $(f \cdot q) \cdot p = f \cdot (q \cdot p)$ olar. F' - in ixtiyari elementinin tərsinin varlığı da buradan aydındır. Beləliklə, F' - çoxluğunda F-də təyin edilən əmələ nəzərən qrupun bütün aksiomları ödənilir. Beləliklə, teorem isbat olundu.

$F \neq F'$ halında F' - məxsusi altqrup adlanır və $F' < F$ kimi işarə edilir.

Teorem. F qrupunun F_1 və F_2 altqruplarının $F_1 \cap F_2$ kəsişməsi F-in altqrupudur.

Isbatı. Doğrudan da, $F_1 \cap F_2$ kəsişməsinin hər hansı f_1, f_2 elementləri üçün

$$(f_1, f_2 \in F_1 \cap F_2) \Rightarrow [f_1 \in F_1, f_2 \in F_1\ ;\ f_1 \in F_2, f_2 \in F_2]$$

$$(f_1 f_2 \in F_1,\ f_1 f_2 \in F_2)$$

və F_1 və F_2 altqrup olduqları üçün

$$((F_1 \subset F, F_2 \subset F) f_1 f_2 \in F_1, f_1 f_2 \in F_2)\ f_1^{-1} \in F_1, f_2^{-1} \in F_2 .$$

Zəruri və kafi şərtə görə $F_1 \cap F_2$ kəsişməsi altqrup olur.

Teorem isbat olundu.

§3. Halqa.

Tərif. Aşağıdakı şərtləri ödəyən F çoxluğuna halqa deyilir.

Boş olmayan F çoxluğunda:

1) F çoxluğunda toplama və vurma əməlləri təyin olunub:
$f, q \in F$ üçün $f + q \in F, f \cdot q \in F$;
2) $\forall f, q \in F$ üçün $f + q = q + f$
(toplamada kommutativlik);

3) $\forall f, q, p \in F$ üçün $(f+q)+p=f+(q+p)$, $(f\cdot q)\cdot p=f\cdot(q\cdot p)$ (toplama və vurmada assosiativlik);
4) $\forall f \in F$ üçün $\exists \theta \in F \wedge \exists f' \in F$ var ki, $f+\theta=f$ (sıfır elementin varlığı); $f+f'=f'+f=\theta, f'=-f$ (əks elementin varlığı);
5) $\forall f, q, p \in F$ üçün $f(q+p)=f\cdot q+f\cdot p$,
$(q+p)\cdot f=q\cdot f+p\cdot f$
(distributivlik) şərtləri ödənilir.

Bu şərtlərdən əlavə $f\cdot g=g\cdot f$ (vurmada kommutativlik) ödənərsə, bu halda halqa kommutativ halqa adlanır. Tərifdən göründüyü kimi, halqada sıfır və əks elementlərin olması məcburi şərt olduğu halda, vahid elementin olması xüsusi qeyd olunmur, yəni halqada vahid element olmaya da bilər; əgər burada vahid element olarsa, yəni $\forall f \in F, \exists e \in F$ üçün $fe=ef=f$ şərtini ödəyən e vahid elementi olarsa, onda F-vahidi olan halqa adlanır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, halqanın sıfır elementi və hər bir elementinin əksi yeganədir. Aydındır ki, əgər halqada vahid element varsa, o da yeganədir.

Toplama və vurma əməllərinə nəzərən halqa əmələ gətirən cəbri strukturanı $<F, +, \cdot>$ kimi işarə edirlər. $<F, +, \cdot>$ halqası üçün $<F, +>$ bu halqanın additiv qrupu, $<F, \cdot>$- isə halqanın multiplikativ yarımqrupu adlanır.

Halqanın istənilən f elementi üçün $f^2=\theta$ bərabərliyi və ixtiyari f, q, p elementləri üçün Yakobi eyniliyi adlanan

$$a(bc)+b(ca)+c(ab)=0$$

ödənirsə, belə halqaya ***Li*** halqası deyilir.

Halqaya aid misallara baxaq:

1. Cüt ədədlər çoxluğu toplama və vurmaya nəzərən halqa təşkil edir. Bu halqa assosiativ və kommutativ halqadır. Bu halqanın vahid elementi yoxdur.

2. Natural ədədlər çoxluğu halqa təşkil etmir, çünki xassə - 4 ödənilməyir.
3. Z tam ədədlər çoxluğu kommutativ halqa təşkil edir.

Teorem 3. F-in boş olmayan F' altqrupunun althalqa olması üçün

$$\left((f,q)\in F'\right)\Rightarrow\left(f+q\in F', f\cdot q\in F'\right)$$

şərtinin ödənilməsi həm zəruri, həm də kafidir.

Tərif. Sıfırdan fərqli heç olmazsa bir f elementi olan F halqasında ixtiyari $q\in F$ üçün $\frac{q}{f}$ nisbəti yeganə olaraq təyin edilərsə, F - ə meydan deyilir.

Tərifdən aydındır ki, F meydanında "+", "-", "·" , bölən sıfırdan fərqli olduqda isə həm də bölmə əməli təyin edilir. Aşkardır ki, rasional və həqiqi ədədlər çoxluğu meydan əmələ gətirir.

§4. Natural ədələr çoxluğunda bölmə əməli və onun xassələri.

Onluq say sistemində hər bir natural $p=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}$ ədədi

$$P=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0 \qquad (1)$$

şəklində göstərilə bilər, burada $n\in Z_+$, $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ isə onluq rəqəmlərdir.

Əvvəlcə qeyd edək ki,

a) sıfır istənilən natural ədədə bölünür;

b) istənilən natural ədəd vahidə bölünür.

Teorem 4 (2-yə bölünmə əlaməti). Natural $P=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0}$ ədədinin 2-yə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt, bu ədədin axırıncı rəqəmi olan a_0-ın 2-yə bölünməsidir.

Isbatı. a) Şərt kafidir. Fərz edək ki, a_0 ədədi 2-yə bölünür, onda isbat edək ki, p ədədi 2-yə bölünür. p - ədədini iki toplananın cəmi şəklində yazaq:

$$P = \alpha + \beta,$$

burada

$$\begin{aligned} &\alpha = \left(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10 + a_1\right) \cdot 10, \\ &\beta = \alpha_0 \end{aligned} \tag{4}$$

(4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki toplananların hər ikisi 2-yə bölünür, deməli, bütün cəm 2-yə bölünür. Bu isə o deməkdir ki, p - ədədi 2-yə bölünür.

b) Şərt zəruridir. Fərz edək ki, p ədədi 2-yə bölünür. a_0 ədədini belə təyin edə bilərik:

$$a_0 = P - \left(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1\right) \cdot 10 . \tag{5}$$

(5) bərabərliyinin sağ tərəfindəki fərqin hər bir həddi 2-yə bölünür, deməli, bütün fərq 2-yə bölünür, yəni a_0 ədədi də 2-yə bölünür. Teorem isbat olundu.

Teorem 5 (4-ə bölünmə əlaməti). Natural $P = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ ədədinin 4-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt, $\overline{a_1 a_0}$ ədədinin 4-ə bölünməsidir.

İsbatı. a) Şərt kafidir. Fərz edək ki, $\overline{a_1 a_0}$ ikirəqəmli ədədi 4-ə bölünür. p ədədini aşağıdakı kimi yazaq:

$$P = \alpha_1 + \beta_1,$$

burada

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \left(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2\right) \cdot 10^2. \\ &\beta_1 = \overline{a_1 a_0} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

(6) bərabərliyinin sağ tərəfindəki toplananların hər ikisi 4-ə bölünür, deməli, bütün cəmdə 4-ə bölünür. Bu isə o deməkdir ki, p - ədədi 4-ə bölünür.

b) Şərt zəruridir. Fərz edək ki, p - ədədi 4-ə bölünür. (6) bərabərliyindən yaza bilərik:

$$\overline{a_1 a_0} = P - \left(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2\right) \cdot 10^2 \quad (7)$$

(7) bərabərliyinin sağ tərəfindəki fərqin hər bir həddi 4-ə bölünür, deməli, bütövlükdə fərqdə 4-ə bölünür, yəni $\overline{a_1 a_0}$ ədədi 4-ə bölünür. Teorem isbat olundu.

Məsələn, 1532 ədədi 4-ə bölünür, çünki 32 ədədi 4-ə bölünür; 25326 ədədi isə 4-ə bölünməyir, çünki 26 ədədi 4-ə bölünmür.

Teorem 6 (5-ə bölünmə əlaməti). Natural $P = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ ədədinin 5-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt, p ədədinin sonuncu rəqəmi olan a_0-ın 5 və ya 0 olmasıdır.

Isbatı. a) Şərt kafidir. Fərz edək ki, a_0 ədədi 5 və ya 0 rəqəmlərindən biridir. İsbat edək ki, p - ədədi 5-ə bölünür. p ədədini aşağıdakı kimi yazaq:

$$P = \left(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10 + a_1\right) \cdot 10 \qquad (8)$$

(8) bərabərliyinin sağ tərəfindəki toplananların hər biri 5-ə bölünür, deməli, bütün cəmdə 5-ə bölünür, yəni p - ədədi 5-ə bölünür.

b) Şərt zəruridir. Fərz edək ki, p ədədi 5-ə bölünür, onda göstərək ki, a_0 ədədi 5-ə bölünür. a_0 ədədini belə yaza bilərik:

$$a_0 = P - \left(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1\right) \cdot 10 .$$

Axırıncı bərabərliyin sağ tərəfindəki fərqin hər bir həddi 5-ə bölünür, deməli, bütövlükdə fərq, yəni a_0 ədədi 5-ə bölünür. Teorem isbat olundu.

Məsələn, 1320, 1725 ədədləri 5-ə bölünür, 2783, 1394 ədədləri isə 5-ə bölünməyir.

Teorem 7 (3-ə və 9-a bölünmə əlamələri). Natural $P=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ ədədinin 3-ə (9-a) bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt, verilmiş ədədin bütün rəqəmləri cəminin 3-ə (9-a) bölünməsidir.

Isbatı. a) Şərt kafidir. Fərz edək ki, verilmiş ədədin rəqəmlərinin cəmi 3-ə (9-a) bölünür. P ədədini aşağıdakı kimi yazaq:

$$P=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_2\cdot 10^2+a\cdot 10+a_0$$

Asanlıqla görmək olar ki, belə bir bərabərlik doğrudur:

$$10^k=\underbrace{\overline{99...999}}_{k-sayda}+1$$

bu bərabərlikdən istifadə edərək, P ədədini aşağıdakı kimi yazaq:

$$P=\gamma+\lambda,$$

burada

$$\gamma=\left(a_n\cdot\underbrace{\overline{99...9}}_{n-sayda}+a_{n-1}\cdot\underbrace{\overline{99...9}}_{(n-1)-sayda}+...+a_2\cdot\overline{99}+a_1\cdot 9\right),$$

$$\lambda=a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0. \tag{9}$$

Göründüyü kimi (9) bərabərliyinin sağ tərəfindəki toplananların hər biri 3-ə (9-a) bölünür, deməli, bütün cəm, yəni P ədədi 3-ə (9-a) bölünür.

b) Şərt zəruridir. Fərz edək ki, P ədədi 3-ə (9-a) bölünür. Onda isbat edək ki, P ədədinin rəqəmlərinin cəmi 3-ə (9-a) bölünür. (9) bərabərliyindən rəqəmlərin cəmini aşağıdakı şəkildə tapa bilərik:

$$(a_0+a_1+...+a_n)=P-(a_n\cdot\underbrace{\overline{99...9}}_{n-sayda}+a_{n-1}\cdot\underbrace{\overline{99...9}}_{(n-1)-sayda}+$$

$$+...+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9).$$

Axırıncı bərabəliyin sağ tərəfindəki fərqin hər bir həddi 3-ə (9-a) bölünür, deməli, bütün fərq, yəni $(a_0+a_1+...+a_n)$ ədədi 3-ə (9-a) bölünür. Teorem isbat olundu.

Məsələn, 2376 ədədi 3-ə (9-a) bölünür, çünki 2+3+7+6=18, lakin 3275 ədədi 3-ə (9-a) bölünməyir, çünki 3+2+7+5=17 və 17 ədədi isə 3-ə (9-a) bölünməyir.

Daha bir neçə bölünmə əlamətlərini də isbatsız verək.

8-ə bölünmə əlaməti. Axırıncı üç rəqəmi sıfırlarsa və ya axırıncı üç rəqəmin əmələ gətirdiyi ədəd 8-ə bölünürsə, onda belə ədədlər 8-ə bölünür və tərsinə. Məsələn, 120000 ədədi 8-ə bölünür, belə ki, onun sonunda üç sıfır vardır; 111120 ədədi 8-ə bölünür, çünki onun axırıncı üç rəqəminin əmələ gətirdiyi ədəd 120-dir və o, 8-ə bölünür; 170003 ədədi 8-ə bölünməyir, çünki onun axırıncı üç rəqəminin əmələ gətirdiyi 3 ədədi 8-ə bölünməyir.

11-ə bölünmə əlaməti. 11-ə yalnız elə ədədlər bölünür ki, onun yazılışında tək yerdə duran rəqəmlərin cəmi cüt yerdə duran rəqəmlərin cəminə bərabər olsun, ya da ondan 11-ə bölünən ədəd qədər fərqlənsin. Məsələn, 103785 ədədi 11-ə bölünür, çünki tək yerlərdə duran rəqəmlərin cəmi 1+3+8=12, cüt yerdə duran rəqəmlərinin cəminə, (0+7+5=12), bərabərdir; 9163627 ədədi 11-ə bölünür, çünki tək yerlərdə duran rəqəmlərin cəmi, 9+6+6+7=28, cüt yerlərdə duran rəqəmlərin cəmi 1+3+2=6, 28 və 6 ədədlərinin fərqi isə 22-dir və bu ədəd 11-ə bölünür; 461025 ədədi isə 11-ə bölünməyir, çünki 4+1+2=7 və 6+0+5=11 ədədləri bir-birinə bərabər deyil, onların fərqi 11-7=4 isə 11-ə bölünməyir.

25-ə bəlünmə əlaməti. Axırıncı iki rəqəmi sıfırlar olarsa və ya həmin rəqəmlərin əmələ gətirdiyi ədəd 25-ə bölünərsə, onda belə ədədlər 25-ə bölünür (yəni 00, 25, 50 və ya 75 ilə qurtaran ədədlər). Başqa ədədlər 25-ə bölünməyir. Məsələn, 9150 ədədi 25-ə bölünür, çünki bu ədəd 50 ilə qurtarır; 5835 ədədi 25-ə bölünməyir.

10, 100, 1000-ə bölünmə əlamətləri. 10-a yalnız axırıncı rəqəmi sıfır olan ədədlər bölünür, 100-ə yalnız axırıncı iki rəqəmi sıfırlar olan, 1000-ə yalnız axırıncı üç rəqəmi sıfırlar olan və ümumiyyətlə, 10^n-ə axırıncı n rəqəmi sıfırlar olan ədədlər bölünür.

§5. Bölünmə haqqında Paskal əlaməti və onun nəticələri.

Fransız alimi B.Paskal (1623-1662) riyaziyyat və fizika sahələrində bir sıra yeniliklər kəşf etmişdir. Bu kəşflərdən biri də bütün say sistemləri üçün doğru olan ümumi bölünmə əlamətidir. Ədədlərin bölünməsi haqqında Paskal əlamətinin onluq say sistemində çıxarılışını verək. Tutaq ki, onluq say sistemində $n+1$ rəqəmli natural P ədədi

$$P = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \qquad (1)$$

şəklində verilmişdir, burada $n \in Z_+$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ isə onluq rəqəmlərdir. Bu ədədin vahiddən böyük hər hansı natural b ədədinə hansı hallarda bölündüyünü göstərmək lazımdır. Bunu göstərmək üçün $10, 10^2, \ldots, 10^{n-1}, 10^n$ ədədlərinin natural b ədədinə bölünməsindən alınan qismət və qalıqları uyğun olaraq, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$ və $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ ilə işarə edək. Onda:

$$10 = bq_1 + r_1,\ 10^2 = bq_2 + r_2, \ldots, 10^{n-1} = bq_{n-1} + r_{n-1},\ 10^n = bq_n + r_n$$

olar. Bu ifadələri natural P ədədinin (1) yazılışında nəzərə alsaq, alarıq.

$$P = a_n(bq_n + r_n) + a_{n-1}(bq_{n-1} + r_{n-1}) + \ldots + a_2(bq_2 + r_2) + \\ + a_1(bq_1 + r_1) + a_0 .$$

Buradan

$$P = a_n bq_n + a_n r_n + a_{n-1} bq_{n-1} + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 bq_2 + \\ + a_2 r_2 + a_1 bq_1 + a_1 r_1 + a_0 = b(a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1) + \\ + (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0)$$

və ya

$$P = b(a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1) + \\ + (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0)$$

olduğunu alırıq. Aydındır ki, birinci toplanan b ədədinə bölünür. P ədədinin b-yə bölünməsi üçün ikinci toplananın b-yə bölünməsi həm zəruri, həm kafidir. Başqa sözlə, P ədədinin b-yə bölünməsi üçün $a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots +$ $+ a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0$ cəminin b-yə bölünməsi zəruri və kafi şərtdir. Beləliklə, bölünmə haqqında Paskal əlaməti aşağıdakı kimi ifadə olunur:

Paskal əlaməti. Verilən natural P ədədinin verilən natural $b > 1$ ədədinə bölünməsi üçün bu ədədin rəqəmləri ilə mərtəbə vahidlərinin verilən ədədə bölünməsindən alınan uyğun qalıqların hasilləri cəminin verilən ədədə bölünməsi zəruri və kafi şərtdir.

Paskalın bu əlamətini xüsusi hallara tətbiq edək.

1. Tutaq ki, $b = 2$ onda

$$\begin{array}{ll} r_0 = 1, & a_0 \cdot 1 = a_0, \\ r_1 = 0, & a_1 \cdot 0 = 0, \\ r_2 = 0, & a_2 \cdot 0 = 0, \\ \vdots & \vdots \\ r_{n-1} = 0, & a_{n-1} \cdot 0 = 0, \\ r_n = 0, & a_n \cdot 0 = 0, \end{array}$$

burada ikinci toplanan

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_{n-1} \cdot 0 + a_n \cdot 0 = a_0 .$$

Deməli, axırıncı rəqəmi 2-yə bölünən ədədlər 2-yə bölünür. Başqa sözlə, bütün cüt ədədlər 2-yə bölünür. Bu onu göstərir ki, 2-yə bölünmə əlaməti Paskal əlamətindən xüsusi hal kimi alınır.

2. Tutaq ki, $b = 3$. Onda

$$
\begin{array}{ll}
r_0 = 1, & a_0 \cdot 1 = a_0, \\
r_1 = 1, & a_1 \cdot 1 = a_1, \\
r_2 = 1, & a_2 \cdot 1 = a_2, \\
\vdots & \vdots \\
r_{n-1} = 1, & a_{n-1} \cdot 1 = a_{n-1}, \\
r_n = 1, & a_n \cdot 1 = a_n .
\end{array}
$$

Deməli, verilən ədədin 3-ə bölünməsi üçün onun rəqəmləri cəminin 3-ə bölünməsi zəruri və kafi şərtdir. Analoji qayda ilə Paskal əlamətindən 4, 5, 6 və s. ədədlərinə bölünmə əlamətlərini də xüsusi hal kimi almaq olar.

§6. Tam ədədlər çoxluğunda qalıqsız bölünmə əlamətləri.

Tam ədədlər çoxluğu dedikdə $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ çoxluğu başa düşülür. Tam ədədlər çoxluğunda toplama, çıxma, vurma cəbri əməlləri təyin edilib. Asanlıqla göstərmək olar ki, tam ədədlər çoxluğu halqa əmələ gətirir. Lakin Z ədədlər çoxluğunda vurma cəbri əməlinin tərsi olan bölmə əməli təyin edilməmişdir, çünki iki tam ədədin nisbəti tam ədəd olmaya da bilər. Deməli, tam ədədlər çoxluğu meydan əmələ gətirməyir.

Tərif. Z tam ədədlər çoxluğundan olan $a, b(b \neq 0)$ və c ədədləri üçün $a = b \cdot c$ şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, a - ədədi b - ədədinə tam bölünür, burada a - bölünən, b - bölən, c – qismət adlanır (əksər hallarda qismət q ilə işarə edilir). a - nın mütləq qiymətini $|a|$ ilə işarə edirik. a –nın b – yə tam bölünməsini adətən $a \vdots b$ kimi, tam bölünməməsini isə $a \,\bar{\vdots}\, b$ kimi işarə edirlər. $a \vdots b \Leftrightarrow a = bq$ mənasında başa düşülür.

Misal. $32 = 4 \cdot 8,\ 0 = 0 \cdot 6,\ -36 = 9 \cdot (-4)$ və s. burada $32 \vdots 4, 32 \vdots 8, -36 \vdots 9, -36 \vdots (-4)$.

Bu tərifdən istifadə etməklə, aşağıdakı məsələlər asanlıqla həll edilir.

1. $a \vdots a$ (refleksivlik). $a \vdots 1$, $0 \vdots a$ (burada $a \neq 0$); $(a \vdots b) \Rightarrow |a| \geq |b|$. Aydındır ki, $a = a \cdot 1; a = 1 \cdot a, 0 = a \cdot 0$; $(a \vdots b) \Leftrightarrow (a = bq) \Rightarrow |a| = |b| \cdot |q| \geq |b|$ olduğunu alarıq.

2. Z tam ədədlər çoxluğundan olan a, b, c tam ədədləri üçün əgər b ədədi a – nın və c ədədi b – nin bölənidirsə, onda c ədədi a ədədinin bölənidir, yəni

$$(a \vdots b) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c) \text{ (tranzitivlik).}$$

İsbatı. $(a \vdots b) \Rightarrow (a = bq_1) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (b = cq_2), q_1, q_2 \in Z$ olduğundan, $a = c \cdot \underbrace{q_1 q_2}_{q} = c \cdot q$ yəni $(a = cq) \Rightarrow (a \vdots c)$ alırıq.

3. Z tam ədədlər çoxluğundan götürülmüş a, b, c ədədləri üçün əgər c ədədi həm a – nın, həm də b – nin bölənidirsə, onda c ədədi $(a \pm b)$ ədədlərinin bölənidir, yəni

$$[(a \vdots c) \wedge (b \vdots c)] \Rightarrow [(a \pm b) \vdots c].$$

İsbatı. Verilən $(a \vdots c) \Rightarrow (a = cq_1) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (b = cq_2)$ münasibətlərindən çıxır ki: $a \pm b = c\underbrace{(q_1 + q_2)}_{q} \Rightarrow (a \pm b = cq) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a \pm b) \vdots c]$ (burada $q = q_1 + q_2, q_1, q_2, q \in Z$) .

4. Tam ədədlər çoxluğundan olan a, b, c ədədləri üçün əgər b ədədi a – nın bölənidirsə, onda b ədədi həm də $a \cdot c$ hasilinin bölənidir:

$$(a \vdots b) \Rightarrow (a = bq_1) \Rightarrow \left(ac = b \cdot \underbrace{(q_1 q_2)}_{q} \right) \Rightarrow (ac = bq) \Rightarrow (ac \vdots b).$$

3 və 4 – cü xassələri ümumiləşdirərək yaza bilərik:

5. $a_1 \vdots c, a_2 \vdots c, \ldots, a_k \vdots c$ və $b_1, b_2, \ldots, b_k \in Z$ ədədləri üçün:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k) \vdots c$$

və ya

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \,\vdots\, c .$$

6. Z tam ədədlər çoxluğunda a ədədi b ədədinə və c ədədi d ədədinə bölünürsə, onda (ac) ədədi də (bd) ədədinə bölünür, yəni

$$(a \,\vdots\, b) \wedge (c \,\vdots\, d) \Rightarrow (ac \,\vdots\, bd).$$

İsbatı. Aydındır ki,

$$(a \,\vdots\, b) \Rightarrow (a = bq_1) \wedge (c \,\vdots\, d) \Rightarrow (c = dq_2) \Rightarrow a \cdot c = bq_1 \cdot dq_2 =$$

$$= bd \cdot \underbrace{(q_1 q_2)}_{q} = bd \cdot q \Rightarrow (ac \,\vdots\, bd).$$

Deməli, ac hasili bd-yə bölünür.

Nəticə 1. Əgər a ədədi b-yə bölünürsə, onda a^n (n – ixtiyari natural ədəddir) q^n - ə bölünür.

Nəticə 2. Vuruqlardan heç olmasa biri b – yə bölünürsə, onda hasil də b – ə bölünür. Doğrudan da $3 \cdot 4 = 12$ və $12 \,\vdots\, 6$ olduğu halda 3 və 4 ədədləri ayrılıqda 6 – ya bölünməyir.

§7. Qalıqlı bölmə alqoritmi.

Ola bilər ki, Z tam ədədlər çoxluğunda hər hansı tam ədədi, özündən fərqli bir natural ədədə böldükdə bölən bölünən də bir neçə dəfə yerləşsin və müəyyən qədər qalıq alınsın. Məsələn: 43 ədədini 5 - ə böldükdə, qismət 8-ə, qalıq isə 3-ə bərabər olur. bu o deməkdir ki, qisməti bölənə vurub, qalığı da əlavə etsək, bölünəni alarıq, yəni $43 = 5 \cdot 8 + 3$.

Ümumi şəkildə $F = \{0,1,2,...,n,...\}$ - çoxluğundan götürülmüş hər hansı a ədədini b natural ədədinə böldükdə alınan qisməti q, qalığı isə r ilə işarə etsək, aşağıdakı bərabərliyi yazarıq:

$$a = b \cdot q + r .$$

Bu bərabərlikdə alınan qalıq həmişə mənfi olmayan və böləndən kiçik olmalıdır, yəni $0 \le r < b$.

Beləliklə, a və b ədədləri $(a, b \in Z)$ üçün qalıqlı bölmə alqoritmi deyilən aşağıdakı teoremi alırıq:

Teorem. Tam ədədlər çoxluğundan olan ixtiyari a və b ($b \ne 0$) ədədləri üçün həmişə elə yeganə q və r kimi iki ədəd var ki, aşağıdakı münasibət ödənilir:

$$a = b \cdot q + r,\ 0 \le r < b. \tag{1}$$

<u>İsbatı.</u> 1-ci halda $a \ge 0, b > 0$ olduğunu qəbul edək. Əgər $a < b$ olarsa, onda $a = b \cdot 0 + a$, bu halda $q = 0$ və $r = a$ olur. Əgər $a \ge b$ olarsa, onda $b \cdot 1, b \cdot 2, b \cdot 3, ..., b \cdot q, ...$ ədədi ardıcıllığında q-nü elə götürə bilərik ki, $b \cdot q \le a < b(q+1)$ ödənilsin. Onda $0 \le a - bq < b$ olar. $r = a - bq$ qəbul etməklə (1) bərabərliyini ödəyən q və r ədədlərinin varlığını göstərmiş oluruq.

2-ci hal. $a < 0, b < 0$. Bu halda $-a > 0$ olduğu üçün 1-ci hala əsasən yaza bilərik ki. $-a = b \cdot q_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < b$. Buradan $a = b \cdot (-q_1) - r_1 = b(-q_1 - 1) + b - r_1 = b \cdot q + r$, olar. $q = -q_1 - 1, r = b - r_1$ ədədləri teoremin şərtini ödəyir (burada $0 \le r \le |b|$ münasibəti doğru olur).

3-cü hal. $b < 0$. Bu halda $-b > 0$ olur və əvvəlki hallara nəzərən yaza bilərik. $-a = (-b) \cdot q_1 + r_1, 0 \le r_1 \le -b$. Buradan $a = bq_1 - r_1 = b(q_1 + 1) + (-b - r_1) = bq + r;\ q = q_1 + 1, r = = -b - r_1$ bu halda da (1) bərabərliyinin doğruluğu alınır. Indi isə (1) bərabərliyini ödəyən q və r ədədlərinin yeganə olduğunu isbat edək.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, elə q_1 və r_1 ədədləri var ki, onlar da (1) bərabərliyini ödəyir, yəni

$$a = b \cdot q_1 + r_1,\ 0 \le r \le |b| \tag{2}$$

(1) və (2) dən alırıq.

$$b \cdot (q_1 - q) = r - r_1.$$

Buradan,

$$|b| \cdot (q_1 - q) = |r - r_1| \qquad (3)$$

$0 \le r < |b|$ və $0 \le r_1 < |b|$ olmasından çıxır ki,

$$|r - r_1| < |b| \qquad (4)$$

(3) və (4) dən alırıq ki,

$$|b| \cdot |q_1 - q| < b \qquad (5)$$

(5) – dən çıxır ki, $|q_1 - q| = 0$, yəni $q_1 = q$ olmalıdır. $q_1 = q$ olmasından və (3) – dən alırıq ki, $r_1 = r$ olmalıdır.

Teorem isbat olundu.

Qalıqlı bölmə alqotitmndən aşağıdakı nəticə çıxır:

a tam ədədinin *b* – tam ədədinə tam bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt (1) düsturundakı *r* ədədinin sıfıra bərabər olmasıdır.

§8. Evklid alqoritmi.

Iki *a* və *b* ədələrinin *ƏBOB*-ni tapmaq üçün istifadə edilən səmərəli üsullardan biri Evklidin adı ilə bağlı olan “Evklid” alqoritmidir.

Evklid alqoritmi verilmiş *a* və *b* ədədlərinə qalıqlı bölmə alqoritmini və buradan qismət və qalıqlara ardıcıl tətbiq etməkdir. Qalıqlı bölmə alqoritmini *a* və *b* ədədlərinə tətbiq etsək, alarıq: ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $a > b$-dir. $a = bq_1 + r_1$, $0 \le r_1 < b$. Sonra $r_1 > 0$ isə qalıqlı bölmə alqoritmini b və r_1 ədədlərinə tətbiq etsək, yaza bilərik $b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$. Sonra $r_2 > 0$ isə qalıqlı bölmə alqoritmi r_1 və r_2 ədədlərinə tətbiq olunur $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, $0 \le r_3 < r_2$ və s.

Bu proses qalıq sıfıra bərabər olanda qurtarır və aşağıdakı bərabrliklər sistemi alınır:

$$
\left.\begin{array}{ll}
E_1 : a = bq_1 + r_1, & 0 \le r_1 < b, \\
E_2 : b = r_1 q_2 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1, \\
E_3 : r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2, \\
E_4 : r_2 = r_3 q_4 + r_4, & 0 \le r_4 < r_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
E_{k-2} : r_{k-4} = r_{k-3} q_{k-2} + r_{k-2}, & 0 \le r_{k-2} < r_{k-3}, \\
E_{k-1} : r_{k-3} = r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1}, & 0 \le r_{k-1} < r_{k-2}, \\
E_k : r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k, & 0 \le r_k < r_{k-1}, \\
E_{k+1} : r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0 & .
\end{array}\right\} \quad (E)
$$

(E) bərabərlikləri Evklid bərbərliklər sistemi adlanır.

Əgər $b > a$ olarsa, onda b-ni a-ya bölməklə başlayıb, (E) bərabərliklərində b ilə a – nın yerini dəyişərdik.

Teorem (Evklid). a və b $(a > b > 0)$ tam ədədlərinin $ƏBOB$-i (E) bərabərliklər sistemindəki sonuncu sıfırdan fərqli qalıqdır, yəni $ƏBOB(a,b) = D = r_k$.

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, r_k ədədi a və b – nin ortaq bölənidir. Sonuncu $(E)_{k+1}$ bərabərliyindən görünür ki, r_k ədədi r_{k-1} ədədinin bölənidir, yəni $r_k \vdots r_{k-1}$. Bunu nəzərə alıb, $(E)_k$ bərabərliyinə diqqət yetirsək, aydın olar ki, $r_{k-2} \vdots r_k$ (çünki $r_k \vdots r_k$ və $r_{k-1} \vdots r_k$). Bunu nəzərə alıb, $(E)_{k-1}$-dən alırıq ki, $r_{k-3} \vdots r_k$ və s. Bu mühakiməni yuxarıya doğru davam etdirməklə $(E)_2$-dən $b \vdots r_k$, $(E)_1$-dən isə $a \vdots r_k$ tapırıq. Deməli, r_k ədədi a və b – nin ortaq bölənidir.

Indi göstərək ki, r_k ədədi a və b ədədlərinin $ƏBOB$-dir. Tutaq ki, d ədədi a və b ədədlərinin hər hansı ortaq bölənidir. Onda, əgər göstərə bilsək ki, d ədədi həm də r_k ədədinin bölənidir, bununla teorem isbat edilmiş olacaq. (E) - bərabərliklərini

$$\left.\begin{aligned}
&(E)_1^{/} : a - bq_1 = r_1,\\
&(E)_2^{/} : b - r_1 q_2 = r_2,\\
&(E)_3^{/} : r_1 - r_2 q_2 = r_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(E)_{k-1}^{/} : r_{k-3} - r_{k-2} q_{k-1} = r_{k-1},\\
&(E)_k^{/} : r_{k-2} - r_{k-1} q_k = r_k,\\
&(E)_{k+1}^{/} : r_{k-1} - r_k q_{k+1} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (E)^{/}$$

şəklində yazaq. d – ixtiyari ortaq bölən olduğundan $a \vdots d, b \vdots d$ - dir. Onda $(E)_1^{/}$ - dən aydın olur ki, $r_1 \vdots d$. $(E)_2^{/}$ - dən $r_2 \vdots d$, $(E)_3^{/}$ - dən $r_3 \vdots d$ və s. nəhayət, $(E)_k^{/}$- dən $r_k \vdots d$ olduğunu tapırıq. Buna görə də $(a,b) = r_k = D$. Teorem isbat olundu.

Qeyd. İki a və b ədədləri $(b \neq 0)$ üçün həmişə qalıqlı bölmə alqoritmi olduğundan ən böyük bölənin varlığı da aşkar olur.

Misal. $a = 816$ və $b = 187$ ədədlərinin $ƏBOB$-ni Evklid alqoritmi vasitəsilə tapaq. Bu proses

$$\begin{aligned}
&816 = 187 \cdot 4 + 68; &&68 < 187,\\
&187 = 68 \cdot 2 + 51; &&51 < 68,\\
&68 = 51 \cdot 1 + 17; &&17 < 51,\\
&51 = 17 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

bərabərliklər sisteminin düzəldilməsi deməkdir. Burada tapılan $r_1 = 68,\ r_2 = 51,\ r_3 = 17,\ r_4 = 0$ qalıqlarından ($r_4 = 0$ qalığından əvvəlki) $r_3 = 17$ -dir.
Demləli, $ƏBOB(816, 187) = 17$.

Qeyd. Monoton azalan

$$b > r_1 > r_2 > ... > r_k > r_{k+1} = 0 \qquad (*)$$

ardıcıllığını alırıq. Bu ardıcıllıq sonsuz ola bilməz. Çünki alınan hər sonrakı qalıq əvvəlkindən kiçik olduğundan, nəhayət qalığın sıfıra bərabər olan halı alınacaqdır. Deməli, $ƏBOB(a, b) = r_k$ olur.

§9. Çoxhədlilər.

Tərif.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

şəklində olan ifadəyə n dərəcəli birdəyişənli standart şəkilli çoxhədli deyilir, burada $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ - verilmiş ədələrdir, $a_n \neq 0, x$ -isə dəyişəndir.

Birdəyişənli standart şəkilli çoxhədliyə kanonik şəkilli çoxhədli də deyilir.

Tutaq ki,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

və

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$$

dərəcələri n və m olan kanonik şəkilli iki çoxhədli verilmişdir. Bu çoxhədlilərin cəmi (fərqi) həmin çoxhədlilərin eynidərəcəli hədlərinin əmsallarını toplamaqla (çıxmaqla) alınan çoxhədlilərdir. Onun dərəcəsi n və m ədədlərinin ən böyüyünü aşmayır.

Misal. $6x^8 + 4x^5 - 3x^3 + 5x$ və $-3x^5 + 2x^3 - 4x - 1$ çoxhədlilərinin cəmi

$$6x^8 + (4-3)x^5 + (2-3)x^3 + (-4+5)x - 1 =$$
$$= 6x^8 + x^5 - x^3 + x - 1$$
çoxhədlisidir.

Fərqi isə
$$6x^8 + 7x^5 + 5x^3 - 9x - 1$$
şəklindədir.

Kanonik şəkilli çoxhədlilərin hasilini tapmaq üçün çoxhədlilərin birinin bütün hədlərini digər çoxhədlinin bütün hədlərinə vurub, alınan hədləri toplamaq lazımdır. Əgər çoxhədlilərin birinin dərəcəsi n, digərinin dərəcəsi m-isə, onda alınan çoxhədlinin dərəcəsi $n+m$ olacaq.

Beləliklə, çoxhədlilərin toplanması, çıxılması, vurulması - nəticə etibarı ilə yenə də çoxhədlidir.

Çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi qaydasını vermək üçün əvvəlcə iki çoxhədlinin bərabərliyi anlayışını verək.

Tutaq ki, dərəcəsi n olan
$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
və dərəcəsi m olan
$$C(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$
çoxhədliləri verilmişdir.

Tərif. x dəyişəninin bütün qiymətlərində $A(x) = C(x)$ olarsa, onda $A(x)$ və $C(x)$ çoxhədliləri bərabər çoxhədlilər adlanır.

Bu tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı teoremin doğruluğu asanlıqla isbat edilir.

Teorem. $A(x)$ və $C(x)$ çoxhədlilərinin bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt:

1) bu çoxhədlilərin dərəcələrinin eyni olmasıdır;
2) x-in eyni dərəcəli əmsallarının bərabər olmasıdır, yəni $a_n = c_n$, $a_{n-1} = c_{n-1}$,..., $a_1 = c_1$, $a_0 = c_0$ olmasıdır.

Tutaq ki, dərəcəsi n olan

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

və dərəcəsi k olan

$$B(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0$$

çoxhədliləri üçün dərəcəsi $l = n - k$ olan

$$Q(x) = q_l x^l + q_{l-1}x^{l-1} + ... + q_1 x + q_0$$

çoxhədlisi vardır ki,

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

bərabərliyi ödənilir. Onda $A(x)$ çoxhədlisi $B(x)$ çoxhədlisinə qalıqsız bölünür. Bu halda $A(x)$ çoxhədlisi bölünən, $B(x)$ bölən çoxhədli, $Q(x)$ çoxhədlisi isə qismət çoxhədlisi adlanır.

Misal. $A(x) = x^5 + 1$ və $B(x) = x - 1$ çoxhədliləri verilmişdir.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \text{ - şəklində olar.}$$

Əgər $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 1$,

$B(x) = x^2 - 3x + 1$ şəklində olarsa, onda

$Q(x) = 5x^2 + 12x + 35$, $R(x) = 98x - 36$ şəklində olar. Birinci halda isə,

$Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $R(x) = 0$ olar.

Fərz edək ki,

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

n - dərəcəli çoxhədlisi verilmişdir. x dəyişəninin $A(x)$ çoxhədlisini sıfra çevirən qiymətinə həmin çoxhədlinin kökü deyilir. Deməli, $A(\alpha) = 0$ olarsa, α ədədinə $A(x)$ çoxhədlisinin kökü deyilir, yəni $A(x)$ çoxhədlisinin kökünü tapmaq üçün $A(x) = 0$ tənliyinin həllini tapmaq lazımdır.

§10. Çoxhədlilərin bölünməsi.

Tam ədədlər üçün qalıqlı bölmə alqorifminə analoji olaraq, çoxhədlilər üçün “qalıqlı bölmə” alqorifmi alqorifmi adlanan aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem. $A(x)$ və $C(x)$ çoxhədliləri üçün $(C(x) \neq 0)$ həmişə

$$A(x) = C(x) \cdot q(x) + r(x),$$

bərabərliyini ödəyən və yeganə təyin edilən qismət $q(x)$ çoxhədlisi və qalıq $r(x)$ çoxhədlisi var, belə ki, qalıq $r(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi bölən $C(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsindən kiçikdir.

Çoxhədlilərin $(x-a)$ ikihədlisinə bölünməsi ilə bağlı olan və XVIII əsrdə yaşamış məşhur fransız riyaziyyatçısı Bezunun adını daşıyan teoremi nəzərdən keçirək.

Bezu teoremi. x-ə nəzərən tam olan

$$M(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n \qquad (1)$$

çoxhədlisinin $(x-a)$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq, baxılan çoxhədlidə $x = a$ yazdıqda alınan

$$R = A_0a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots + A_n \qquad (2)$$

ədədinə bərabərdir.

Isbatı. x-in azalan dərəcəsi üzrə düzülmüş çoxhədlilərin bölünməsi qaydasından məlumdur ki, belə çoxhədlilərin $(x-a)$ fərqinə bölünməsi prosesi o qədər davam etdirilir ki, R qalığının yüksək dərəcəli həddi x dəyişənindən asılı olmasın. Bölmə prosesində alınan qismət çoxhədlisini $Q(x)$ ilə işarə etsək, aşağıdakı bərabərliyi yaza bilərik:

$$M(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R\,. \qquad (3)$$

(3) bərabərliyi eynilikdir, yəni bu bərabərlik x-in bütün qiymətlərində doğrudur, ona görə də həmin bərabərlik $x = a$ qiymətində də doğru olmalıdır.

$x = a$ olduqda alırıq:

$$M(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = R. \quad (4)$$

Bununla da teorem isbat edilmiş olur.

Nəticə 1. $x + a = x - (-a)$ olduğunu nəzərə alsaq və isbat edilmiş teoremi tətbiq edərək tapırıq:

$$M(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$$

çoxhədlisinin $x + a$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq həmin çoxhədlidə $x = -a$ yazdıqda alınan ədədə, yəni

$$R = A_0(-a)^n + A_1(-a)^{n-1} + A_2(-a)^{n-2} + \ldots + A_n$$

ədədinə bərabərdir.

Misallar. 1) $x^5 - 3x^2 + 5x - 1$ çoxhədlisini $x - 2$ fərqinə böldükdə alınan qalıq bərabərdir:

$$R = 2^5 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 32 - 12 + 10 - 1 = 29$$

2) $x^5 - 3x^2 + 5x - 1$ çoxhədlisini $x + 2$ cəminə böldükdə alınan qalıq bərabərdir:

$$R_1 = (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 1 = -32 - 12 - 10 - 1 = -55$$

Nəticə 2. $M(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$ çoxhədlisinin $(x - a)$ fərqinə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt, $x = a$ olduqda həmin çoxhədlinin qiymətinin sıfra bərabər olmasıdır.

Isbatı. 1) Şərt zəruridir. Bu o deməkdir ki, $M(x)$ çoxhədlisi $(x - a)$ fərqinə bölünür. Onda götərək ki, $x = a$ qiymətində həmin çoxhədlinin aldığı qiymət sıfra bərabər olur, yəni $M(a) = 0$. Doğrudan da əgər $M(x)$ çoxhədlisi $(x - a)$ fərqinə bölünürsə, onda qalıq sıfra bərabər olmalıdır, yəni $R = 0$ olmalıdır. Yuxarıda isbat etdiyimizə əsasən, həmin bölmədən alınan qalıq elə $x = a$ qiymətində $M(x)$ çoxhədlisinin aldığı qiymətdir. Onda,

$$R = 0 \Rightarrow A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_n = 0 \Rightarrow M(a) = 0.$$

2) Şərt kafidir. Yəni əgər $x = a$ olduqda çoxhədlinin qiyməti sıfra bərabərdirsə, ($M(a) = 0$ olarsa), onda göstərmək lazımdır ki, $M(x)$ çoxhədlisi $(x - a)$ fərqinə bölünür. Doğrudan da isbat etdiyimiz teoremə əsasən, $M(x)$ çoxhədlisinin $(x - a)$ fərqinə bölünməsindən alınan qalıq

$$R = M(a) = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_n$$

olduğundan,

$$M(a) = 0 \Rightarrow R = 0$$

olur. Qalığın sıfra bərabər olması isə onu göstərir ki, $M(x)$ çoxhədlisi $(x - a)$ fərqinə tam bölünür. Bununla nəticə 2-nin isbatı tamam olur.

Nəticə3. $M(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$ çoxhədlisinin $x + a$ cəminə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt $x = -a$ olduqda bu çoxhədlinin qiymətinin sıfra bərabər olmasıdır.

Isbatı. $x + a = x - (-a)$ olduğundan nəticə 3-ün isbatı tamamilə nəticə 2-nin isbatı kimidir.

Misallar. 1) $M(x) = x^3 - 4x^2 + 9$ çoxhədlisi $x - 3$ fərqinə bölünür, çünki

$$M(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 9 = 27 - 36 + 9 = 0;$$

2) $M(x) = 2x^2 + x - 45$ çoxhədlisi $x + 5$ cəminə bölünür, çünki

$$M(-5) = 2 \cdot (-5)^2 + (-5) - 45 = 50 - 5 - 45 = 0.$$

Yuxarıda qeyd olunan təklifləri nəzərə alaraq $x^n \mp a^n$ ikihədlisinin $x \mp a$ ikihədlisinə bölünməsini araşdıraq.

Biz burada, aşağıda göstərilən bir neçə halı nəzərdən keçirəcəyik:

1) İki ədədin eyni dərəcəli qüvvətlərinin fərqi həmin ədədlərin fərqinə bölünür.

Doğrudan da $M(x) = x^n - a^n$ çoxhədlisi (ikihədlisi) $x - a$ ikihədlisinə böləndükdə alınan qalıq $R = a^n - a^n = 0$

$(M(a)=0)$ olduğundan, yuxarıdakı nəticə 2-yə əsasən $x^n - a^n$ ikihədlisi $x-a$ ikihədlisinə bölünür;

2) Əgər $n=2k$ şəklində cüt ədəd olarsa, onda $x^n - a^n$ ikihədlisi $x+a$ cəminə bölünür.

Doğrudan da $x=-a$ qiymətində $(-a)^n - a^n = (-a)^{2k} - a^{2k} =$
$= a^{2k} - a^{2k} = 0$;

3) Əgər $n=2k+1$ şəklində tək ədəd olarsa, onda $x^n - a^n$ ikihədlisi $x+a$ cəminə bölünməyir.

Doğrudan da $x=-a$ olduqda $(-a)^n - a^n = (-a)^{2k+1} - a^{2k+1} =$
$= -a^{2k+1} - a^{2k+1} = -2a^{2k+1} \neq 0$;

4) $x^n + a^n$ ikihədlisi $x-a$ fərqinə bölünməyir, çünki $x=a$ olduqda $a^n + a^n = 2a^n \neq 0$ olur;

5) $x^n + a^n$ ikihədlisi $n=2k$ şəklində cüt ədəd olduqda $x+a$ cəminə bölünməyir, çünki

$$(-a)^{2k} + a^{2k} = a^{2k} + a^{2k} = 2a^{2k} \neq 0 \text{ olur;}$$

6) $x^n + a^n$ iki hədlisi $n=2k+1$ şəklində tək ədəd olduqda $x+a$ cəminə bölünməyir, çünki $(-a)^{2k+1} + a^{2k+1} =$
$= -a^{2+1k} + a^{2k+1} = 0$ olur.

Misallar.

1. $x^1 + a^1$ ikihədlisi $(x+a)$ – ya bölünür, $(x-a)$ – ya bölünməyir.
2. $x^2 - a^2$ ikihədlisi həm $(x+a)$ – ya və həm də $(x-a)$ – ya bölünür.
3. $x^2 + a^2$ ikihədlisi nə $(x+a)$ – ya və nə də $(x-a)$ – ya bölünməyir.
4. $x^3 - a^3$ ikihədlisi $(x+a)$ – ya bölünməyir, lakin $(x-a)$ – ya bölünür.
5. $x^3 + a^3$ ikihədlisi $(x+a)$ – ya bölünür, lakin $(x-a)$ – ya bölünməyir.

Yuxarıda gördük ki, $x^n - a^n$ ikihədkisi $x - a$ ikihədlisinə bölünür. Əgər bu bölmə prosesini bilavasitə yerinə yetirsək, alınan qisməti müəyyən edə bilərik:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^n - a^n & x - a \\
\cline{2-2}
-\; x^n \pm a x^{n-1} & x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1} \\
\cline{1-1}
R_1 = a x^{n-1} - a^n & \\
\quad -\; a x^{n-1} \pm a^2 x^{n-2} & \\
\cline{1-1}
R_2 = a^2 x^{n-2} - a^n & \\
\quad -\; a^2 x^{n-2} \pm a^3 x^{n-3} & \\
\cline{1-1}
R_3 = a^3 x^{n-3} - a^n & \\
\vdots & \\
\cline{1-1}
R_{n-1} = a^{n-1} x - a^n & \\
\quad -\; a^{n-1} x \pm a^n & \\
\cline{1-1}
R_n = 0\,. &
\end{array}
$$

Bölmə prosesində qismətdə çoxhədlini $Q(x)$ ilə işarə etsək, $Q(x)$ aşağıdakı şəkildə olar:

$$Q(x) = x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-2} x + a^{n-1}. \qquad (5)$$

(5) çoxhədlisinin aşağıdakı mühüm xassələrini qeyd edək:

1. $Q(x)$ qismət çoxhədlisinin n sayda həddi vardır.
2. $Q(x)$ çoxhədlisinin hər bir həddinin qüvvəti $(n-1)$- ə bərabərdir.
3. x-in üstü $(n-1)$-dən başlayaraq, hər sonrakı həddə 1 vahid azalmaqla axırıncı həddə 0-a bərabər olur.
4. a-nın üstü birinci həddə 0 – a bərabər olub, hər sonrakı həddə 1 vahid artırmaqla axırıncı həddə $(n-1)$-ə bərabər olur.
5. Bütün hədlərin əmsalları 1-ə bərabərdir.

6. Bütün hədlərin işarələri müsbətdir.

Bunları nəzərə alaraq, aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilərik:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2),$$

$$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3),$$

$$x^5 - a^5 = (x-a)(x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5)$$

və s.

$x^n - a^n$ ikihədlisinin $x + a$ cəminə bölünməsindən (n - cüt ədəd olduqda) və $x^n + a^n$ ikihədlisinin ($x^n + a^n$) – ya bölünməsindən (n - tək ədəd olduqda) alınan qismət çoxhədlilərini yazmaq üçün (5) – qismət çoxhədlisində a - nı $(-a)$ ilə əvəz etmək kifayətdir.

Beləliklə, göstərilənlərə əsasən, aşağıdakıları yazmaq olar:

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2),$$

$$x^4 - a^4 = (x+a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3),$$

$$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4),$$

$$x^6 - a^6 = (x+a)(x^5 - ax^4 + a^2x^2 - a^3x^2 + a^4x - a^5)$$

və s.

§11. Çoxhədlinin kökü.

Fərz edək ki, bizə

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

çoxhədlisi verilmişdir. $x = \alpha$ qiymətində (1) çoxhədlisinin aldığı qiymət sıfır, yəni

$$F(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

olarsa, onda α ədədinə $f(x)$ - in kökü deyilir.

Tərifdən aydındır ki,

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{2}$$

çoxhədlisinin köklərini tapmaq uyğun

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{3}$$

cəbri tənliyini həll etmək deməkdir.

Fərz edək ki, $x = c$ ədədi (1) çoxhədlisinin köküdür,

$$F(x) = (x-c)^k Q(x) \tag{4}$$

münasibəti doğrudur və $Q(c) \neq 0$ - dır. Əgər $k = 1$ isə, onda deyirlər ki, $x = c$ ədədi (1) çoxhədlisinin sadə köküdür. Əgər $k > 1$ isə, onda deyirlər ki, $x = c$ ədədi $F(x)$ çoxhədlisinin "k dəfə təkrarlanan köküdür", yaxud "k – qat təkrar köküdür", k ədədinə isə kökün təkrarlanma dərəcəsi deyilir. **Misal 1.** $F(x) = x^n$ çoxhədlisi rasional ədədlər meydanında n dəfə təkrarlanan sıfır $(c = 0)$ kökə malikdir, çünki burada $F(x) \vdots (x-c)^n$, amma $F(x) \overline{\vdots} (x-c)^{n+1}$.

Misal 2. $F(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 - 28x - 8$ çoxhədlisini $F(x) = (x-1)^2 (x-2)^3$ kimi yazmaq olar. Buradan görünür ki, 1 ədədi ikiqat, 2 ədədi isə üçqat kökdür.

Tərifdən çıxan aşağıdakı nəticələri qeyd edək:

Nəticə 1. c ədədi $F(x)$ çoxhədlisinin k dəfə təkrarlanan kökü isə, onun $F'(x)$ törəməsinin $(k-1)$ dəfə təkrarlanan köküdür.

Nəticə 2. c ədədinin $F(x)$ çoxhədlisinin k dəfə təkrarlanan kökü olması üçün

$$F(c)=F'(c)=...=F^{(k-1)}(c)=0 \qquad \text{və} \qquad F^{(k)}(c)\neq 0$$

olması həm zəruri, həm də kafidir.

Teorem. Ixtiyari $n(n\geq 1)$ dərəcəli $F(x)$ çoxhədlisinin düz n dənə kökü var. Bu zaman təkrar kök varsa, onda onun sayı təkrarlanma dərəcəsinə bərabər götürülür.

Isbatı. Cəbrin əsas teoreminə görə n dərəcəli $F(x)$ çoxhədlisinin heş olmazsa bir kökü var; onu x_1 - ilə işarə edək. Bezu teoreminə görə $F(x)$ çoxhədlisi $x-x_1$ ikihədlisinə bölünür, yəni

$$F(x)=(x-x_1)\cdot Q_1(x), \tag{5}$$

burada $Q_1(x)$ - müəyyən $(n-1)$ dərəcəli çoxhədlidir. Yenidən cəbrin əsas teoremini $Q_1(x)$ çoxhədlisinə tətbiq edək, onda bu çoxhədlinin də heç olmazsa bir kökünün olduğunu alarıq; onu x_2 ilə işarə etsək, analolji qayda ilə taparıq ki,

$$Q_1(x)=(x-x_2)\cdot Q_2(x) \qquad , \tag{6}$$

burada $Q_2(x)$ müəyyən $(n-2)$ dərəcəli çoxhədlidir. (6) – nı (5) – də nəzərə alsaq, alarıq

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot Q_2(x). \tag{7}$$

Bu prosesi $(n-2)$ dəfə yenidən təkrarlasaq, alarıq:

$$F(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n). \tag{8}$$

Göründüyü kimi $x_1, x_2, \dots, x_n$ köklərinin içərisində təkrarlanan köklər də ola bilər.

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, məlum Viyet düsturları (8) bərabərliyindən alınır.

Viyet düsturları $F(x)$ - in məhz bu $x_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ kökləri ilə onun $a_i\left(i = \overline{0,m}\right)$ əmsalları arasındakı asıllığı göstərir:

$$(V)\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_0} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \\ \dfrac{a_2}{a_0} = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n, \\ \dfrac{a_3}{a_0} = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_0} = (-1)^{n-1}(x_1x_2\dots x_{n-1} + x_1x_2\dots x_{n-2}x_n + \dots + x_2x_3\dots x_n), \\ \dfrac{a_n}{a_0} = (-1)^n x_1x_2\dots x_n \end{cases}$$

Bu düsturları çıxarmaq üçün (2) bərabərliyindən istifadə edilir.

Tutaq ki, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ədədləri n – dərəcəli $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ çoxhədlinin kökləridir. Onda Bezu teoreminə görə

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = m(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$$

şəklindədir. Xüsusi halda, $n = 2$ olarsa,

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),$$

$n = 3$ olarsa,

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

şəklində olar. Bu eynilikləri sadələşdirib, iki çoxhədlinin bərabərliyi şərtinə əsasən, $n = 2$ olarsa,

$$m = a_2 \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}, \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}; \end{cases} \qquad (*)$$

$$m = a_3 \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \end{cases} \qquad (**)$$

şəklində Viyet düsturların almış oluruq.

Ədədlərin cəminin qoşmasının onların qoşmalarının cəminə bərabər olmasından, hasilin qoşmasının qoşmaların hasilinə bərabər olmasından və həqiqi ədədin qoşmasının özünə bərabər olmasından istifadə edərək aşağıdakı teoremi asanlıqla isbat etmək olar.

Teorem. Əgər $x = c$ kompleks ədədi həqiqi əmsallı (1) çoxhədlisinin köküdürsə, onda $x = \bar{c}$ ($\bar{c}$ ədədə c kompleks ədədinin qoşmasıdır) kompleks ədədi də bu çoxhədlinin köküdür.

Teorem. Əgər (1) həqiqi əmsallı çoxhədli isə, onda bu çoxhədlini həmişə aşağıdakı kimi vuruqlara ayırmaq olar

$$F(x) = a_n \cdot Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdots Q_m(x), \qquad (9)$$

burada $Q_k(x)$ *ya* $(x + c_k)$ şəklində olan ikihədlidir: $Q_k(x) = x + c_k$; *yaxud* $Q_k(x)$ $x + b_k x + d_k$ şəklində olan kvadrat üçhədlidir, yəni $Q_k(x) = x + b_k x + d_k$; c_k, b_k, d_k ədədləri isə həqiqi ədədlərdir və $b_k^2 < 4d_k$ - dır.

Isbatı. Yuxarıda isbat etdiyimiz kimi $F(x)$ çoxhədlisini (8) düsturu ilə vuruqlarına ayırmaq olar. Əgər (8) düsturunda $x = x_m$ kökü həqiqi ədəddirsə, onda ona uyğun $Q_k(x)$ vuruğu $x - x_m$ şəklində olacaq, yəni $Q_k(x) = x - x_m$ olacaq. Əgər $x = x_m$ kökü kompleks ədəddirsə, onda əvvəlki teoremə əsasən $x = \overline{x_m}$ kompleks ədədi də bu çoxhədlinin kökü olacaq, yəni bu halda $Q_k(x)$çoxhədlisini $(x - x_m)\cdot\left(x - \overline{x_m}\right)$ vuruqlarının hasili şəklində göstərmək olar:

$$Q_k(x) = (x - x_m)\cdot\left(x - \overline{x_m}\right) = x^2 + b_k x + d_k\,,$$

$$b_k = -x_m - \overline{x_m}, \quad d = x_m \cdot \overline{x_m}\,.$$

Teorem isbat olundu.

Teorem. İstənilən həqiqi əmsallı tək dərəcəli çoxhədlinin heç olmazsa bir həqiqi kökü var.

Isbatı. Tutaq ki, (1) çoxhədlisi həqiqi əmsallıdır, n – tək ədəddir və ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $a_n > 0$. Onda $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ olacaq. Deməli, elə α və β həqiqi ədədləri var ki, $F(\alpha) < 0$, $F(\beta) > 0$ və $\alpha < \beta$ olacaq. 0 (sıfır) nöqtəsi $[F(\alpha), F(\beta)]$ parçasına daxildir. Kəsilməz funksiyaların aralıq qiymətlərini alması haqqında teoremə əsasən elə $\xi \in [\alpha, \beta]$ olacaq ki, onun üçün $F(\xi) = 0$ olacaq və $x = \xi$ ədədi bu çoxhədlinin kökü olacaq.

Teorem isbat edildi.

§12. Rasional əmsallı çoxhədlinin

rasional kökü.

Tutaq ki, bizə

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (10)$$

çoxhədlisi verilib.

Teorem. Əgər (10) çoxhədlisinin əmsalları tam ədəddirsə, yəni $a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z,\ a_n \neq 0$, bu çoxhədlinin $x = \frac{p}{q}$ şəklində rasional kökü varsa (belə ki, $p \in Z, q \in N$) və

$$ƏBOB(p,q) = 1 \qquad (11)$$

(yəni p və q ədədləri qarşılıqlı sadə ədədlərdir) isə, onda p ədədi a_0 - ın, q ədədi isə a_n - in bölənidir, yəni $\frac{a_0}{p} \in Z$ və $\frac{a_n}{q} \in Z$.

__**Isbatı.**__ Fərz edək ki, $x = \frac{p}{q}$ ədədi (10) çoxhədlisinin köküdür. Onda

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (12)$$

(12) bərabərliyinin hər tərəfini hər tərəfini q^{n-1}-ə vurmaqla alırıq:

$$a_n\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1 pq^{n-2} - a_0 q^{n-1}. \qquad (13)$$

Teoremin şərtinə əsasən alırıq ki, (13) – bərabərliyinin sağ tərəfi tam ədəddir, deməli

$$a_n\frac{p^n}{q^n} \in Z. \qquad (14)$$

(11) şərtindən çıxır ki,

$$ƏBOB\left(p^n, q\right) = 1 \quad . \tag{15}$$

(14) və (15) – dən alınır ki,

$$\frac{a^{\ n}}{q^n} \in Z \ . \tag{16}$$

Analoji qayda ilə (12) istifadə etməklə isbat edilir ki, $\frac{a_0}{q} \in Z$.

Teorem isbat olundu.

Teoremdəki (*) şərti $\frac{p}{q}$ rasional ədədinin *(F)* çoxhədlisinin kökü olması üçün yalnız zəruri şərtdir, lakin kafi deyil (yəni ola bilər ki, (*) şərti ödənsin, lakin $\frac{p}{q}$ rasional ədədi heç də *(F)* – in kökü olmasın).

Nəticə. Əgər (10) çevrilmiş çoxhədli isə onun əmsallar tam ədədlərdirsə, yəni $a_0 = 1, a_{n-1}, a_{n-2} ..., a_n \in Z,\ a_0 \in Z$ isə, və bu çoxhədlinin rasional kökü varsa, onda bu kök tam ədəddir.

Tutaq ki, (10) çoxhədlisinin əmsalları rasional ədədlərdir, yəni

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}, a_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, ..., a_1 = \frac{p_1}{q_1}, a_0 = \frac{q_0}{p_0} \ ,$$

belə ki,

$$p_n p_{n-1}, ..., p_1, p_0 \in Z, p_n \neq 0,$$

$$q_n, q_{n-1}, ..., q_1 q_0 \in N.$$

$q_n, q_{n-1}, ..., q_1 q_0$ ədədlərinin *ƏBOB*-ni q ilə işarə edək. Onda

$$q \cdot F(x) = qa_n x^n + qa_{n-1} x^{n-1} + ... + qa_1 x + qa_0$$

çoxhədlisi tam əmsallı çoxhədli olacaq və bu zaman yuxarıda söylənilən teoremlər $q \cdot F(x)$ tam əmsallı çoxhədlisi üçün öz qüvvəsində qalacaq.

VI FƏSİL

TƏNLİK VƏ BƏRABƏRSİZLİKLƏR.

§1. Tənlik. Tənliyin kökü. Tənliklərin eynigüclülüyü.

Məlumdur ki, dəyişən (dəyişənlər) daxil olan bərabərlik dəyişənin (dəyişənlərin) bütün mümkün qiymətlərində doğru ədədi bərabərliyə çevrilərsə, onda o eynilik adlanır. Əks halda dəyişən (dəyişənlər) daxil olan bərabərlik tənlik adlanır. Başqa sözlə, qiymətini tapmaq tələb olunan dəyişən (dəyişənlər) daxil olan bərabərlik tənlik adlanır. Bir dəyişənli tənliyi $f(x)=\varphi(x)$ şəklində yazmaq olar, burada $f(x)$ və $\varphi(x)$ məlum funksiyalardır. $D=D(f)\cap D(\varphi)$ çoxluğu bu tənliyin təyin oblastı adlanır. Əgər $x=a$ üçün $f(a)=\varphi(a)$ doğru ədədi bərabərlikdirsə, onda $x=a$ ədədi $f(x)=\varphi(x)$ tənliyinin kökü və ya həlli adlanır. Tənliyi həll etmək onun bütün köklərini tapmaq və ya onun kökünün olmadığını göstərməkdir.

1. Əgər təyin oblastı D olan

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

tənliyinin üzərində çevirmə apardıqdan sonra alınan

$$f_1(x)=\varphi_1(x) \tag{2}$$

tənliyinin təyin oblastı D_1-dirsə və D_1 oblastı D-yə nisbətən daha genişdirsə ($D\subset D_1$), onda (2) tənliyinin bütün və ya bəzi kökləri (1) tənliyi üçün kənar köklər ola bilər. Bu halda köklərin yoxlanılması zəruridir. Aydındır ki, əgər (2) tənliyinin kökü $\boldsymbol{D}$-yə daxil deyilsə, onda o, (1) tənliyinin kökü deyildir və əgər həmin kök $\boldsymbol{D}$-yə daxildirsə, bu hələ onun (1) tənliyinin kökü olması demək deyildir. Belə hallara irrasional və transendent tənliklərin həlli zamanı çox rast gəlinir.

Misal.

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8 \tag{3}$$

irrasional tənliyinə baxaq.

Əvvəlcə bu tənliyin təyin oblastını müəyyən edək:

$$\text{MQÇ:}\begin{cases} 2x+5\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2}, \\ x\geq 1. \end{cases}$$

Deməli, $D=\{x\,|\,x\geq 1\}$.

(3) tənliyinin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltməklə, çevirmələr apardıqdan sonra

$$x^2-372x+3620=0 \tag{4}$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyin təyin oblastı isə $D_1=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$-dır. (4) tənliyinin kökləri bunlardır: $x_1=10, x_2=362$. Aydındır ki, bu köklərin hər ikisi D oblastına daxildir. Lakin onları (3) tənliyində x-in yerinə yazıb, yoxladıqda məlum olur ki, $x_2=362$ (3) tənliyinin kökü deyildir.

2. Əgər (2) tənliyinin təyin oblastı (1) tənliyinin təyin oblastının hissəsi olarsa $(D_1\subset D)$, onda (1) tənliyinin köklərinin hamısının və ya bəzilərinin itməsi halları baş verə bilər. Məsələn,

$$(x-1)(x+2)=x^2-x \tag{5}$$

tənliyinin təyin oblastı $D=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$ çoxluğudur; əgər bu tənliyin hər iki tərəfini $\dfrac{1}{x-1}$ ifadəsinə vursaq,

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\frac{x^2-x}{x-1} \tag{6}$$

tənliyini alarıq ki, onun təyin oblastı $D_1=\{x\,|\,x\neq 1\}$ olar. Göründüyü kimi $x=1$ (5) tənliyinin kökü olduğu halda (6) tənliyinin kökü deyildir.

Tənliklərin həlli zamanı eynilik çevirmələrindən istifadə etdikdə köklərin itməsi və kənar köklərin alınması baş vermir. Misal üçün belə bir tənliyə baxaq:

Misal. $\lg x^2 = 2$. Bu tənliyin təyin oblastı $D = (-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty)$ -dir. Sol tərəfi

$$2\lg x = 2, \quad D_1 = (0, +\infty)$$

şəklində yazsaq tənliyin təyin oblastı daralar. Alınmış tənliyin kökü $x = 10$ olur.

İndi verilmiş tənliyi eynilik çevirməsi aparmaqla həll edək:

$$2\lg|x| = 2, \quad \lg|x| = 1, \quad |x| = 10, \quad x \neq 10 .$$

Bilavasitə yoxlamaqla inanırıq ki, dəyişənin hər iki tapılmış qiymətləri verilmiş tənliyin kökləridir, yəni birinci üsulla həll zamanı $x = -10$ kökü itirilmişdi.

Tərif. Əgər

$$f(x) = \varphi(x) \tag{7}$$

və

$$f_1(x) = \varphi_1(x) \tag{8}$$

tənliklərinin müəyyən bir M çoxluğunda kökləri eynidirsə, onda (7) və (8) tənliklərinə M çoxluğunda eynigüclü tənliklər deyilir.

$$\{f(x) = \varphi(x)\} \Leftrightarrow \{f_1(x) = \varphi_1(x)\}$$

və ya (7)$\Leftrightarrow$(8) yazıları (7) və (8) tənliklərinin eynigüclü olduqlarını ifadə edir.

Bir neçə sadə misalı nəzərdən keçirək.

Misal. $\{x + 4 = 3x\} \Leftrightarrow \{x - 2 = 0\}$ ($x = 2$ hər iki tənliyin köküdür).

Misal. $\{\lg x = \lg(-x)\} \Leftrightarrow \left\{2 - x + \dfrac{1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}\right\}$.

Hər iki tənliyin kökü olmadığından onlar eynigüclüdürlər.

Misal. $x^2 = x$ və $\dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$ tənlikləri eynigüclü deyildir, çünki $x = 0$ birinci tənliyin köküdür, lakin ikinci tənliyi ödəməyir, çünki $\boldsymbol{x=0}$ qiymətində ikinci tənliyin sol və sağ tərəfləri təyin olunmayıb.

Tərif. Fərz edək ki,

$$f(x)=\varphi(x) \tag{9}$$

$$f_1(x)=\varphi_1(x) \tag{10}$$

tənlikləri verilmişdir. Əgər (9) tənliyinin bütün kökləri (10) tənliyinin də kökləri olarsa, onda (10) tənliyinə (9) tənliyinin nəticəsi deyilir.

Bəzi hallarda «(10) tənliyi (9) tənliyinin nəticəsidir» ifadəsinin əvəzinə «(10) tənliyi (9) tənliyindən alınmışdır» ifadəsini işlədirlər.

Verilmiş bu tərifdən aydın olur ki, (9) və (10) tənlikləri yalnız o zaman eynigüclü olar ki, onlardan hər biri o birinin nəticəsi olsun. Tərifdən alınan digər nəticə odur ki, (9) tənliyinin nəticəsi olan (10) tənliyinin həllər çoxluğu (9) tənliyinin həllər çoxluğundan geniş ola bilər.

(10) tənliyi (9) tənliyinin nəticəsidir təklifi $\{f(x)=\varphi(x)\}\Rightarrow\{f_1(x)=\varphi_1(x)\}$ kimi işarə olunur.

Misal. $\boldsymbol{\{x=1\}\Rightarrow\{x^2=1\}}$. $\boldsymbol{x=1}$ ədədi birinci tənliyin yeganə kökü olmaqla, həm də ikinci tənliyin kökündür.

Misal. $\{3x=2x+1\}\Rightarrow\{\sin 3x=\sin(2x+1)\}$. Burada ikinci tənlik birincinin nəticəsidir (tərsi doğru deyil, yəni ikinci tənliyin həllər çoxluğu daha genişdir).

İndi tənliklərin dizyunksiyası anlayışını nəzərdən keçirək.

Tərif. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda deyəcəyik ki,

$$f(x)=\varphi(x) \tag{11}$$

tənliyi

$$f_1(x)=\varphi_1(x), f_2(x)=\varphi_2(x),\ldots, f_n(x)=\varphi_n(x) \tag{12}$$

tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclüdür:

1) (11) tənliyinin hər bir kökü (12) tənliklərindən heç olmazsa birinin kökündür;
2) (12) tənliklərindən istənilən birinin istənilən kökü (11) tənliyinin kökündür.

Bu tərifdən aydın olur ki, əgər (11) tənliyi (12) tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclüdürsə və əgər M (11) tənliyinin həllər çoxluğudursa, $M_1, M_2, \cdots, M_n$ isə uyğun olaraq $f_1(x) = \varphi_1(x),\ f_2(x) = \varphi_2(x), \cdots, f_n(x) = \varphi_n(x)$ tənliklərinin həllər çoxluğudursa, onda

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$$

olar.

(11) tənliyinin (12) tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclü olması təklifini

$$\{f(x) = \varphi(x)\} \Leftrightarrow \{[f_1(x) = \varphi_1(x)] \vee$$
$$\vee [f_2(x) = \varphi_2(x)] \vee \cdots \vee [f_n(x) = \varphi_n(x)]\}$$

kimi işarə edirlər.

Misal. $\{x^2 - 5x + 6 = 0\} \Leftrightarrow \{[x - 2 = 0] \vee [x - 3 = 0]\}$.

Misal. $\{\sin^2 x = \cos^4 x\} \Leftrightarrow \{[\sin x - \cos^2 x = 0] \vee [\sin x +$
$+ \cos^2 x = 0]\}$.

Verilmiş tənliyin sadə tənliklərin dizyunksiyası ilə əvəz olunması tənliklərin həlli prosesində geniş tətbiq olunur.

Bu halda aşağıdakı qaydalara əməl olunması tələb olunur:

1) Göstərilən keçiddə köklərin itməsinə yol verilmir, yəni əgər x_0 $f(x) = \varphi(x)$ tənliyinin köküdürsə, onda $\boldsymbol{x_0}$ ədədi $f_1(x) = \varphi_1(x),\ f_2(x) = \varphi_2(x), \ldots, f_n(x) = \varphi_n(x)$ tənliklərindən heç olmazsa birinin kökü olmalıdır;

2) Verilmiş $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x)}$ tənliyinin həll edilməi üçün $\boldsymbol{f_1(x) = \varphi_1(x),\ f_2(x) = \varphi_2(x), \ldots, f_n(x) = \varphi_n(x)}$ tənliklərinin hər birini həll etmək və bütün bu tənliklərin həlləri çoxluqlarının birləşməsini götürmək lazımdır;

3) Əgər kənar köklərin yaranmayacağına inam yoxdursa, onda birləşmə çoxluğuna daxil olan hər bir ədədəin verilmiş tənliyin kökü olub və ya olmamasını yoxlamaqla dəqiqləşdirmək lazımdır.

§2. Tənliklərin eynigüclülüyü haqqında əsas teoremlər.

Teorem 1. Təyin oblastı D çoxluğu olan tənliyin bir tərəfindən hər hansı bir toplananı əks işarə ilə o biri tərəfə keçirdikdə, alınan tənlik verilmiş tənliklə eynigüclü olur, yəni

$$f(x) = \varphi(x) + g(x) \tag{13}$$

və

$$f(x) - \varphi(x) = g(x) \tag{14}$$

tənlikləri eynigüclüdür.

İsbatı. Fərz etsək ki, $\boldsymbol{x_0}$ (13) tənliyinin köküdür, yəni

$$f(x_0) = \varphi(x_0) + g(x_0) \tag{15}$$

doğru ədədi bərabərlikdir, bu onu ifadə edir ki:

1) $f(x_0), \varphi(x_0), g(x_0)$ ədədləri təyin olunub və

2) bu ədədlər (13) münasibətilə bir-birinə bağlıdır. (15) bərabərliyinin hər iki tərəfinə $-\varphi(x_0)$ ədədini əlavə edərək, alırıq:

$$f(x_0) - \varphi(x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0) + g(x_0)$$

və ya

$$f(x_0) - \varphi(x_0) = g(x_0)\,. \tag{16}$$

Bu isə o deməkdir ki, $\boldsymbol{x_0}$ ədədi (14) tənliyinin köküdür.

İndi fərz edək ki, $\boldsymbol{x_0}$ (14) tənliyinin köküdür, yəni $f(x_0) - \varphi(x_0) = g(x_0)$. Buradan isə $f(x_0) = g(x_0) + \varphi(x_0)$ alınır, yəni x_0 (13) tənliyinin köküdür.

Beləliklə, isbat etdik ki, hər hansı bir toplananı əks işarə ilə tənliyin bir tərəfindən o biri tərəfinə keçirdikdə əvvəlki tənliklə eynigüclü tənlik alınır.

Xüsusi halda, biz, əgər lazım olarsa, bütün toplananları tənliyin bir tərəfinə keçirə bilərik. Başqa sözlə,

$$\{f(x)=\varphi(x)\} \Leftrightarrow \{f(x)-\varphi(x)=0\}.$$

İndi $D=D(f)\cap D(\varphi)\cap D(g)$ çoxluğunda aşağıdakı tənliklərə baxaq:

$$f(x)+\varphi(x)-\varphi(x)=g(x) \quad , \tag{17}$$

$$f(x)=g(x). \tag{18}$$

(17) tənliyindən (18) tənliyinə keçid məsələsinə baxmazdan əvvəl belə bir qeyd edək. Bundan əvvəl isbat etdiyimiz teoremə əsasən (17) tənliyi

$$\boldsymbol{f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)} \tag{19}$$

tənliyi ilə eynigüclüdür.

(17) tənliyindən (18) tənliyinə və yaxud da onunla eyni güclü olan (19) tənliyindən (18) tənliyinə keçidə aid olan ümumi təklifi ifadə etməzdən əvvəl bir neçə misala baxaq.

Misal. $\boldsymbol{\{x^4-x+2=x^2-x+2\} \Leftrightarrow \{x^4=x^2\}}$**.**

$x^4-x+2=x^2-x+2$ tənliyinin hər iki tərəfindəki eyni $\boldsymbol{\varphi(x)=x-2}$ hədlərini atdıqdan sonra onunla eynigüclü olan $\boldsymbol{x^4=x^2}$ tənliyi alınır.

Misal. $\{x^2+\lg x=x+\lg x\} \Rightarrow \{x^2=x\}$.

$x^2=x$ tənliyinin iki kökü vardır: $x_1=1, x_2=0,$ lakin $x^2+\lg x=x+\lg x$ tənliyinin isə yeganə kökü vardır $x=1$ ($x=0$ isə $x^2+\lg x=x+\lg x$ tənliyinin kökü deyildir, çünki $x=0$ qiymətində tənliyin sol və sağ tərəfləri təyin olunmamışlar).

Beləliklə, $\boldsymbol{x^2=x}$ tənliyi $x^2+\lg x=x+\lg x$ tənliyi ilə eynigüclü deyildir, yalnız onun nəticəsidir.

$x^2+\lg x=x+\lg x$ tənliyindən $x^2=x$ tənliyinə keçdikdə $x=0$ kənar kökünün yaranması onunla bağlıdır ki, bu vaxt birinci tənliyin sol və sağ tərəflərində duran funksiyaların təyin oblastları genişlənir: $x^2+\lg x=x+\lg x$ tənliyində sol və sağ tərəflərin təyin oblastı $x>0$ olduğu halda, $x^2=x$ tənliyində onlar $\boldsymbol{x}$-in bütün həqiqi qiymətləridir.

Aydındır ki, tərs keçid, yəni $x^2 = x$ tənliyindən $x^2 + \lg x = x + \lg x$ tənliyinə keçid isə yol verilməzdir, çünki bu keçid $x = 0$ kökünün itirilməsinə gətirir.

Teorem 2. (18) tənliyinin sol və sağ tərəflərində duran $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastını M ilə işarə edək. Əgər M çoxluğu $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxil olarsa, onda M çoxluğunda (17) tənliyi (18) tənliyi ilə eynigüclüdür (həmçinin (19) tənliyi (18) tənliyi ilə eynigüclüdür).

İsbatı. Doğrudan da, əgər x_0 (18) tənliyinin kökündürsə, onda x_0 $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarından hər birinin təyin oblastına daxildir (yəni M çoxluğuna daxildir) və $f(x_0) = g(x_0)$ ədədi bərabərliyi doğrudur. Digər tərəfdən x_0 M çoxluğuna daxil olduğundan, onda fərziyyəyə əsasən x_0 həmçinin $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxildir, yəni $\varphi(x_0)$ ədədi təyin olunmuşdur. $f(x_0) = g(x_0)$ bərabərliyinin hər iki tərəfinə $\varphi(x_0)$ ədədini əlavə edərək doğru $f(x_0) + \varphi(x_0) = g(x_0) + \varphi(x_0)$ bərabərliyini alarıq və bu da onu göstərir ki, x_0 (19) tənliyinin köküdür. Beləliklə, $(18) \Rightarrow (19)$. Bunun tərsi isə (yəni $(19) \Rightarrow (18)$) bildiyimiz kimi həmişə doğrudur. Deməli, $(18) \Leftrightarrow (19)$ (və elə ona görə də (17) $\Leftrightarrow$ (18)).

Teoremin isbatı başa çatdı.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələri çıxarmaq olar:

1) (17) $\Rightarrow$ (18);
2) Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsi $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxil olarsa, onda (17) $\Leftrightarrow$ (18)olar;
3) Əgər (17) və (18) tənliklərinin eynigüclü olmasına inam yoxdursa, onda (18) tənliyindən (17) tənliyinə keçid yolverilməzdir, o, köklərin itirilməsinə gətirib çıxara bilər.

İndi

$$f(x)=g(x) \tag{20}$$
tənliyinə və onun hər iki tərəfini müəyyən $\varphi(x)$ ifadəsinə vurmaqla alınan
$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x) \tag{21}$$
tənliyinə baxaq.

Bu keçid barəsində aşağıdakı teoremi ifadə etmək olar:

Teorem 3.

1) Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsi $\varphi(x)$ funksiyalarının təyin oblastına daxildirsə, onda (21) tənliyi (20) tənliyinin nəticəsidir, yəni $(20)\Rightarrow(21)$;
2) Əgər 1) şərti ödəndikdə $\varphi(x)$ funksiyası $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsində sıfırdan fərqlidirsə, onda (20) və (21) tənlikləri eynigüclüdür, yəni (20) $\Leftrightarrow$ (21).

İsbatı. 1) Fərz edək ki, x_0 (20) tənliyinin köküdür, onda x_0 $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarından hər birinin təyin oblastına daxildir (yəni həmin oblastlarının kəsişməsinə) və $f(x_0)=g(x_0)$ doğru ədədi bərabərlikdir. Şərtdəki fərziyyəyə əsasən x_0 həm də $\varphi(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxil olduğundan, $\varphi(x_0)$ ədədi təyin olunmuşdur. $f(x_0)=g(x_0)$ bərabərliyinin hər iki tərəfini $\varphi(x_0)$ ədədinə vurmaqla $f(x_0)\varphi(x_0)=g(x_0)\varphi(x_0)$ doğru ədədi bərabərliyini alarıq ki, bu da x_0-ın (21) tənliyinin kökü olduğunu göstərir. Deməli, (20) $\Rightarrow$ (21);
2) Fərz edək ki, 1)-dəki bütün şərtlər ödənməklə x_0 ədədi (21) tənliyinin köküdür, yəni $f(x_0)\varphi(x_0)=g(x_0)\varphi(x_0)$ doğru ədədi bərabərlikdir. Şərtə görə $\varphi(x_0)\neq 0$ olduğundan axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfini $\varphi(x_0)$ ədədinə bölməklə $f(x_0)=g(x_0)$ olduğunu alarıq və bu onu göstərir ki, x_0 (20)

tənliyinin köküdür. Beləliklə, $(20) \Rightarrow (21)$. Tərs keçidin doğru olduğunu bundan əvvəl göstərdik. Deməli, $(20) \Leftrightarrow (21)$.

Misal. $x^2 - x = 0$ tənliyinə baxaq.
Bu tənliyin hər iki tərəfini $\frac{1}{x}$-ə vuraraq,

$$\frac{x^2 - x}{x} = 0$$

tənliyini alarıq ki, bu da verilmiş tənliyin nəticəsi deyildir. Doğrudan da ilk verilmiş tənliyin iki kökü vardır: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$, lakin $\frac{x^2 - x}{x} = 0$ tənliyinin yalnız bir kökü vardır, $x = 1$. Kökün itirilməsinin səbəbi odur ki, $\frac{1}{x}$ funksiyası $x = 0$ qiymətində təyin olunmamışdır, x-in elə bu qiyməti də verilmiş tənliyin kökүdür.

İndi

$$f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) = 0 \tag{22}$$

tənliyindən

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0 \tag{23}$$

tənliklərin dizyunksiyasına keçidi nəzərdən keçirək. Belə keçid tənliklərin həllində kifayət qədər tez-tez tətbiq olunur.

(22) və (23) tənliklər küllisinin eynigüclülüyü haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 4. Əgər $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ funksiyalarının hamısı M çoxluğunda təyin olunubsa, onda bu çoxluqda (22) tənliyi (23) tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclüdür.

İsbatı. Fərz edək ki, $x_0 \in M$ və $x = x_0$ (23) tənliklərindən birinin kökүdür. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $x = x_0$ $f_1(x) = 0$ tənliyinin kökүdür. Onda $f_1(x)$ funksiyası $x = x_0$ qiymətində təyin olunmuşdur və $f_1(x_0) = 0$. $x_0 \in M$

olduğundan, həmçinin $f_2(x),\dots,f_n(x)$ funksiyaları da $x = x_0$ qiymətində təyin olunublar və

$$f_1(x_0)f_2(x_0)\cdots f_n(x_0) = 0$$

(sol tərəfdəki birinci vuruq sıfra bərabərdir).

Beləliklə,

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$$

tənliklərindən hər birinin istənilən kökü (M çoxluğuna daxil olan) (31) tənliyinin köküdür.

Tərsinə, fərz edək ki, $x = a$ (22) tənliyinin elə həllidir ki, $a \in M$ şərti ödənir. Onda bütün $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x)$ funksiyaları $x = a$ qiymətində təyin olunublar və

$$f_1(a)f_2(a)\cdots f_n(a) = 0 .$$

Buradan alınır ki, $f_1(a), f_2(a),\dots,f_n(a)$ ədədlərindən heç olmazsa biri sıfra bərabərdir. Bu isə onu göstərir ki, $x = a$ ədədi

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$$

tənliklərindən heç olmazsa birinin köküdür.

Teoremin isbatı başa çatdı.

İsbat olunmuş bu teorem tənliklərin həll edilməsində tez-tez tətbiq edilən vuruqlara ayırma üsulunun əsasında durur.

Misal. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 = x^3(x^2 - 1)(x + 3)$, ona görə də $x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 = 0$ tənliyi

$$x^3 = 0,\ x^2 - 1 = 0,\ x + 3 = 0$$

tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclüdür və aşağıdakı kökləri vardır:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -3 .$$

Aşağıdakı misal isə onu göstərir ki, ümumi halda

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = 0$$

tənliyi

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$$

tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclü deyildir.

Misal. Fərz edək ki, $f_1(x)=x^2-1$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Onda $f_2(x)=0$ tənliyinin kökləri yoxdur, $f_1(x)=0$ tənliyinin iki kökü vardır: $x_1=1, x_2=-1$. $f_1(x)f_2(x)=0$ tənliyinin isə yalnız bir kökü vardır: $x_1=-1$, belə ki, $x=1$ olduqda bu tənliyin sol tərəfi təyin olunmayıb.

Teorem 5. (22) tənliyinin hər bir kökü (23) tənliklərindən heç olmazsa birinin köküdür. Başqa sözlə, (23 tənliklərinin dizyunksiyası (22) tənliyinin nəticəsidir:

$$\{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=0\}\Rightarrow\{[f_1(x)=0]\vee$$
$$\vee[f_2(x)=0]\vee\cdots\vee[f_n(x)=0]\}.$$

Bu teoremin isbatı bundan əvvəlki teoremdən çıxır. Bu teoremdən alınır ki, əgər biz (23) tənliklərinin hamısının köklərini tapsaq, onda (22) tənliyinin bütün kökləri həmin köklərin arasında olacaqdır və bunların içərisində (22) tənliyinin kökləri olmayan ədədlər də ola bilər. (23) tənliyinin kökləri içərisində x-in elə qiymətləri (22) tənliyi üçün kənar köklər olacaqdır ki, onlar üçün $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ funksiyalarından heç olmazsa biri təyin olunmasın.

Qeyd. Yuxarıda göstərmişdik ki,

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x) \qquad (24)$$

tənliyindən

$$f(x)=g(x)$$

tənliyinə keçid ümumi halda yolverilməzdir.

Adətən (24) tənliyini həll edərkən belə edirlər: (24) tənliyinin əvəzinə

$$[f(x)-g(x)]\varphi(x)=0 \qquad (25)$$

tənliyinə baxırlar ki, bu da (24) tənliyi ilə eynigüclüdür. Öz növbəsində,

$$f(x)-g(x)=0,\quad \varphi(x)=0 \qquad (26)$$

tənliklərinin dizyunksiiyası (25) tənliyinin nəticəsidir.

Beləliklə, əgər biz (26) tənliklərini həll etsək, onların həlləri çoxluqlarını birləşdirsək, sonra onları yoxlamaqla ((24)

tənliyində x-in yerinə yazmaqla) artıq olan kökləri kənarlaşdıraraq (24) tənliyinin bütün köklərini tapa bilərik.

Misal. Tənliyi həll edin:

$$\sin x\cdot \operatorname{ctg}2x\cdot \arcsin(x-1)\cdot \lg(x-1)=0.$$

Həlli.

$\sin x=0,\ \operatorname{ctg}2x=0,\ \arcsin(x-1)=0,\ \lg(x-1)=0$ tənliklərinə baxaq. Onların kökləri uyğun olaraq aşağıdakıladır:

$$x=\pi n,\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\quad (n\in Z),\quad x=1,\ x=2.$$

Bu köklərdən verilmiş tənliyin sol tərəfinin təyin oblastına daxil olanlar həmin tənliyin kökləridir. Tənliyin təyin oblastını M ilə işarə edək. M çoxluğu x-in bütün elə qiymətlərindən təşkil olunmuşdur ki, həmin qiymətlərdə $\sin nx$, $\operatorname{ctg}2x$, $\arcsin(x-1)$, $\lg(x-1)$ funksiyalarından hər biri təyin olunub. $\sin x$ funksiyası x-in bütün qiymətlərində təyin olunub, qalan üç funksiyanın təyin oblastları isə uyğun olaraq aşağıdakı şərtlərlə verilir:

$$x\neq\frac{\pi x}{2}\ (k\in Z),\quad 0\le x\le 2,\ x>1.$$

Beləliklə, M çoxluğu x-in elə qiymətlərindən təşkil olunmuşdur ki, onlar $1<x\le 2$ bərabərsizliyi və $x\neq\frac{\pi k}{2}$ $(k\in Z)$ şərtini ödəyirlər, yəni çoxluq $1<x\le 2$ yarım intervalından $\frac{\pi}{2}$ nöqtəsini atmaqla alınır. $\sin x=0$ tənliyinin kökləri olan $x=\pi n$ $(n\in Z)$ ədədləri M çoxluğuna daxil deyillər və onlar verilmiş tənlik üçün kənar köklərdir. $\arcsin(x-1)=0$ tənliyinin kökü olan $x=1$ ədədi də M çoxluğuna daxil deyil və o da kənar kökdür. Sonra, $\lg(x-1)=0$ tənliyinin kökü olan $x=2$ ədədi M çoxluğuna daxildir və verilmiş tənliyin köküdür.

Nəhayət, $\operatorname{ctg}2x=0$ tənliyini ödəyən $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$ şəklində olan ədədlərdən heç biri $1<x\le 2$

bərabərsizliyini ödəməyir və ona görə də M çoxluğuna daxil deyil.

Beləliklə, yalnız bir ədəd, $x_1 = 2$ verilmiş tənliyin köküdür.

İndi, verilmiş

$$f(x) = g(x) \tag{27}$$

tənliyindən

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n \tag{28}$$

tənliyinə keçidi nəzərdən keçirək.

Belə keçid tənliklərin həllində tez-tez istifadə olunur (xüsusilə də irrasional tənliklərin həllində).

Fərz edək ki, $f(x)$ və $g(x)$ M çoxlğunda təyin olunmuş həqiqi qiymətli funksiyalar, n istənilən natural ədəd, $M \subset R$ və $f(x), g(x) \in R$.

Aşağıdakı təkliflərin doğruluğunu asanlıqla göstərə bilərik:

1) n istnilən natural ədəd olduqda (28) tənliyi (27) tənliyinin nəticəsidir;

2) Əgər n tək ədəddirsə ($n = 2k + 1$), onda M çoxluğunda (27) və (28) tənlikləri eynigüclüdürlər;

3) Əgər n cüt ədəddirsə, onda (28) tənliyi M çoxluğunda

$$|f(x)| = |g(x)| \tag{29}$$

tənliyi ilə eynigüclüdür, bu tənlik isə öz növbəsində M çoxluğunda

$$f(x) = g(x) \text{ və } f(x) = -g(x)$$

tənliklərinin dizyunksiyası ilə eynigüclüdür. Əgər bu halda məlum olarsa ki, bu tənliklərdən ikincisinin həlli yoxdur (məsələn, əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının hər ikisi M çoxluğunda yalnız müsbət qiymətlər alırsa), onda (28) tənliyi (27) tənliyi ilə eynigüclü olacaqdır. Ümumi halda, n-in cüt qiymətlərində (28) tənliyindən (27) tənliyinə keçid yolverilməzdir, belə ki, həmin keçid köklərin itirilməsinə gətirib çıxara bilər.

Misal. Tənliyi həll edin:

$$\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1. \tag{30}$$

Həlli. (30) tənliyinin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltdikdən sonra həmin tənliyin nəticəsi olan

$$2x^2+5x-3=x^2+2x+1$$

tənliyini alırıq. Alınan tənlik

$$x^2+3x-4=0$$

tənliyi ilə eynigüclüdür və bu tənliyin kökləri $x_1=-4$ və $x_2=1$ ədədləridir. Yoxlama göstərir ki, $x_1=-4$ kökü (30) tənliyi üçün kənar kökdür, $x_2=1$ kökü isə (30) tənliyini ödəyir. Beləliklə, (30) tənliyinin yeganə $x=1$ kökü vardır.

İndi tənliklərin həll edilməsində istifadə edilən «sərbəst dəyişənin əvəz edilməsi üsulu»nu nəzərdən keçirək. Sərbəst dəyişənin əvəz edilməsi üsulu

$$f(g(x))=0 \tag{31}$$

şəklində olan tənliklərin həll edilməsində tətbiq olunur.

Bu üsul aşağıdakı teoremə əsaslanır:

Teorem 6.

$$f(t)=0 \tag{32}$$

tənliyinə baxaq, burada t-köməkçi dəyişəndir və fərz edək ki, $t_1,t_2,\ldots,t_k$ (32) tənliyinin kökləridir. Onda (31) tənliyinin həll edilməsi üçün

$$g(x)=t_m \quad (m=1,2,\ldots,k) \tag{33}$$

tənliklərindən hər birinin bütün köklərinin tapılması və bu tənliklərin köklər çoxluqlarının birləşdirilməsi kifayətdir. Başqa sözlə

$$\{f(g(x))=0\} \Leftrightarrow \{[g(x)=t_1]\vee[g(x)=t_2]\vee\cdots\vee[g(x)=t_k]\}.$$

İsbatı. Fərz edək ki, $t=t_m$ (32) tənliyinin köklərindən biridir, $x=x_0$ isə $g(x)=t_m$ tənliyinin kökүdür. Onda $f(t_m)=0$, $g(x_0)=t_m$ və ona görə də $f(g(x_0))=0$ olar, yəni $x=x_0$ (31) tənliyinin kökүdür. Tərsinə, fərz edək ki, $x=x_0$ (31) tənliyinin kökүdür, yəni $f(g(x_0))=0$. Onda aydındır ki, x_0 $g(x)$ funksiyasının təyin oblastına daxildir. $g(x_0)=t_0$ işarə edək. $f(g(x_0))=0$ bərabərliyindən biz alırıq ki, $f(t_0)=0$, yəni t_0 (32) tənliyinin köklərindən biridir, tutaq ki, $t_0=t_m$. Onda aydındır ki, x_0 $g(x)=t_m$ tənliyinin kökүdür.

İsbat edilmiş bu teorem (31) tənliyinin həllinin bir neçə sadə (32), (33) şəklində olan tənliklərin həllinə gətirilməsinə imkan verir.

Adətən bu teorem aşağıdakı kimi tətbiq olunur. Fərz edək ki, müəyyən $f(x)=0$ tənliyi verilmişdir. Məsələ ondan ibarətdir ki, $g(x)$ funksiyasını bacarıqla seçib, $t=g(x)$ yeni sərbəst dəyişənini daxil edərək, $F(x)$ funksiyasını t vasitəsilə ifadə etmək, yəni onu $F(x)=f(g(x))$ şəklində ifadə etmək lazımdır. Nəticədə verilmiş tənlik (31) şəklində yazılmış olacaqdır və sonra onu həll etmək üçün isbat edilmiş teoremi tətbiq etmək lazım olacaqdır. Tənliklərin belə həll edilməsinə dəyişənin əvəz edilməsi üsulu deyilir (belə ki, əvvəlcə x dəyişəninin yeni köməkçi dəyişən t ilə əvəz olunduğu (32) tənliyi həll edilir).

Misal . Tənliyi həll edin:

$$x^2+\frac{4}{x^2}=x-\frac{2}{x}+4.$$

Həlli. Yeni dəyişən daxil edək: $t=x-\frac{2}{x}$. Onda verilmiş tənlik bu şəklə düşər: $t^2-t=0$.

Axırıncı tənliyin kökləri $t_1=0, t_2=1$ olar. Deməli,

$$\left\{x^2+\frac{4}{x^2}=x-\frac{2}{x}+4\right\}\Leftrightarrow\left\{\left[x-\frac{2}{x}=0\right]\vee\left[x-\frac{2}{x}=1\right]\right\}.$$

Onda $x-\frac{2}{x}=0$ və $x-\frac{2}{x}=1$ tənliklərini həll edərək, verilmiş tənliyin bütün köklərini tapırıq:

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2},\ x_3=2,\ x_4=-1.$$

§3. Məsələlərin tənlik qurmaq üsulu ilə həll edilməsi.

Məsələlərin tənlik qurmaqla həlli prosesini aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

1. Məsələnin həlli planının axtarılması.

Bu mərhələdə əsas məchul kəmiyyət (kəmiyyətlər) seçilir və işarə edilir. Qalan kəmiyyətlər verilənlər və işarə olunmuş kəmiyyətlərlə ifadə olunur. Sonra isə bu ifadələr məsələnin şərtinə uyğun müqayisə olunur və s.

2. Tənliyin qurulması.

Bu mərhələdə qurulmuş ifadələrdən bərabər olanlar seçilir və məsələnin həlli üçün tənlik qurulur.

3. Tənliyin həll edilməsi.

Bu mərhələdə qurulmuş tənlik həll edilir.

4. Həllin araşdırılması.

Bu mərhələdə tənliyin tapılmış kökləri arasında məsələ üçün kənar köklərin olub-olmaması aydınlaşdırılır, tapılan köklərin məsələnin bütün həllərini əhatə edib-etməməsi, məsələnin xüsusi həllinin olması, məsələnin həllinin olmadığı hallar və s. müəyyən edilir.

5. Cavabın müəyyən edilməsi.

Burada əvvəlki mərhələdəki araşdırmalara əsaslanaraq məsələnin cavabı müəyyən edilir.

Qeyd edək ki, məsələnin həlli prosesinin bütün mərhələləri öz aralarında sıx əlaqəyə malikdir. Buna əmin olmaq üçün aşağıdakı məsələlərin həllinə diqqət gətirək.

Məsələ 1. Elə üç ədəd tapın ki, onlardan ən böyüyü ortadakından ən kiçiyin üçdə biri qədər böyük, ortadakı ən kiçikdən ən böyüyün üçdə biri qədər böyük, ən kiçik isə ortadakının üçdə birindən 10 vahid böyük olsun.

Həlli. Əgər məsələnin tələbinə uyğun olaraq axtarılan ədədlərdən birini x-lə işarə edib, qalanlarını onun vastəsilə ifadə etsək (və ya üç məchullu tənliklər sistemi qursaq), onda adi tənlik alınacaq, lakin onun qurulması və həlli xeyli mürəkkəb olacaqdır.

Əgər qəbul etsək ki, ədədlərdən ən kiçiyi ($\boldsymbol{x+10}$)-dur, onda ortadakı ədəd $\boldsymbol{3x}$ və ən böyük ədəd isə $\boldsymbol{(6x-30)}$ olar. Digər tərəfdən məsələnin şərtinə əsasən kiçik ədəd $\boldsymbol{(9x-90)}$-dır.

Bütün bu araşdırmaları nəzərə alaraq, belə bir tənliyi yaza bilərik:

$$\boldsymbol{x+10=9x-90.}$$

Tənliyi həll edərək tapırıq: $\boldsymbol{x=12{,}5}$.

Məsələnin araşdırılmasını və şərtini nəzərə alaraq, tapırıq: ən kiçik ədəd: $\boldsymbol{x+10=22{,}5}$; ortadakı ədəd: $\boldsymbol{3x=37{,}5}$; ən böyük ədəd: $\boldsymbol{6x-30=45}$-dir.

Göründüyü kimi tapılmış bu üç ədəd məsələnin şərtlərini ödəyən ədədləridir.

Cavab: **22,5; 37,5; 45.**

Qeyd edək ki, bu incə həll və həm də məsələnin özü Diofanta məxsusdur.

Bu məsələnin həlli göstərdi ki, məsələnin tənlik qurmaqla həlli zamanı əsas məchul kəmiyyətin rasional seçilməsi onun həllini sadələşdirir. Lakin məsələlərin tənlik qurmaqla həllinin öyrənilməsinin ergən mərhələlərində əsas məchul kəmiyyət kimi məsələdə tapılması tələb olunan kəmiyyəti götürməkdir.

Misal 2. İki qutuda birlikdə **12,8** kq çay vardır. Əgər birinci qutudan **0,4** kq çay götürülüb, ikinci qutuya qoyularsa, onda hər iki qutuda bərabər miqdarda çay olar. Hər qutuda nə qədər çay var idi?

Həlli. Qutulardan hər hansı birində olan çayın miqdarını məchul kəmiyyətlə işarə etmək olar. Fərz edək ki, birinci qutuda x kq çay vardır, onda məsələnn şərtinə əsasən ikinci qutuda olan çayın miqdarı $(12{,}8-x)$ kq olar. Əgər birinci qutudan $0{,}4$ kq çay götürülərsə, onda orada qalan çayın miqdarı $(x-0{,}4)$ kq olar, ikinci qutuya $0{,}4$ kq çay əlavə etdikdən sonra orada olan çayın miqdarı $((12{,}8-x)+0{,}4)$ kq olacaqdır.

Məsələnin şərtinə əsasən aşağıdakı tənliyi qura bilərik:

$$x-0{,}4=(12{,}8-x)+0{,}4.$$

Alınmış bir məchullu və birdərəcəli tənliyi həll edərək, onun kökünü tapırıq: $x=6{,}8$.

Birnci qutuda olan çayın miqdarı $6{,}8$ kq olduğundan, ikinci qutuda: $12{,}8-6{,}8=6$ kq çay olar.

Tapılmış hər iki ədəd məsələnin şərtinə uyğun olan ədədlərdir.

avab : $6{,}8$ kq; 6 kq.

Məsələ 3. Üç çəndə birlikdə $50\ l$ benzn vardır və birinci çəndə olan benzinin miqdarı ikinci çəndəkndən $10\ l$ çoxdur. Birinci çəndən $26\ l$ götürüb üçüncü çənə tökdükdən sonra ikinci və üçüncü çənlərdə bərabər miqdarda benzin oldu. Əvvəlcə birinci çəndə neçə litr benzin var idi?

Həlli. Fərz edək ki, əvvəlcə birinci çəndə $x\ l$ benzin var idi, onda ikinci çəndəki benzinin miqdarı $(x-10)\ l$ olar. Bu halda üçüncü çəndə olan benzin: $[50-x-(x-10)]\ l$ olmalıdır. Birinci çəndən $26\ l$ üçüncü çənə tökdükdən sonra birinci çəndə $(x-26)\ l$ benzin qalar və üçüncü çəndə isə $[50-x-(x-10)+26]\ l$ benzin olar.

Məsələnin şərtinə əsasən aşağıdakı tənliyi qura bilərik:

$$x-10=50-x-(x-10)+26.$$

Tənliyi həll edərək, onun yeganə kökünü tapırıq: $x=32$. İndi araşdıraq, görək məsələ həll edildimi?

Məsələnin şərtinə əsasən birinci çəndən üçüncüyə $26\ l$

benzin tökülmüşdür və bundan sonra ikinci və üçüncü çəndə bərabər miqdarda benzin olmuşdur, yəni bu iki çəndə birlikdə olan benzinin miqdarı **52** l -dən az deyildir, bu isə məsələnin şərtində verilmiş, bütün üç çəndə birlikdə **50** l benzin olmasına uyğun gəlmir. Ona görə ki, baxılan məsələnin riyazi modeli aşağıdakı qarışıq sistemdən ibarətdir:

$$\begin{cases} x-10=50-x-(x-10)+26, \\ x>0, \\ x-10>0, \\ 50-x-(x-10)>0, \\ x-26\geq 0, \\ 50-x-(x-10)+26>0, \\ x+(x-10)<50, \\ x+[50-x-(x-10)]<50, \\ (x-10)+[50-x-(x-10)]<50. \end{cases}$$

Əgər bərabərszlklər sistemini ayrıca götürsək, aydın olur ki, həmin sistem $26\leq x<30$ ikiqat bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür və ona görə də vermiş qarışıq sistemi aşağıdakı sistemlə əvəz etmək olar:

$$\begin{cases} x-10=50-x-(x-10)+26, \\ 26\leq x<30. \end{cases}$$

Görürük ki, $x=32$ ikiiqat bərabərsiliyi ödəməyir və ona görə də məsələnin həlli deyildir.

İndi parametr daxil olan bir məsələni nəzərdən keçirək.

Məsələ 4. a ton yüky daşımaq üçün avtomobillər ayrılmışdır. Onlardan ikisi başqa işdə istifadə olunduğundan hər avtomobilə nəzərdə tutulduğundan **1** ton artıq yükləmək lazım gəldi. Yükün daşınması ilə neçə avtomobil məşqul idi?

Həlli. Əvvəlcə onu qeyd edək ki, məsələnin şərtindən aydındır ki, avtomobillərin hamısı eyni yükgötürmə qabiliyyətinə malikdir.

Fərz edək ki, yükün daşınması ilə x sayda avtomobl məşqul idi, onda əvvəlcədən nəzərdə tutulan maşınların sayı

$(x+2)$ olar. Əvvəlcə hər maşına nəzərdə tutulan yük $\frac{a}{x+2}$ ton, sonra sə $\frac{a}{x}$ ton olmalıdır.

Məsələnin şərtini nəzərə alsaq, aşağıdakı tənliyi qura bilərik:

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{x+2}=1. \qquad (34)$$

Məsələnin şərtini nəzərə alaraq a və x üçün MQÇ-nu belə müəyyən edə bilərik:

$$a>0, \quad x\in N.$$

(34) tənliyinin üzərində çevirmələr apararaq onu bu şəklə gətiririk:

$$x^2+2x-2a=0. \qquad (35)$$

(35) kvadrat tənliyini həll edərək, onun köklərini tapırıq:

$$x_1=-1-\sqrt{1+2a}, \quad x_2=-1+\sqrt{1+2a}.$$

Aydındır ki, x_1 məsələnin həlli ola bilməz, çünki məsələnin mənasına görə x mənfi olmayan tam ədəd olmalıdır; x_2 isə məsələnin və (34) tənliyinin həlli ola bilər, bu şərtlə ki, a-nın aldığı qiymətlər aşağıdakı şərtləri ödəsin:

$$1+2a\geq 0, -1+\sqrt{1+2a}\geq 0, -1+\sqrt{1+2a}\neq 0, -1+\sqrt{1+2a}\neq -2.$$

İndi aydınlaşdıraq ki, x_2 məsələnin həlli ola bilərmi ? Şərtə görə x-in qiyməti natural ədəd və $a>0$ olmalıdır. $x=-1+\sqrt{1+2a}$ bərabərliyinə əsasən, belə nəticəyə gəlmək olar ki, $(1+2a)$-nın qiyməti 1-dən fərqli tam ədədlərin kvadratı olmalıdır: $1+2a=n^2$ və ya $a=\frac{n^2-1}{2}$, $n\in Z$, $n\neq 1$.

avab : a-nın hər bir qiymətində ($a=\frac{n^2-1}{2}$, $n\in Z$,

$n \neq 1$) məsələnin yeganə həlli vardır: $x = -1 + \sqrt{1+2a}$.

Məsələ 5. Aralarındakı məsafə $\mathbf{360}$ km olan iki şəhərdən iki qatar yola çıxıb, qarşı-qarşıya hərəkət edirlər. Əgər ikinci qatar stansiyadan birinci qatardan $\mathbf{1{,}5}$ saat qabaq yola çıxarsa, onda onlar yolun ortasında görüşə bilərlər. Əgər onlar stansiyalardan eyni vaxtda yola çıxsalar, onda $\mathbf{5}$ saatdan sonra onların arasındakı məsafə $\mathbf{90}$ km olacaqdır. Hər qatarın sürətini tapmalı.

Həlli. İkinci qatarın sürətini x km/s-la işarə etsək, onda onun yolun yarısına sərf etdiyi vaxt $\frac{180}{x}$ saat olar. Məsələnin şərtini nəzərə alsaq, birinci qatarın yolun yarısına sərf etdiyi vaxt $(\frac{180}{x} - 1{,}5)$ saat olar. Onda birinci qatarın sürətini tapa bilərik:

$$\frac{180}{\frac{180}{x} - 1{,}5} = \frac{180x}{180 - 1{,}5x} \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Birinci qatarın $\mathbf{5}$ saatda getdiyi yol, $5 \cdot \frac{180x}{180 - 1{,}5x} = \frac{180x}{36 - 0{,}3x} \frac{\text{km}}{\text{s}}$, ikinci qatarın $\mathbf{5}$ saatda getdiyi yol isə $5x$ km olar.

Məsələnin şərtini nəzərə alaraq, aşağıdakı tənliyi qura bilərik:

$$\frac{180x}{36 - 0{,}3x} + 5x = 270. \qquad (36)$$

(36) tənliyinin üzərində çevirmələr apardıqdan sonra onu aşağıdakı şəklə gətiririk:

$$x^2 - 294x + 6480 = 0. \qquad (37)$$

(37) kvadrat tənliyini həll edib, onun köklərini tapırıq: $x_1 = 24$, $x_2 = 270$.

Yoxlama nəticəsində müəyyən edirik ki, tapılan köklərin hər ikisi (36) tənliyini ödəyir. Lakin $x_1 = 24$ kökü məsələnin mənasına uyğun olduğu halda, $x_2 = 270$ kökü uyğun deyildir. Deməli, $x_1 = 24$ kökünü ikinci qatarın sürəti olaraq götürə bilərik.

İndi birinci qatarın sürətini tapaq:

$x = 24$ olduqda, $\dfrac{180x}{180-1{,}5x} = \dfrac{36x}{36-0{,}3x} = \dfrac{36\cdot 24}{36-0{,}3\cdot 24} = 30.$

avab : $30\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}};\ 24\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}.$

Məsələ 6. İki fəhlə onlara tapşırılmış işi birlikdə yerinə yetirsələr, onu 12 günə başa çatdıra bilərlər. Əgər əvvəlcə onlardan yalnız biri işləsə və o, bütün işin yarısını görüb qurtardıqdan sonra, onu ikinci fəhlə əvəz etsə, onda bütün tapşırıq 25 günə yerinə yetirilər. Hər fəhlə ayrılıqda bütün işi neçə günə yerinə yetirə bilər?

Həlli. Əgər fəhlələrdən biri bütün işin yarısını x günə görə bilərsə, onda o biri fəhlə işin qalan yarısını $(25-x)$ günə görər. Əgər tapşırılan bütün işin ümumi həcmini 1 qəbul etsək, onda fəhlələrdən biri bir gündə işin $\dfrac{1}{2x}$ hissəsini, o biri isə $\dfrac{1}{2(25-x)}$ hissəsini görə bilər. Onlar birlikdə işləsələr, məsələnin şərtinə əsasən, bir gündə işin $\dfrac{1}{12}$ hissəsini görmüş olarlar.

Məsələnin şərtini nəzərə alaraq, aşağıdakı tənliyi qura bilərik:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(25-x)} = \frac{1}{12}$$

və ya

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{25-x} = \frac{1}{6}. \qquad 38)$$

(38) tənliyi üzərində çevirmələr apararaq, onu aşağıdakı tənliyə gətiririk:

$$x^2 - 25x + 150 = 0. \qquad (39)$$

(39) tənliyini həll edib, onun köklərini tapırıq: $x_1 = 15$; $x_2 = 10$.

Asanlıqla yoxlayırıq ki, bu köklərin hər ikisi (38) tənliyini ödəyir və həm də məsələnin mənasına uyğun ədədlərdir.

Deməli, əgər fəhlələrdən biri işin yarısını 15 və ya 10 günə görə bilərsə, onda bütün işi 30 və ya 20 günə görə bilər. Əgər $x_1 = 15$, $x_2 = 10$ köklərini növbə ilə $25 - x$ ifadəsində x-in yerinə yazsaq, onda alarıq ki, o biri fəhlə işin yarısını 10 və ya 15 günə, bütün işi isə 20 və ya 30 günə görə bilər.

avab : 30 günə; 20 günə.

Məsələ 7. Uzunluğu 2 km olan dairəvi yolda iki konki sürən eyni istiqamətdə hərəkət edir və onlar hər 20 dəqiqədən bir görüşürlər. Onlardan birincisinin bütün çevrəni ikincidən 1 dəqiqə tez başa vurduğunu bilərək, hər bir konki sürənin sürətini tapın.

Həlli. Əgər birinci konki sürənin sürətini $x\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$-la, ikincininkini isə $y\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$-la işarə etsək, onda onların 2 km yola sərf etdikləri vaxt uyğun olaraq $\frac{2}{x}$ saat və $\frac{2}{y}$ saat olar.

Məsələnin şərtini nəzərə alsaq, belə bir tənlik yaza bilərik:

$$\frac{2}{y} - \frac{2}{x} = \frac{1}{60}, \quad (x > y). \tag{40}$$

Konki sürənlərin 20 dəqiqədə (yəni $\frac{1}{3}$ saatda) getdikləri yol uyğun olaraq $\frac{x}{3}$ km və $\frac{y}{3}$ km olar. Məsələnin şərtinə əsasən aşağıdakı bərabərliyi yaza bilərik:

$$\frac{x}{3} = 2 + \frac{y}{3} \quad \text{və ya} \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2. \tag{41}$$

x və y kimiyyətlərini tapmaq üçün (40) və (41) tənliklərindən aşağıdakı sistemi alarıq:

$$\begin{cases}\dfrac{2(x-y)}{xy}=\dfrac{1}{60},\\ x-y=6.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{12}{xy}=\dfrac{1}{60},\\ x-y=6.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=720,\\ x-y=6.\end{cases}\qquad(42)$$

Əgər ikinci tənlikdən $\boldsymbol{y=x-6}$ əvəzləməsini edib, birinci tənlikdə y -in yerinə yazsaq,

$$\boldsymbol{x^2-6x-720=0}\qquad(43)$$

tənliyini alarıq. Bu tənliyin kökləri belədir: $\boldsymbol{x_1=30,\ x_2=-24.}$ Onda $y=x-6$ əvəzləməsindən istifadə edərək tapırıq:

$\boldsymbol{y_1=24,\ y_2=-30}$.

Tapılmış **(30;24)** və **(–24;–30)** köklərinin hər ikisi uyğun olmadığı üçün onu götürmək olmaz.

Cavab: **30; 24.**

Məsələ 8. Əgər ikirəqəmli ədədi onun rəqəmlərinin cəminə bölsək, onda qismətdə **6**, qalıqda **2** alınar. Əgər həmin ədədi onun rəqəmlərinin hasilinə bölsək, onda qismətdə **5** və qalıqda **2** alınar. Həmin ədədi tapmalı.

Həlli. Axtarılan ikirəqəmli ədədi $\boldsymbol{\overline{xy}}$ ilə işarə edək. Aydındır ki, həmin ədədi dərəcə vahidlərinin köməyi ilə belə yaza bilərik: $\boldsymbol{\overline{xy}=10x+y}$.

Məsələnin şərtinə əsasən aşağıdakı tənliklər sistemini yaza bilərik:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{10x+y=6(x+y)+2,}\\ &\boldsymbol{10x+y=5xy+2.}\qquad \text{MQÇ}:\boldsymbol{-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty.}\end{aligned}\qquad(44)$$

Tənliklərin sol tərəfləri bərabər olduğundan sağ tərəfləri də bərabər olar:

$$\boldsymbol{6(x+y)+2=5xy+2}$$

və ya

$$\boldsymbol{6x+6y=5xy.}\qquad(45)$$

Əgər (45)-i (44) sisteminin ikinci tənliyində nəzərə alsaq, taparıq:

$$\boldsymbol{10x+y=6x+6y+2\Leftrightarrow 4x-5y=2\Leftrightarrow y=\frac{4x-2}{5}.}\qquad(46)$$

İndi (45) və (46)-nı (44) sisteminin birinci tənliyində yerinə yazsaq belə bir tənlik alarıq:

$$5x^2 - 16x^2 + 3 = 0 \quad (15); \;\; \text{MQÇ}: -\infty < x < +\infty.$$

(46) tənliyini həll edib, onun köklərini tapırıq: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{5}$. x_1 və x_2-nin qiymətlərini (46)-da x-in yerinə yazdıqda alırıq: $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{6}{25}$.

Beləliklə, iki kök alırıq: **(3;2)**, $\left(\frac{1}{5}; -\frac{6}{25}\right)$.

Bu köklərin hər ikisi (44) sistemini ödəyir, lakin ikinci kök məsələnin mənasına uyğun olmadığı üçün onu götürmək olmaz.

Deməli, axtarılan ikirəqəmli ədədin təkliyi $\mathbf{2}$, onluğu isə $\mathbf{3}$-dür.

avab : $\mathbf{32}$.

§4. Bərabərsizliklər. Əsas anlayışlar. Bərabərsizliklərin eynigüclülüyü.

Tutaq ki, bizə $y = f(x), x \in D(f)$ və $y = g(x), x \in D(g)$ həqiqi qiymətli funksiyaları verilmişdir. Bəzi praktiki və nəzəri məsələlərin həlli belə bir məsələyə gəlir: x arqumentinin hansı qiymətlərində birinci funksiyanın qiyməti ikinci funksiyanın qiymətindən azdır? Başqa sözlə,

$$f(x) < g(x) \qquad (1)$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün x elementlərinin çoxlğunu tapmaq lazım gəlir. $\boldsymbol{\Omega} = D(f) \cap D(g)$ çoxluğuna (1) bərabərsizliyinin təyin oblastı deyilir. x dəyişəninin (1) bərabərsizliyini doğru ədədi bərabərsizliyə çevirən qiyməti onun həlli adlanır. (1) bərabərsizliyini ödəyən bütün x-lər çoxluğuna bu bərabərsizliyin həllər çoxluğu deyilir. Əgər (1) bərabərsizliyini ödəyən heç bir x qiyməti yoxsa, onda deyirlər ki, bu bərabərsizliyin həlli yoxdur. $\boldsymbol{\Omega} = \varnothing$ olduqda da (1) bərabərsizliyinin həlli yoxdur deyirlər.

$$f(x) \leq g(x) \tag{2}$$

bərabərsizliyinin həllər çoxluğu (1) bərabərsizliyinin həllər çoxluğu ilə

$$f(x) = g(x)$$

tənliyinin həllər çoxluğunun birləşməsindən ibarətdir. Əgər (1) bərabərsizliyinin hər bir həlli

$$f_1(x) < g_1(x) \tag{3}$$

bərabərsizliyinin də həlli olarsa, onda (3) bərabərsizliyinə (1) bərabərsizliyinin nəticəsi deyilir və simvolik olaraq

$$f(x) < g(x) \Rightarrow f_1(x) < g_1(x)$$

kimi yazılır. Əgər (1) və (3) bərabərsizliklərinin hər biri digərinin nəticəsidirsə, onda onlara eynigüclü bərabərsizlik-lər deyilir və

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f_1(x) < g_1(x)$$

kimi işarə olunur.

$$f_2(x) > g_2(x) \tag{4}$$

tipli bərabərsizliyi həll etmək lazımdırsa, onda onu

$$g_2(x) < f_2(x)$$

eynigüclü bərabərsizliyi ilə əvəz edib, nəticədə (1) şəkilli bərabərsizliyə gəlməklə onu həll etmək olar. Dəyişəndən asılı bərabərsizliyin bir neçə xassəsini qeyd edək:

1. Əgər $y = \omega(x)$ funksiyası $\boldsymbol{\Omega}$ oblastında təyin olunmuş ixtiyari həqiqi qiymətli funksiyadırsa, onda (1) bərabərsizliyi ilə

$$f(x) + \omega(x) < g(x) + \omega(x) \tag{5}$$

bərabərsizliyi ekvivalentdir, yəni

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + \omega(x) \Leftrightarrow g(x) + \omega(x)$$

$$f(x) + f_1(x) < g(x) \tag{6}$$

$$f(x) < g(x) - f_1(x) \tag{7}$$

bərabərsizliyi eynigüclüdür. Doğrudan da, bərabərsizliyin 1-ci xassəsinə görə

$$f(x)+f_1(x)+\omega(x)<g(x)+\omega(x) \qquad (8)$$

bərabərsizliyi (6) bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür, burada $\omega(x)$ funksiyası təyin oblastı (6) bərabərsizliyinin təyin oblastını özündə saxlayan ixtiyari funksiyadır. (8)-də xüsusi halda $\omega(x)=-f_1(x)$ götürməklə (7) bərabərsizliyini alırıq.

1. Tutaq ki, $y=k(x)$ funksiyası (1) bərabərsizliyinin təyin olunma çoxluğu olan $\boldsymbol{\Omega}$ çoxluğunda (və yaxud $\boldsymbol{\Omega}$ -dan daha geniş çoxluqda) təyin olunub və $\boldsymbol{\Omega}$ çoxluğunda bu funksiya öz işarəsini dəyişməyir:

1) fərz edək ki, $k(x)>0, x\in\boldsymbol{\Omega}$. Onda (1) bərabərsizliyi ilə

$$k(x)\cdot f(x)<k(x)\cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{k(x)}<\frac{g(x)}{k(x)}$$

bərabərsizlikləri eynigüclüdür.

2) fərz edək ki, $k(x)<0, x\in\boldsymbol{\Omega}$. Onda (1) bərabərsizliyi ilə

$$k(x)\cdot f(x)<k(x)\cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{k(x)}<\frac{g(x)}{k(x)}$$

bərabərsizlikləri eynigüclüdür. Xüsusi halda $k(x)\equiv -1$ olduqda axırıncı bərabərsizliklər

$$-g(x)<-f(x)$$

bərabərsizliyinə çevrilir.

2. Əgər bir $x=x_0$ elementi $f_1(x)<g_1(x)$ və $f_2(x)<g_2(x)$ bərabərsizliklərinin hər ikisini ödəyirsə, onda bu $x=x_0$ elementi $f_1(x)+f_2(x)<g_1(x)+g_2(x)$ bərabərsizliyini də ödəyir, yəni

$$(f_1(x)<g_1(x))\wedge(f_2(x)<g_2(x))\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)<g_1(x)+g_2(x).$$

3. Əgər $x = x_0$ elementi $f_1(x) < g_1(x)$ və $f_2(x) < g_2(x)$ bərabərsizliklərinin hər ikisini ödəyirsə, onda bu $x = x_0$ elementi $f_1(x) - f_2(x) < g_1(x) - g_2(x)$ bərabərsizliyini də ödəyir, yəni

$$(f_1(x) < g_1(x)) \wedge (g_2(x) < f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) < g_1(x) - g_2(x).$$

4. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $\boldsymbol{\Omega}$ çoxluğunda mənfi deyillərsə, onda istənilən müsbət qiymətli $y = k(x)$, $D(k) \supset \Omega$ funksiyası üçün (1) bərabərsizliyi ilə

$$(f(x))^{k(x)} < (g(x))^{k(x)} \Leftrightarrow f(x), g(x), D(k) \subset \boldsymbol{\Omega}$$

eynigüclüdür.

5. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $\boldsymbol{\Omega}$ oblastında müsbət qiymətlər alarsa, onda istənilən mənfi qiymətli $y = k(x), \boldsymbol{\Omega} \subset D(k)$ funksiyası üçün (1) bərabərsizliyi ilə

$$(g(x))^{k(x)} < (f(x))^{k(x)}$$

bərabərsizliyi eynigüclüdür. Xüsusi halda $k(x) \equiv -1$ olarsa,

$$\frac{1}{g(x)} < \frac{1}{f(x)}$$

olar.

6. Əgər $y = k(x), \boldsymbol{\Omega} \subset D(k)$ vahiddən fərqli müsbət qiymətli funksiyadırsa, onda (1) bərabərsizliyi

$$(k(x))^{f(x)} < (k(x))^{g(x)}, \; k(x) > 1;$$

$$(k(x))^{f(x)} > (k(x))^{g(x)}, \; 0 < k(x) < 1$$

bərabərsizlikləri ilə eynigüclüdür.

7. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $(-\infty, +\infty)$ intervalında təyin olunmuş eyni T dövrlü həqiqi qiymətli funksiyalardır. Onda:

1) (1) bərabərsizliyi ilə

$$f(x + kT) < g(x + kT) \quad (k \in Z)$$

bərabərsizliklərinin hər biri eynigüclüdür;

2) Əgər (1) bərabərsizliyinin

$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ yarımintervalında həllər çoxluğu E isə, onda bu bərabərsizliyin $(-\infty,+\infty)$ intervalında həllər çoxluğu

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(kT+E)$$

çoxluğu olacaq, burada $kT+E=\{\xi:\xi=kT+x, x\in E\}$.

8. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ eyni T dövrlü funksiyalardır və $(-\infty,+\infty)$ intervalında $x_0+kT, k\in Z$ (x_0-qeyd olunmuş nöqtədir) nöqtələri istisna olmaqla hər yerdə təyin olunublar. (1) bərabərsizliyinin (x_0, x_0+T) intervalındakı həllər çoxluğu E olsun. Onda (1) bərabərsizliyinin təyin olunma oblastı olan $(-\infty,+\infty)\setminus\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\{x_0+kT\}$ çoxluğundakı həllər çoxluğu $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(kT+E)$ çoxluğu olacaq.

Birdəyişənli bərabərsizliklərdən rasional, irrasional və transendent bərabərsizliklərin ümumi həlli üsulları haqqında aşağıdakı biliklər zəruri biliklər hesab olunur:

1. Birdəyişənli rasional bərabərsizliklərin həllində intervallar üsulundan geniş istifadə olunur.
2. Sadə irrasional bərabərsizliklərin həlli rasional bərabərsizliklər sisteminin həllinə gətirilir:

a) $$\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)<(g(x))^{2n}, n\in N;\end{cases}$$

b) $$\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)>(g(x))^{2n}, n\in N;\end{cases}\end{array}\right.$$

v) $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

3. Sadə triqonometrik bərabərsizliklərin həlli aşağıdakı kimi tapılır:

   1) $\sin x < a$ üçün
   $x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi k, \arcsin a + 2\pi k), k \in Z$;

   2) $\sin x > a$ üçün
   $x \in (\arcsin a + 2\pi n, \ \pi - \arcsin a + 2\pi n), n \in Z$;

   3) $\cos x > a$ üçün
   $x \in (-\arccos a + 2\pi n, \ \arccos a + 2\pi n), n \in Z$;

   4) $\cos x < a$ üçün
   $x \in (\arccos a + 2\pi n, \ 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in Z$;

   5) $tgx > a$ üçün
   $x \in \left(arctga + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$;

   6) $tgx < a$ üçün
   $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; arctga + \pi n \right), n \in Z$;

   7) $ctgx > a$ üçün
   $x \in (\pi n, arcctga + \pi n), n \in Z$;

   8) $ctgx < a$ üçün
   $x \in (arcctga + \pi n, \pi + \pi n), n \in Z$.

Tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan sadə bərabərsizliklərin həlli aşağıdakı kimi tapılır:

1. $\arcsin x > a$ üçün $x \in (\sin a; 1]$.
2. $\arcsin x < a$ üçün $x \in [-1; \sin a)$.
3. $\arccos x > a$ üçün $x \in [-1; \cos a)$.
4. $\arccos x < a$ üçün $x \in (\cos a; 1]$.
5. $arctgx > a$ üçün $x \in (tga; +\infty)$.
6. $arctgx < a$ üçün $x \in (-\infty; tga)$.
7. $arcctgx > a$ üçün $x \in (ctga; +\infty)$.

8. $arcctgx < a$ üçün $x \in (-\infty; ctga)$.

4. Sadə üsullu bərabərsizliklərin həlli aşağıdakı kimi tapılır:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \quad \text{əgər } a > 1 \text{ isə;}$$

və ya

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \quad \text{əgər } 0 < a < 1 \text{ isə.}$$

5. Sadə loqarifmik bərabərsizliklərin həlli aşağıdakı kimi tapılır:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{əgər } a > 1 \text{ isə,}$$

və ya

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x). \end{cases} \quad \text{əgər } 0 < a < 1 \text{ isə}$$

Dəyişənin mütləq qiymət işarəsi altında daxil olduğu bərabərsizliklər mütləq qiymət işarəsi daxilindəki ifadələrin işarəsinin sabit oduğu hər bir aralıq üçün ayrılıqda həll edilir. Sadə hallarda belə bərabərsizliklər aşağıdakı kimi həll edilir:

1. $|f(x)| < a \quad (a > 0)$ bərabərsizliyini həll etmək üçün $-a < f(x) < a$ ikiqat bərabərsizliyini həll etmək lazımdır.

$a \le 0$ olduqda bu bərabərsizliyin həlli yoxdur.

2. $|f(x)| > a \quad (a > 0)$ bərabərsizliyini həll etmək üçün $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a \end{array}\right.$ bərabərsizliklər küllisünü həll etmək lazımdır.

$a = 0$ olduqda $f(x) = 0$ tənliyinin köklərindən başqa $f(x)$-in təyin oblastına daxil olan hər bir x qiyməti həldir. $a > 0$ olduqda isə, istənilən $x \in D(f)$ bu bərabərsizliyin həllidir.

7. Parametrdən asılı bərabərsizliklər parametrin hər bir qiyməti üçün ayrılıqda həll edilir.

Onu da qeyd edək ki, müəyyən çoxluqda iki bərabərsizliyin eynigüclü olmamasını isbat etmək üçün həmin çoxluqdan olan və bərabərsizliklərdən birinin həlli olub, o birini isə ödəməyən bir elementin göstərilməsi kifayətdir. Aşağıdakı misalı nəzərdən keçirək:

Misal 1. $\sqrt{x^3+x-2}>x$ və x^3+x-2, $p=x^2$ bərabərsizlikləri bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda eynigüclü ola bilərmi?

Həlli. Əgər $x^3+x-2\geq 0$ olarsa, onda $x>0$ olmalıdır (əks halda $x^3+x-2<0$ olar) və bu halda təklif 5-ə əsasən həmin bərabərsizliklər eynigüclüdür. Deməli, verilmiş bərabərsizliklər bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda eynigüclüdür.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda n dərəcəli kökün tərifini nəzərə alaraq, belə nəticəyə gəlirik ki, $\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)}$ bərabərsizliyinin həlli aşagıdakı sistemin həllinə gətirilir:

$$\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$$

Misal 2. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\sqrt{2x-7}<-1.$$

Həlli. Kökün tərifinə əsasən, $\sqrt{2x-7}$ - mənfi olmayan ədəddir, deməli, bu bərabərsizliyin həlli yoxdur, yəni $x\in\varnothing$.

Misal 3. Bərabərsizliyi həll edin:

$$|2x-3|<4.$$

Həlli. Verilmiş bərabərsizliyi onunla eynigüclü olan ikiqat bərabərsizlik şəklində yazaq:

$$-4<2x-3<4.$$

Bu bərabərsizliyin bütün tərəflərinə 3 əlavə edib, sadələşdirmə aparsaq, taparıq:

$$-4+3<2x-3+3<4+3 \Leftrightarrow -1<2x<7 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}.$$

Misal 4. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\sqrt{2x^2+1}>-3.$$

Həlli. Bərabərsizlik x-in istənilən qiymətində doğrudur, çünki $2x^2+1$ ifadəsi həmişə müsbətdir, yəni $-\infty<x<+\infty$.

Misal 5. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\sqrt[4]{x-5}<3.$$

Həlli. Bu bərabərsizliyin həlli aşağıdakı sistemin həllinə gətirilir:

$$\begin{cases} x-5\ge 0 \\ x-5<3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x<86 \end{cases} \Leftrightarrow 5\le x<86.$$

Misal 6. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2-x.$$

Bunun üçün

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x+3\ge 0, \\ 2-x<0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x\ge 0, \\ x^2-4x+3\ge (2-x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

küllisini həll etmək lazımdır. Küllinin birinci sisteminin həlli $[3;+\infty)$, ikinci sisteminin həlli isə yoxdur. Deməli, verilmiş bərabərsizliyin həlli $[3;+\infty)$-dır.

Misal 7. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

Həlli. Bərabərsizliyin təyin oblastını tapaq:

$$\begin{cases} x-3>0. \\ x^2-16\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ |x|\geq 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 4, \\ x\leq -4. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 4,$$

Verilmiş bərabərsizliyin hər iki tərəfini $\sqrt{x-3}$ ifadəsinə vurmaqla alarıq:

$$\sqrt{x^2-16}+x-3>5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}>8-x\,.$$

Əgər $x\geq 8$ olarsa, onda axırıncı bərabərsizlik x-in istənilən qiymətində ödənilir, çünki sağ tərəf müsbət olmur, sol tərəf isə müsbət olur. Əgər $4\leq x<8$ olarsa, onda bərabərsizliyin hər iki tərəfi mənfi olmayan ədəd olur, ona görə də hər iki tərəfi kvadrata yüksəltsək, onunla eynigüclü bərabərsizlik alarıq:

$$x^2-16>64-16x+x^2 \Leftrightarrow 16x>80 \Leftrightarrow x>5\,.$$

Deməli, verilmiş bərabərsizliyin həlli bu çoxluqdur: $(5,+\infty)$.

Misal 8. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3x+4}}\,.$$

Bərabərsizliyinin təyin oblastını tapaq:

Həlli. $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ x^2+3x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\in R \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -4$

Burada sistemin ikinci bərabərsizliyindəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı mənfi ədəd olduğundan o, x-in istənilən qiymətində müsbətdir. Ona görə də sistemin həlli $[-4,+\infty)$ çoxluğudur.

$y=a^x$ üstlü funksiyası $0<a<1$ şərti ödəndikdə monoton azalan olduğundan, verilmiş bərabərsizliyi onunla eynigüclü olan aşağıdakı bərabərsizliklə əvəz edə bilərik:

$$\sqrt{x+4}<\sqrt{x^2+3x+4}\,,$$

Bu irrasional bərabərsizliyin hər iki tərəfi mənfi olmadığından, hər iki tərəfi kvadrata yüksəldək və həll edək:

$$x+4<x^2+3x+4 \Leftrightarrow x^2+2x>0 \Leftrightarrow x(x+2)>0.$$
Axırıncı bərabərsizliyi həll edərək, onun həllər çoxluğunu tapırıq: $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Lakin x-ə qoyulan $x\geq -4$ şərtini nəzərə alsaq, onda verilmiş bərabərsizliyin həlli bu çoxluq olar: $[-4,-2)\cup(0,+\infty)$

Misal 9. Bərabərsizliyi həll edin:
$$5\cdot 4^x+2\cdot 25^x\leq 7\cdot 10^x$$
Həlli. Bərabərsizliyin hər iki tərəfini 4^x-ə bölək və onu aşağıdakı şəkildə yazaq:
$$2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{x}+5\leq 0, \text{ çünki } \quad 4^x>0.$$
$\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=t$ əvəzləməsini aparmaqla aşağıdakı kvadrat bərabərsizliyi alırıq:
$$2t^2-7t+5\leq 0.$$
Sol tərəfdəki kvadrat üçhədlinin kökləri bunlardır: $t_1=1$ və $t_2=\frac{5}{2}$. Onda kvadrat bərabərsizliyin həllini yaza bilərik: $1\leq t\leq\frac{5}{2}$. Əvəzləmə vasitəsilə x dəyişəninə qayıtsaq, alarıq:
$$1\leq\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{0}\leq\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\leq\left(\frac{5}{2}\right)^{1}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1.$$
Beləliklə, verilmiş bərabərsizliyin həlli $[0,1]$ çoxluğudur.

Misal 10. Bərabərsizliyi həll edin:
$$\sqrt{13^x-5}\leq\sqrt{2\cdot(13^x+12)}-\sqrt{13^x+5}.$$
Bərabərsizliyinin təyin oblastını tapaq:

Həlli. $13^x-5\geq 0\Leftrightarrow 13^x\geq 5\Leftrightarrow x\geq\log_{13}^{5}$, yəni $x\in\left[\log_{13}^{5};+\infty\right)$.
Sağ tərəfdəki ikinci kökü sol tərəfə keçirək və hər iki tərəfi kvadrata yüksəldək, onda alarıq:
$$13^x-5+13^x+5+2\sqrt{13^x-25}\leq 2\cdot(13^x+12)\Leftrightarrow\sqrt{13^{2x}-25}\leq 12.$$

Axırıncı bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltsək, alarıq:

$$13^{2x}-25\le 144 \Leftrightarrow 13^{2x}\le 169 \Leftrightarrow 13^{2x}\le 13^{2} \Leftrightarrow x\le 1,$$

yəni $x\in(-\infty,1]$. Lakin x-ə qoyulan $x\ge \log_{13}^{5}$ şərtini nəzərə alsaq, verilmiş bərabərsizliyin həllini alarıq: $x\in\left[\log_{13}^{5},1\right]$.

Misal 11. Bərabərsizliyi həll edin:

$$2^{-2x}-8\cdot 2^{-x}<25^{1/\log_{3}^{5}}.$$

Həlli. Əvvəlcə sağ tərəfdəki ikinci toplananı çevirək: $\frac{1}{\log_{3}^{5}}=\log_{5}^{3}$ olduğundan,

$$25^{1/\log_{3}^{5}}=\left(5^{2}\right)^{\log_{5}^{3}}=5^{2\log_{5}^{3}}=5^{\log_{5}^{9}}=9 \qquad \text{olar.}$$

Onda verilmiş bərabərsizliyi onunla eynigüclü olan aşağıdakı bərabərsizlik şəklində yaza bilərik:

$$2^{-2x}-8\cdot 2^{-x}-9<0.$$

$2^{-x}=t$ ilə əvəz etsək, alarıq:

$$t^{2}-8t-9<0.$$

Burada kvadrat üçhədlinin kökləri $t_1=-1, t_2=9$, kvadrat bərabərsizliyin həlli isə $-1<t<9$ şəklində olur. x dəyişəninə qayıtsaq, alarıq:

$$0<2^{-x}<9 \Leftrightarrow -\infty<-x<\log_{2}^{9} \Leftrightarrow -\log_{2}^{9}<x<+\infty.$$

Beləliklə, verilmiş bərabərsizliyin həlli, $\left(-\log_{2}^{9},+\infty\right)$ çoxluğudur.

Misal 12. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\log_{1/2}|x-3|>-1.$$

Həlli. $x\ne 3$. Verilmiş bərabərsizlik üzərində çevirmə aparmaqla alarıq $(x\ne 3)$:

$$\log_{1/2}|x-3|>\log_{1/2}\left(1/2\right)^{-1} \Leftrightarrow |x-3|<2 \Leftrightarrow -2<x-3<2 \Leftrightarrow -1<x<5.$$

$x\ne 3$ olduğunu nəzərə alaraq, verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğunu yaza bilərik: $(1,3)\cup(3,5)$.

Misal 13. Bərabərsizliyi həll edin:

$$(x-3)^{2x^2-7x} > 1 .$$

Həlli.

1) Əgər $(x-3) > 1$ olarsa, onda bu bərabərsizlik yalnız o zaman doğru olar ki, $2x^2 - 7x > 0$ olsun. Deməli,

$$\begin{cases} x-3 > 1, \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

sisteminin istənilən həlli verilmiş bərabərsizliyin həllidir.

2) Əgər $0 < x - 3 < 1$ olarsa, onda bərabərsizlik yalnız o zaman doğru olar ki, $2x^2 - 7x < 0$ olsun. Deməli,

$$\begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \qquad (**)$$

sisteminin istənilən həlli də bu bərabərsizliyin həllidir.

3) Əgər $x - 3 = 1$, yəni $x = 4$ olarsa, onda verilmiş bərabərsizliyin doğru olmadığı aydındır. Bu deyilənlərdən aydın olur ki, verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğu (*) və (**) bərabərsizliklər sistemlərinin həllər çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir. Asanlıqla tapırıq ki, (*) sisteminin həllər çoxluğu $(4,+\infty)$ intervalı, (**) sisteminin isə $(3,3{,}5)$ intervalıdır. Onda bu bərabərsizliyin həlli $(3,3{,}5)\cup(4,+\infty)$ çoxluğudur.

Misal 14. Bərabərsizliyi həll edin:

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0 .$$

Həlli. $\sin x = t$ ilə əvəz etdikdən sonra alarıq:

$$2t^2 - 7t + 3 > 0 .$$

Bu kvadrat bərabərsizliyi həll edərək, onun köklərini tapırıq: $t < 1/2$ və $t > 3$. Əvəzləmə vasitəsi ilə əvvəlki dəyişənə qayıtsaq, verilmiş bərabərsizliklə eynigüclü olan iki bərabərsizlik alarıq:

$$\sin x < \frac{1}{2} \text{ və } \sin x > 3 .$$

Burada ikinci bərabərsizliyin həlli yoxdur, birincinin həlli isə

$$-\frac{7\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k \in Z .$$

Misal 15. Bərabərsizliyi həll edin:

$$\arcsin x < 1 .$$

Həlli. Yuxarıda baxdığımız ümumi hal ilə müqayisə etsək, $a = 1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan verilmiş bərabərsizliyin həlli vardır, yəni həll $x \in [-1 \sin 1)$ olar.

VII FƏSİL

KƏMIYYƏT VƏ ONUN ÖLÇÜLMƏSI.

§1. Ölçü və onun xassələri.

Riyazi və fiziki kəmiyyətlərin əksəriyyəti özlərinin "ölçü"ləri ilə xarakterizə olunurlar. Hər bir E kəmiyyətinə qarşı mənfi olmayan μE ədədi qarşı qoyulur və bu μ ədədi E kəmiyyətinin "ölçüsü" adlanır. Bu zaman ölçü aşağıdakı üş xassəni ödəməlidir:

1. Əgər $E = E_0$ isə (E_0- "etalon" kəmiyyətdir), onda $\mu E_0 = d$ -dir, burada d – müəyyən müsbət ədəddir və "etalon ölçü" kimi qəbul edilir.
2. Əgər A və B eyniadlı kəmiyyətləri konfuyentdirsə, onda $\mu(A) = \mu(B)$.
3. Əgər E kəmiyyəti n sayda cüt-cüt kəsişməyən eyniadlı E_k $(k = 1,2,...,n)$ kəmiyyətlərindən təşkil olunubsa, yəni $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, $E_k \cap E_m = \varnothing$, $k \neq m$, onda
$$\mu E = \sum_{k=1}^{n} \mu E_k \ .$$

3-cü xassəyə ölçünün tam additivlik xassəsi deyilir.

Məsələn, tutaq ki, E cisim və μE isə onun kütlə ölçüsüdür. Bu zaman "etalon kəmiyyət" olaraq, Fransada saxlanılan müəyyən bir E_0 dəmir xəlitə götürülür; "etalon ölçü” (“etalon kütlə”) isə 1 kiloqram qəbul olunur, yəni *d=1* kiloqram. Qalan cisimlərin kütlələri isə bu etalon kütlə ilə müqayisə olunaraq tapılır.

Uzunluq.

Uzunluğu müəyyən etmək üçün “etalon kəmiyyət” olaraq, Fransada saxlanılan müəyyən bir E_0 çubuq götürülüb; “etalon ölçü” (etalon uzunluq) isə 1 metr qəbul olunub, yəni *d=1* metr. Qalan parçaların uzunluğu bu etalonla müqayisə olunaraq tapılır.

Bucaq.

Ölçülməsi nəzərdə tutulan E çoxluğu müstəvi bucaqlar çoxluğu olduqda, bu zaman “etalon kəmiyyət” olaraq, E_0 - açıq bucaq götürülür, “etalon ölçü” isə (yəni açıq bucağın dərəcə ölçüsü) 180^0 qəbul olunur, yəni $d=180^0$. Qalan bucaqların dərəcə ölçüsü bu etalonla müqayisə olunaraq tapılır.

Sahə.

Əgər ölçülməsi nəzərdə tutulan E çoxluğu müstəvi fiqurlar çoxluğu olarsa, bu zaman “etalon kəmiyyət” olaraq, E_0 -tərəfi 1metr olan kvadrat götürülür; “etalon ölçü” isə (yəni tərəfi 1metr olan kvadratın sahəsi) $1m^2$ (1 kvadrat metr) qəbul olunur, yəni $d=1m^2$. Qalan həndəsi fiqurların sahəsi isə bu etalonla müqayisə olunaraq tapılır.

Həcm.

Əgər ölçülməsi nəzərdə tutulan E çoxluğu fəza cisimlər çoxluğu isə bu zaman “etalon kəmiyyət” olaraq, E_0-tərəfi 1metr olan kub götürülür; “etalon ölçü” isə (yəni tərəfi 1 metr olan kubun həcmi) $1m^3$ (1 kub metr) qəbul olunur, yəni $d=1m^3$. Qalan fəza cisimlərinin həcmi isə bu etalonla müqayisə olunaraq tapılır.

§2. Əyrinin uzunluğu.

Fərz edək ki, bizə müstəvidə qapalı olmayan Γ əyrisinin

$$x=\varphi(t) \text{ və } y=\psi(t), \quad t_0 \le t \le T$$

(t_0 və T- qeyd edilmiş ədədlərdir) kimi parametrik şəkildə tənliyi verilib; $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyalarının (t_0, T) intervalının hər bir nöqtəsində sonlu törəmələri var və $|\varphi'(t)|$ və $|\psi'(t)|$ funksiyaları $[t_0, T]$ parçasında cəmlənəndir. $[t_0, T]$ parçasını ixtiyari qayda ilə n yerə bölək.

$$t_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T .$$

Γ əyrisi üzərində t_i-ci bölgü nöqtəsinə uyğun nöqtəni M_i ilə işarə etsək, bu nöqtənin koordinatları $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ olacaq. Iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna əsasən, $[M_i, M_{i+1}]$ parçasının uzunluğu

$$\rho(M_i, M_{i+1}) = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} \qquad (1)$$

olacaq. Laqranjın sonlu artım düsturuna əsasən,

$$\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\xi_i)\cdot(t_{i+1} - t_i) = \varphi'(\xi_i)\cdot \Delta t_i,\ \xi_i \in (t_i, t_{i+1})\ ;$$

$$\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) = \psi'(\eta_i)\cdot(t_{i+1} - t_i) = \psi'(\eta_i)\cdot \Delta t_i,\ \eta_i \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2)$$

olacaq. (2) düstutunu (1)-də nəzərə alsaq,

$$\rho(M_i, M_{i+1}) = \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2} \cdot \Delta t_i \qquad (3)$$

$$\xi_i,\ \eta_i \in (t_i, t_{i+1}), i = 0,1,\ldots,n-1 .$$

Γ əyrisinin l uzunluğunun

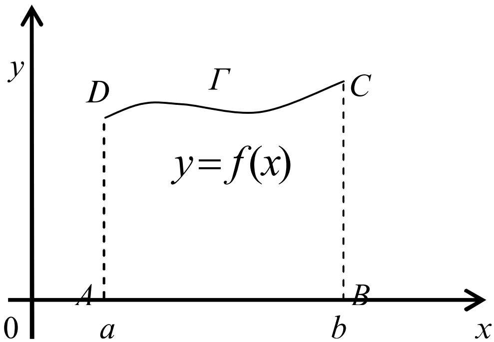
$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i, M_{i+1}), \qquad (\lambda = \max \Delta t_i,\ i = 0,1,\ldots,n-1) \quad (4)$$

münasibətindən təyin olunduğunu bilərək, (3) və (4) düsturlarından asanlıqla tapırıq ki:

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\ dt\ . \qquad (5)$$

§3. İnteqralın tətbiqi ilə həndəsi kəmiyyətlərin hesablanması. Uzunluğun hesablanması.

Tutaq ki, $y = f(x)$ sonlu $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyadır, onun bu parçada sanki hər yerdə sonlu $f'(x)$ törəməsi var və $|f'(x)|$ funksiyası $[a,b]$ parçasında cəmlənəndir. Onda $x \in [a,b]$ olduqda, $(x, f(x))$ nöqtələrinin həndəsi yerinin təyin etdiyi Γ



Şəkil 1.

(şəkil 1) əyrisinin uzunluğu C aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx\ . \qquad (1)$$

(1) düsturundan istifadə edərək R radiuslu çevrənin C uzunluğunu hesablayaq. Ümumiliyi pozmadan çevrənin mərkəzini koordinat başlanğıcında götürmək olar. Onda çevrənin tənliyi $x^2+y^2=R^2$ şəklində olacaq. I rübdə çevrənin tənliyi $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $0\le x\le R$ olur. Beləliklə, (1) düsturuna əsasən, çevrənin C uzunluğunun $1/4$-i üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\frac{C}{4}=\int_0^R\sqrt{1+\left(y^{/}\right)^2}\;dx \quad , \qquad (2)$$

buradan

$$\frac{C}{4}=\int_0^R\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\;dx=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\;dx=$$

$$=\int_0^R\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\;dx=\int_0^R\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\;.$$

Axırıncı inteqralda $x=Rt$ əvəzləməsi aparsaq, alarıq ki,

$$\frac{C}{4}=\int_0\frac{R\cdot R\,dt}{\sqrt{R^2-R^2t^2}}=R\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\;,$$

Buradan isə alırıq:

$$C=D\cdot\pi\;, \qquad (3)$$

burada C- radiusu R olan çevrənin uzunluğu, D-bu çevrənin diametri, yəni $D=2R$, π-simvolik olaraq, aşağıdakı ədədin yazılışıdır:

$$\pi=2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\;. \qquad (4)$$

(3) düsturundan belə bir nəticə çıxır.

Nəticə. Çevrənin uzunluğunun öz diametrinə olan nisbəti (4) düsturu ilə təyin olunan sabit kəmiyyətdir, yəni bu nisbət çevrənin radiusundan asılı deyil. (4) düsturu ilə təyin olunan π ədədi irrasional ədəddir; inteqral üçün təqribi hesablama düsturlarını (4)-ə tətbiq etməklə, π-nin qiymətini ixtiyari dəqiqliklə hesablamaq olur və bu ədəd $\pi = 3{,}14...$-dir. Tutaq ki,

$$S_n = \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right\}, n = 1,2,3,..., \qquad (5),$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad . \qquad (6)$$

(5) düsturundan istifadə etməklə, π-nin ədədi qiymətini istənilən dəqiqliklə tapmaq olar.

§4. Inteqralın tətbiqi ilə həcmin hesablanması.

Biz müstəvi çoxbucaqlıların köməyi ilə istənilən müstəvi fiqurun sahəsi analışını təyin edirdik. Analoji qayda ilə çoxüzlülərin həcmi vasitəsi ilə fəza cisimlərinin həcm anlayışı verilir. Tutaq ki, üçölçülü fəzada ixtiyari formada *(v)* cismi verilib. Başqa sözlə, üçölçülü fəzada məhdud, qapalı *(v)* oblastı verilib. Tamamilə *(v)* cisminin daxilində yerləşən çoxüzlülər çoxluğunu *(x)* və uyğun olaraq, onların həcmləri çoxluğunu x ilə, analoji olaraq, *(v)* cismini tamamilə öz daxilinə alan *(y)* və uyğun olaraq, onların həcmləri çoxluğunu y ilə işarə edək. x çoxluğu yuxarıdan məhdud olduğu üçün onun dəqiq yuxarı sərhəddi və y çoxluğu aşağıdan məhdud olduğu üçün onun dəqiq aşağı sərhəddi var. Tutaq ki:

$$v_* = \sup\{x\}; \qquad v^* = \inf\{y\}. \qquad (1)$$

Aydındır ki, $v_* \le v^*$ dir. v_* və v^*-a uyğun olaraq, *(v)*-cisimlərinin daxili və xarici həcmi deyilir.

Tərif 1. Əgər

$$v_* = v^* \qquad (2)$$

isə, onda deyirlər ki, (v)- cisminin həcmi var və v $= v_* = v^*$ kəmiyyətinə bərbərdir.

(1) və (2) düsturlarından çıxır ki, (v) cisminin həcminin olması üçün zəruri və kafi şərt odur ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi verildikdə, elə (x) (daxili) və (y) (xarici) çoxüzlüləri olmalıdır ki, onlar üçün

$$y - x < \varepsilon \tag{3}$$

bərabərsizliyi doğru olsun. Yuxarıdakı mühakimələrdən aydındır ki, (v) cismi kəsişməyən (v_1) və (v_2) cisimlərinin birləşməsindən ibarətdirsə və bu cisimlərdən hər hansı ikisinin həcmi varsa, onda üçüncü cismin də həcmi var və onların arasında

$$v = v_1 + v_2 \tag{4}$$

bərabərliyi doğrudur.

Cisimlərin həcmi üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. (v) cisminin həcminin olması üçün zəruri və kafi şərt həmin cismə tamamilə daxil olan $\{(x_n)\}$çoxüzlülülər ardıcıllığı və bu cismi tamamilə öz daxilinə alan elə $\{(y_n)\}$ çoxüzlülülər ardıcıllığının olmasıdır ki, onlar üçün $\{x_n\}$və $\{y_n\}$ ədədi ardıcıllıqları yığılsın və aşağıdakı bərabərlik doğru olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n . \tag{5}$$

Zəruriliyin isbatı. Tutaq ki, (v) cisminin v həcmi var. Onda teoremdə göstərilən $\{(x_n)\}$ və $\{(y_n)\}$ çoxüzlülülər ardıcıllığının mövcudluğunu isbat edək. 0-a yığılan istənilən müsbət $\{\varepsilon_n\}$ədədlər ardıcıllığını götürək. Hər bir ε_n ədədi üçün (3) bərabərsizliyinə əsasən, elə $\{x_n\}$(daxili) və $\{y_n\}$ (xarici) çoxüzlülüləri olacaq ki, onlar üçün

$$0 \leq y_n - x_n < \varepsilon_n \tag{6}$$

bərabərsizliyi doğru olsun. (6)-dan alırıq ki:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Kafiliyin isbatı. Tutaq ki, (5) bərabərliyini ödəyən $\{(x_n)\}$ (daxili) və $\{(y_n)\}$(xarici) çoxüzlülülər ardıcıllığı var. Onda aydındır ki, istənilən n nömrəsi üçün

$$x_n \leq v_* \leq v^* \leq y_n . \tag{7}$$

(7) bərabərsizliklər sistemində limitə keçsək və (5) bərabərliyini nəzərə alsaq, $v_* = v^*$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

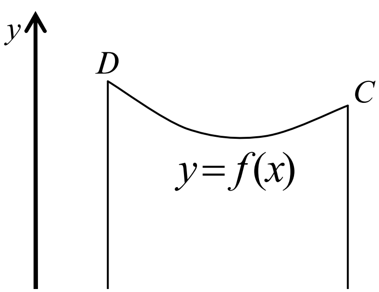
Dairənin sahəsinin hesablanmasında olduğu kimi, analoji qayda ilə çoxüzlülülərin həcmi vasitəsi ilə düz silindrin V həcmi üçün alırıq:

$$V = \pi R^2 H , \tag{8}$$

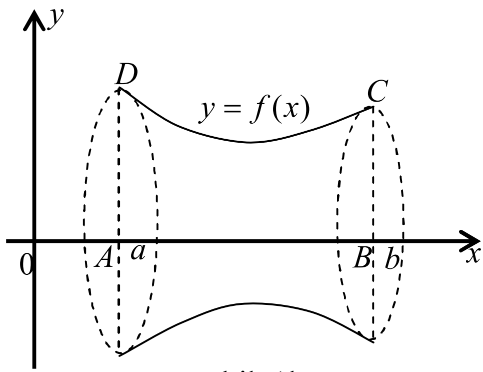
burada R -silindrin oturacağının radiusu, H-isə onun hündürlüyüdür.

§5. Fırlanma cisimlərinin həcmi.

Tutaq ki, üçölçülü $X0YZ$ $d$ekart koordinat fəzasının $X0Y$ müstəvisində $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ münasibəti ilə təyin olunan əyri xətt verilmişdir, burada a və b müəyyən ədədlər-



dir, $f(x)$ isə $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz və mənfi olmayan funksiyadır (şəkil 1a). Bu əyrinin əmələ gətirdiyi $ABCD$ əyrixətli trapesiyasının (yəni XOY müstəvisində $x=a,\ x=b,\ y=0$ düz xətləri və $y=f(x)$ düsturu ilə verilən əyri ilə hüdudlanmış müstəvi oblast) OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismi (v) ilə işarə edək



Şəkil 1b.

(şəkil 1b).Bu cismin həcmini hesablayaq. $[a,b]$ parçasını ixtiyari qayda ilə n yerə bölək.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

$[x_i, x_{i+1}]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının ən böyük qiymətini M_i ilə və ən kiçik qiymətini isə m_i ilə işarə edək. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğu üçün elə $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ və $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nöqtələri var ki, onlar üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$m_i = f(\xi_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}];\ M_i = f(\eta_i),\ \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]. \qquad (9)$$

Oturacağının mərkəzi OX oxunun x_i nöqtəsində, hündürlüyü $[x_i, x_{i+1}]$ parçası və oturacağının radiusu m_i (M_i) olan düz silindri (o_i), $((o_i))$ ilə işarə edək. Bu düz silindrlərin birləşmələrindən aşağıdakı şəkildə təşkil olunmuş (x_n) və (v_n) cisimlərinə baxaq:

$$\begin{aligned} (x_n) &= \bigcup_{i=0}^{n-1} (o_i), \\ (v_n) &= \bigcup_{i=0}^{n-1} (o_i). \end{aligned} \tag{10}$$

Aydındır ki, (x_n) cismi tamamilə (v) ciminin daxilində və eləcə də (v) cisminin özü (v_n)cisminin daxilində yerləşir. (4) və (8) düsturlarına əsasən, (x_n) və (v_n) cisimlərinin həcmi üçün aşağıdakı düsturları alırıq:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 \Delta x_i \\ v_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 \Delta x_i, \end{aligned} \tag{11}$$

burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Deməli, (7), (9), (11) düsturlarına əsasən alırıq ki,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i \le v_* \le v^* \le \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\eta_i)]^2 \Delta x_i \tag{12}$$

f(x) funksiyası kəsilməz olduğu üçün

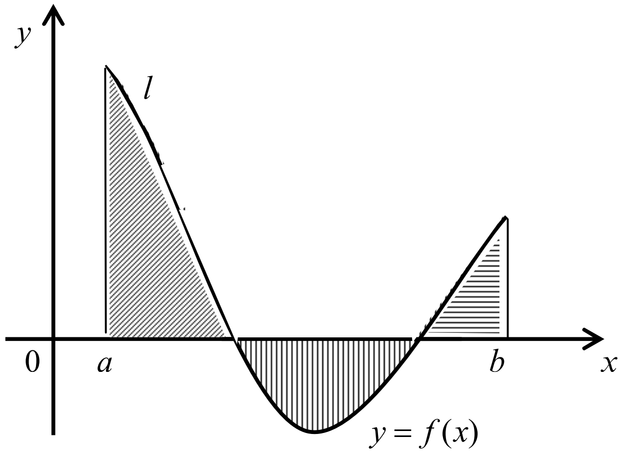
$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(\eta_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \tag{13}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\lambda_n = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$. (12) və (13) düsturlarından çıxır ki, (v) cisminin v həcmi var və bu həcm aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{14}$$

Qeyd. Yuxarıda şərh olunan mühakimələrdən aydındır ki, $f(x)$ funksiyası mənfi olduqda da (14) düsturu öz qüvvəsində qalır. Bu isə bizə aşağıdakı şəkildə ümumi teorem söyləməyə imkan verir.

Teorem 2. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır (müsbət və ya mənfi olma şərti qoyulmur). XOY müstəvisində $x=a$, $x=b$, $y=0$ düz xətləri və $y = f(x)$ düsturu ilə verilən l əyrisi ilə



Şəkil 2.

hüdudlanmış müstəvi oblastının (2-ci şəkildə bu oblast ştrixlənmişdir) OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan (v) fırlanma cisminin həcmi var və bu həcm (14) düsturu ilə hesablanır. (14) düsturunun tətbiqinə aid aşağıdakı məsələləri həll edək.

Məsələ 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

Həlli. Ellipsin tənliyindən alırıq ki: $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$.

Tələb olunan fırlanma cisminin həcmi:

$$v=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

olur.

Məsələ 2. $x=0, x=1, y=0$ düz xətləri və $y=1+x^2$ parabolasının təyin etdiyi əyri ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan fırlanma cisminin həcmi

$$v=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1\left(1+x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1+2x+x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{28}{15}\pi$$

olur.

Məsələ3. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ (0\le t\le 2\pi)$ parametrik şəkildə verilmiş əyrinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

Həlli. $x=a(t-\sin t)\ \ (0\le t\le 2\pi)$ münasibətindən çıxır ki, $0\le x\le 2\pi a$ və $dx=a(1-\cos t)dt$ olur. (14) düsturuna əsasən tələb olunan cismin həcmi

$$v=\pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx \quad olur.Buradan$$

$$v=\pi\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)]^2 a(1-\cos t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-4\cos t+\frac{3}{2}\cos 2t+\sin^2 t\cos t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}=5\pi^2 a^3$$

olduğunu tapırıq.

§6. Fırlanma cisimlərinin səthinin sahəsi.

Tutaq ki, F verilmiş səthdir. Üçölçülü fəzanın bütün elə nöqtələrindən ibarət F_h cismini nəzərdən keçirək ki, bu nöqtələrin hər biri üçün F səthinin bu nöqtədən məsafəsi h-dan böyük olmayan nöqtəsi tapılsın. v_h ilə F_h cisminin həcmini işarə edək. Fərz edək ki, $h\to 0$ *olduqda* $v_h/(2h)$ nisbətinin limiti var.

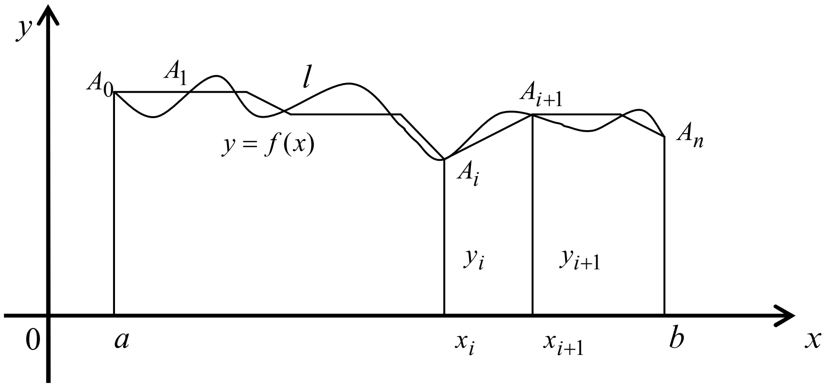
Tərif 2. $v_h/(2h)$ nisbətinin $h\to 0$ *olduqda* limitinə F səthinin S sahəsi deyilir, yəni

$$S=\lim_{h\to 0}\frac{v_h}{2h} \quad . \tag{1}$$

Bu tərifin köməyi ilə kəsik konusun (silindrin) yan səthinin sahəsi üçün

$$S=\pi(r+R)l \tag{2}$$

düsturu alınır, burada r və R kəsik konusun (silindrin) oturacaqlarının radiusları, l- isə onun doğuranının



Şəkil 3.

uzunluğudur. Indi biz bu düsturlardan istifadə edərək, fırlanma cisimlərinin səthinin sahəsi üçün düstur alaq. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunub və müsbətdir (şəkil 3). Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında birinci tərtib kəsilməz törəməsi var. Bu şərtdən çıxır ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və diferensiallanandır. $y = f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasındakı qrafikinin təyin etdiyi əyri xətti l ilə işarə edək. l xəttinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin S sahəsini hesablayaq. Bunun üçün $[a,b]$ parçasını ixtiyari qayda ilə n yerə bölək:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b\,.$$

l əyrisi üzərində $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ nöqtələrini qeyd edək, belə ki:

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, \ldots, n \tag{3}$$

$A_0, A_1, ..., A_n$ nöqtələrinin ardıcıl olaraq düz xətt parçaları ilə birləşməsindən əmələ gələn sınıq xətti l_n ilə işarə edək. A_i və A_{i+1} nöqtələrini birləşdirən parçanın uzunluğu l_i olsun. Əvvəlcə l xəttinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin S_n sahəsini hesablayaq. Qeyd edək ki, bu fırlanma səthi *n-1* sayda kəsik konusların (yaxud silindirlərin) yan səthlərindən təşkil olunub. (2) düsturuna əsasən $[A_i, A_{i+1}]$ parçasının OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $\pi(y_i + y_{i+1})l_i$ -dir. Deməli, l_n xəttinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi(y_i + y_{i+1})l_i \qquad (4)$$

düsturu ilə təyin olunacaq. Pifaqor teoreminə görə l_i uzunluğu üçün

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \qquad (5)$$

bərabərliyini alırıq, burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

(3) və (5) bərabərliklərini (4) –də nəzərə alsaq,

$$S_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} =$$

$$= 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x_i \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i}\right]^2} \qquad (6)$$

olar. Laqranjın sonlu artım düsturuna görə

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i} = f^{(i)}(\theta_i), \theta_i \in (x_i, x_{i+1}), \qquad (7)$$

burada θ_i nöqtəsi (x_i, x_{i+1}) intervalına daxil olan müəyyən bir nöqtədir. Kəsilməz funksiya özünün ən böyük və ən kiçik qiymətləri arasındakı bütün qiymətləri aldığına görə $[x_i, x_{i+1}]$ parçasına daxil olan elə bir θ_i^* nöqtəsi var ki, onun üçün

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}=f\left(\theta_i^*\right),\ \theta_i^* \in \left[x_i, x_{i+1}\right] \tag{8}$$

bərabərliyi doğrudur. (7) və (8) bərabərliklərini (6)-da nəzərə alsaq,

$$S_n = 2\pi\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\theta_i^*\right)\sqrt{1+\left[f^{(i)}\left(\theta_i\right)\right]^2}\,\Delta x_i = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} \tag{9}$$

olacaq, burada

$$S_n^{(1)} = 2\pi\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\theta_i\right)\sqrt{1+\left[f^{(i)}\left(\theta_i\right)\right]^2}\,\Delta x_i \tag{10}$$

$$S_n^{(2)} = 2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(\theta_i^*\right)-f\left(\theta_i\right)\right]\sqrt{1+\left[f^{(i)}\left(\theta_i\right)\right]^2}\,\Delta x_i\,. \tag{11}$$

$f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və θ_i^*, θ_i nöqtələrinin hər ikisi eyni bir $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ parçasına daxil olduğu üçün istənilən müsbət ε ədədi verildikdə elə bir müsbət δ ədədi tapmaq olar ki,

$$\Delta x_i < \delta, i = 0,\ldots,n-1 \tag{12}$$

olduqda $\left|f\left(\theta_i^*\right)-f\left(\theta_i\right)\right| < \varepsilon,\ i = 0,\ldots,n-1$ olsun.

Beləliklə,

(12) şərti daxilində S_n^2 üçün (11) düsturundan aşağıdakı qiymətləndirilmə alınar:

$$\left|S_n^{(2)}\right| \le 2\pi\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+\left[f^{(i)}\left(\theta_i\right)\right]^2}\,\Delta x_i \tag{13}$$

$\lambda_n = \max\limits_{0\le 1\le n-1}\Delta x_i$ ədədi 0-a yaxınlaşdıqda (10) və (13) düsturlarından alırıq ki:

$$\lim_{\lambda_n\to 0} S_n^{(1)} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f^{(i)}\left(x_i\right)\right]^2}\,dx\ , \tag{14}$$

$$\overline{\lim_{\lambda_n\to 0}}\left|S_n^{(2)}\right| \le 2\pi\varepsilon\int_a^b \sqrt{1+\left[f^{(i)}\left(x_i\right)\right]^2}\,dx\,. \tag{15}$$

(15) bərabərsizliyində ε ixtuyari müsbət ədəd olduğu üçün

$$\lim_{\lambda_n \to 0} S_n^{(2)} = 0 \qquad (16)$$

bərabərliyini alırıq. (14) və (16) bərabərliklərini (9) düsturunda nəzərə alsaq,

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f^{(i)}(x_i)\right]^2}\, dx \qquad (17)$$

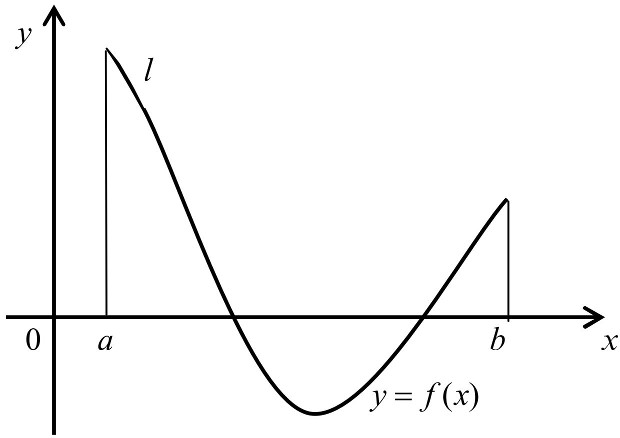
olduğunu tapırıq, yəni l xəttinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi üçün (17) düsturunu alırıq.

Qeyd. Yuxarıda şərh olunan mühakimələrdən aydındır ki, $f(x)$ funksiyası mənfi olduqda fırlanma səthinin sahəsi

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + \left[f^{(i)}(x_i)\right]^2}\, dx \qquad (18)$$

olar, bu isə bizə aşağıdakı şəkildə ümumi teoremi söyləməyə imkan verir.

Teorem 3. Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır (funksiyanın müsbət və ya mənfi olması şərti qoyulmur, şəkil 4) və onun bu parçada birinci tərtib kəsilməz törəməsi



Şəkil 4.

var. $y=f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında təyin etdiyi əyri xətti l ilə işarə edək. Onda l xəttinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi var və bu sahə (18) düsturu ilə hesablanır.

(18) düsturunun tətbiqinə aid aşağıdakı məsələləri həll edək.

Məsələ 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a \geq b)$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həlli. Ellipsin tənliyindən alırıq ki:

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2; \qquad y\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}x;$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}= \tag{19}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\ ,$$

burada

$$\varepsilon^2=(a^2-b^2)\ /a^2\ .$$

Beləliklə, (17) düsturuna əsasən fırlanma səthinin sahəsi üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx=$$

$$=4\pi\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}=4\pi\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+a^2\arcsin\varepsilon\right).$$

Deməli, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a \geq b)$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi

$$S = 2\pi \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2 a^2} + a^2 \arcsin\varepsilon\right)$$

düsturu ilə hesablanır. Əgər $a=b=R$ isə, onda (19) bərabərliyindən alırıq ki,

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = R \text{ - } dir.$$

Deməli, $a=b=R$ olan halda

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} Rdx = 4\pi\int_{0}^{R} Rdx = 4\pi Rx\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

Beləliklə: Əgər $a=b=R$ isə, yəni ellips radiusu R olan çevrə isə, onda bu çevrənin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan R radiuslu sferanın sahəsi $S = 4\pi R^2$-a bərabərdir.

Məsələ 2. Tutaq ki, l əyrisi $y = chx$ funksiyasının $x \in [0,1]$ parçasında qrafikidir. l əyrisinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həlli. $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ və $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğu üçün $\frac{dy}{dx} = shx$ olur. Deməli, (17) düsturuna əsasən, tələb olunan səthin sahəsi

$$S = 2\pi\int_0^1 chx\sqrt{1+sh^2x}\,dx \tag{20}$$

olar. $1+sh^2x = ch^2x$ eyniliyindən (20) düsturunda istifadə etsək,

$$S = 2\pi\int_0^1 ch^2x\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{1+ch2x}{2}dx = \pi\left(x+0,5\,sh\,2x\right)\Big|_0^1 =$$
$$= \pi\left(1+0,5\,sh\,21\right)$$

olduğunu alırıq, yəni l əyrisinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $\pi(1+0{,}5\,sh\,21)$ - ə bərabərdir.

Məsələ 3. Tutaq ki, l əyrisi $y=\sin x$ funksiyasının $x\in[0,\pi]$ parçasında qrafikidir. Bu əyrinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həlli. Məsələnin şərtinə görə $a=0,\ b=\pi,\ f(x)=\sin x$, $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ olduğu üçün (17) düsturuna əsasən, tələb olunan səthin sahəsi

$$S=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

olur.

Buradan alırıq ki,

$$S=2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+(-\cos x)^2}\,d(-\cos x)=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=4\pi\int_0^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt. \qquad (21)$$

Bilavasitə yoxlamaqla asanlıqla inanmaq olar ki,

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+c \qquad (22)$$

bərabərliyi doğrudur, burada c –ixtiyari sabitdir. (22) bərabərliyini (21) – də nəzərə alsaq,

$$S=4\pi\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Big|_0^1=2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

olduğunu tapırıq, yəni l əyrisinin OX oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$-ə bərabərdir.

§7. Törəmənin həndəsəyə tətbiqi.

Bu paraqrafda biz törəmə vasitəsilə bəzi həndəsi fiqurların ölçüləri arasında əlaqə düsturlarının mövcudluğunu şərh edəcəyik.

1. Radiusu r olan dairənin sahəsini $S(r)$ ilə işarə edək. Bilirik ki:

$$S(r) = \pi r^2 . \tag{1}$$

(1) düsturunda $S(r)$ -ə r – dən asılı funksiya kimi baxaq və onun törəməsini hesablayaq:

$$\frac{d}{dr} S(r) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r = P(r) , \tag{2}$$

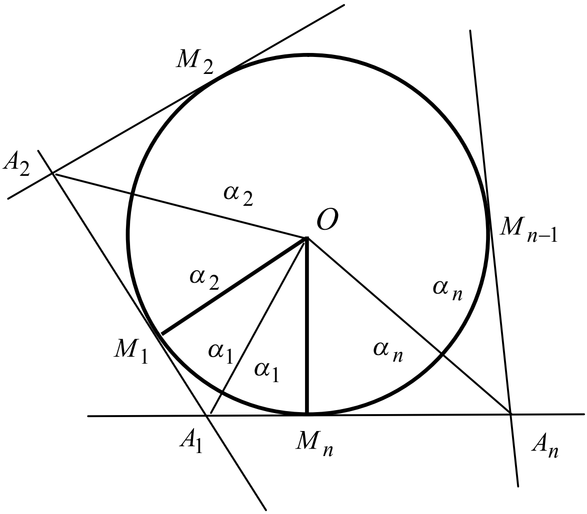
burada $P(r)$ – radiusu r olan çevrənin uzunluğudur.

Beləliklə,

$$\frac{d}{dr} S(r) = P(r)$$

düsturu göstərir ki, radiusu r olan dairənin $S(r)$ sahəsinə r-dən asılı funksiya kimi baxıb, onun törəməsini tapsaq, biz nəticədə radiusu r olan çevrənin $P(r)$ uzunluğunu alarıq.

2. Radiusu r olan çevrənin xaricinə çəkilmiş n- bucaqlının (şəkil 5) sahəsini $S(r)$, onun perimetrini isə $P(r)$ ilə işarə edək. $S(r)$- in r-dən asılılığını tapaq. Çevrənin O mərkəzini $A_1 A_2 ... A_n$ n-bucaqlısının təpə nöqtələri ilə birləşdirək. Bu



Şəkil 5.

zaman A_i-ci təpə bucağı iki bərabər bucağa bölünür ki, bu bucaqların dərəcə ölçüsünü α_i ilə işarə edək. Bilirik ki,

$$S(r) = \frac{r}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_1). \qquad (3)$$

$M_1, M_2, ..., M_n$ ilə n-bucaqlının çevrəyə toxunma nöqtələrini işarə edək. Onda şəkildən göründüyü kimi

$$A_1M_1 = rctg\alpha_1, \qquad M_1A_2 = rctg\alpha_2$$

bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq ki,

$$A_1A_2 = r(ctg\alpha_1 + ctg\alpha_2)\,; \tag{4}$$

analoji qayda ilə tapırıq ki,

$$\begin{aligned} &A_2A_3 = r(ctg\alpha_2 + ctg\alpha_3),\\ &\vdots\\ &A_{n-1}A_n = r(ctg\alpha_{n-1} + ctg\alpha_n),\\ &A_nA_1 = r(ctg\alpha_n + ctg\alpha_1). \end{aligned} \tag{5}$$

(4) və (5) düsturlarını (3)-də nəzərə alsaq, alarıq

$$S(r) = r^2(ctg\alpha_1 + \ldots + ctg\alpha_n). \tag{6}$$

(6) düsturunda $S(r)$-ə r-dən asılı funksiya kimi baxıb, onun törəməsini tapaq:

$$\frac{d}{dr}S(r) = \frac{d}{dr}\left[r^2(ctg\alpha_1 + \ldots + ctg\alpha_n)\right] = 2r(ctg\alpha_1 + \ldots + ctg\alpha_n) =$$

$$= r(ctg\alpha_1 + ctg\alpha_2) + r(ctg\alpha_2 + ctg\alpha_3) + \ldots + r(ctg\alpha_{n-1} + ctg\alpha_n) +$$

$$+ r(ctg\alpha_n + ctg\alpha_1) = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = P(r). \tag{7}$$

(6) və (7) düsturları göstərirlər ki, radiusu r olan çevrənin xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlının $S(r)$ sahəsinin r-ə nəzərən törəməsi bu çoxbucaqlının perimetrinə bərabərdir.

3. Radiusu r olan kürənin həcmini $V(r)$, onun səthinin sahəsini (yəni radiusu r olan sferanın sahəsini) $S(r)$ ilə işarə edək. Bilirik ki:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\,. \tag{8}$$

(8) düsturunda $V(r)$-ə r-dən asılı funksiya kimi baxıb, onun törəməsini tapaq:

$$\frac{d}{dr}V(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right] = 4\pi r^2 = S(r). \tag{9}$$

(8) və (9) düsturları göstərirlər ki, radiusu r olan kürənin $V(r)$ həcminin r-ə nəzərən törəməsi həmin radiuslu sferanın sahəsinə (yəni bu kürənin səthinin sahəsinə) bərabərdir.