$\boxed{\text{R.İ.Muradov}}$, B.Ö.Tahirov, F.M.Namazov,

S.N.Əfəndi, E.A.Qasımov, Q.Z.Abdullayeva

Məktəb riyaziyyat kursunun elmi əsasları

2 0 0 7

Elmi redaktor: **fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Karlen İskəndər oğlu Xudaverdiyev**

Rəyçilər: **f.- r.e.d., professor Ə.M.Əhmədov,**
f.- r.e.n., dosent V.Ə.Qasımov

Kompüterdə tərtib edən – R.Ə.Yusubova

R.İ.Muradov, B.Ö.Tahirov, F.M.Namazov,
S.N.Əfəndi, E.A.Qasımov, Q.Z.Abdullayeva

«Məktəb riyaziyyat kursunun elmi əsasları»

G İ R İ Ş

Məlumdur ki, gələcək riyaziyyat müəllimləri məktəb riyaziyyat kursunun ümumi məsələləri, riyaziyyat fənninin məntiqi qurulması prinsipləri, çoxluq, ədəd, cəbri əməl, həndəsi fiqur, kəmiyyət, ölçü və s. haqqında formal-məntiqi baxımdan əsaslandırılmış biliklərə malik olmalıdırlar. Ona görə də «məktəb riyaziyyat kursunun elmi əsasları» fənninin məzmununu orta məktəb riyaziyyat kursuna daxil olan mühüm ideya, anlayış, fakt və metodları elmi-məntiqi əsaslandırmaq və məktəb riyaziyyatının dilini təhlil etmək təşkil edir.

Oxuculara təqdim olunan bu dərslik mexanika-riyaziyyat fakültəsinin tələbələri və gənc müəllimlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Dərslik mexanika-riyaziyyat fakültəsinin tədris proqramına uyğun olaraq tərtib olunmuş və 9 fəsildən ibarətdir. Dərslikdə bəzi mühüm faktlar ciddi isbat olunmuşdur. Dərsliyə daxil edilmiş misal və məsələlər həlli ilə verilmişdir. Dərsliyə oxucuların sərbəst işləməsi üçün nəzərdə tutulan məsələ və misallar da daxil edilmişdir.

I FƏSİL

ELEMENTAR RİYAZİYYATIN BƏZİ ÜMUMİ MƏSƏLƏLƏRİ.

§1. Elementar riyaziyyatın predmeti və məqsədləri.

Məlumdur ki, məktəb riyaziyyat kursuna müxtəlif məsələlər daxildir: ədəd haqqında təlimin genişləndirilməsi, cəbri ifadələrin təlimi (çoxhədlilər, rasional ifadələr, irrasional ifadələr), tənliklərin təlimi, funksiyalar haqqında təlimin elementləri, bəzi transendent funksiyaların öyrənilməsi (üstlü, loqarifmik), koordinat metodu haqqında anlayış və onun funksiyaların araşdırılmasına tətbiqi, limit haqqında anlayış (ardıcıllığın limiti), sadə sıraların cəmlənməsi (xüsusi halda silsilələr), təqribi hesablamaların elementləri və s. Bu məsələlərdən bəziləri bilavasitə cəbrə aiddir (çoxhədlilər haqqında təlim, eynilik çevirmələri, cəbri tənliklər), bəziləri isə özlərinin sonrakı inkişafını başqa riyazi fənlərdə tapır. Məsələn, limit anlayışı, həmçinin sadə transendent funksiyaların öyrənilməsi cəbrə deyil, riyazi analiz kursuna aiddir. Məktəb riyaziyyat kursunun belə qeyri-bircins olması qaçılmazdır, belə ki, məktəb riyaziyyat kursunun qarşısında qoyulan tələblər hər hansı bir fənn çərçivəsində məhdudlaşmadan, şagirdlərə müəyyən zəruri kompleks ümumtəhsil anlayışları və vərdişləri verməkdən ibarətdir.

Universtitetdə tədris edilən elementar riyaziyyat kursunun qarşısında qoyulan əsas məqsədlər bunlardır: məktəb riyaziyyat kursuna daxil olan əsas materialların dərindən öyrənilməsinə, məktəb kursu üçün xarakterik olan tədqiqat üsullarının inkişaf etdirilməsinə və elmi cəhətdən əsaslandırılmasına kömək etmək və hazırda məktəb kursuna daxil olmayan bir sıra mühüm anlayışları tələbələrin diqqətinə çatdırmaq və onlara bu məsələlər haqqında zəruri biliklər verməkdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, elə mühüm məsələlər də vardır ki (məsələn, tənliklərin və bərabərsizliklərin eynigüclülüyünün ümumi nəzəriyyəsi və s.), onlara ali riyaziyyat kursunda toxunulmur. Onları elementar riyaziyyatdan məlum olan məsələlər kimi qəbul edirlər. Məktəb kursu isə onları lazım olan ciddiliklə və tamlıqla şərh etmək iqtidarında deyildir. Belə materialları da tələbələrin diqqətinə çatdırmaq lazımdır.

§ 2. Riyaziyyatın öyrənilməsi prosesində təfəkkür formaları.

Riyazi biliklərin dərindən mənimsənilməsi şagirdin riyazi təfəkkürünün məqsədyönlü inkişafına nail olmadan mümkün deyil. Fəlsəfi nöqteyi-nəzərdən təfəkkür obyektiv gerçəkliyin insan şüurunda fəal inkişafıdır. Formal məntiqə görə, təfəkkür üç formada təzahür edir:

1) anlayış,
2) mülahizə və
3) əqli nəticə.

Təfəkkürün bu formalarını fərqləndirmək üçün aşağıdakı misallara baxaq:

I. a) üçbucağın medianı onun hər hansı tərəfinin orta nöqtəsini bu tərəfin qarşısındakı təpə nöqtəsi ilə birləşdirən parçadır;
b) trapesiyanın orta xətti onun yan tərəflərinin orta nöqtələrini birləşdirən parçadır.

Bu təkliflərin hər ikisinin bir ortaq əlaməti var. Onların hər biri müəyyən şərtləşməni ifadə edir və hər ikisi anlayışdır.

II. a) müstəvinin iki müxtəlif nöqtəsindən yalnız bir düz xətt keçirmək olar;
b) istənilən üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180^0-yə bərabərdir.

Bunların hər ikisi əsaslandırılmağa ehtiyacı olan hökmü ifadə edir və mülahizə adlanır.

III. a) əgər $a = b$ və $b = c$ olarsa, onda $a = c$;

b) əgər $a \in A$ və $A \subset B$ olarsa, onda $a \in B$.

Bu təkliflərin hər ikisində müəyyən şərtlərə əsaslanaraq müəyyən nəticə çıxarılır. Onların hər ikisi əqli nəticə adlanır.

§3. Riyazi anlayışlar.

Obyektləri bir-birindən müxtəlif xüsusiyyətlərinə, xassələrinə və əlamətlərinə görə fərqləndirirlər. Tədqiq olunan obyektlərin xassələrini

1) fərdi və
2) ümumi xassələrə ayırmaq olar.

Obyektlərin ümumi xassələri fərqləndirici və fərqləndirici olmayan ola bilər. Obyektin ümumi xassəsi mühüm xassə olarsa, onda o fərqləndirici xassə adlanır.

Anlayış öyrənilən obyektin mühüm (fərqləndirici) xassələrinin inikas olunduğu təfəkkür formasıdır. Əgər anlayış real aləmdə mövcud olan obyektlərin inikasından ibarətdirsə, onda anlayvş düzgün anlayış adlanır. Hər bir anlayışı məzmun və həcminə görə xarakterizə etmək olar.

Anlayışın bütün mühüm (fərqləndirici) xassələrinin küllisi onun məzmunu adlanır.

Anlayışda təmsil olunan obyektlər küllisi onun həcmi adlanır.

Məsələn «paraleloqram» anlayışının məzmununu aşağıdakı mühüm xassələr təşkil edir:

1) qarşı tərəflərin bərabərliyi,
2) qarşı bucaqların bərabərliyi,
3) diaqonalların kəsişmə nöqtəsində hər bir diaqonalın yarıya bölünməsi və s.

«Paraleloqram» anlayışının həcmini isə aşağıdakı fiqurlar təşkil edir: 1) paraleloqramlar; 2) romblar; 3) düzbucaqlılar; 4) kvadratlar.

Anlayışın həcmi onun məzmununu birqiymətli müəyyən edir və tərsinə. Anlayışın həcmi və məzmunu arasında bir növ «tərs» əlaqə vardır: əgər anlayışın məzmunu artarsa,onun həcmi azalar və tərsinə, anlayışın məzmunu azalarsa, onun həcmi artar.

Məsələn, ümumiləşdirmə zamanı anlayışın həcmi genişlənir, məzmunu daralır. Lakin xüsusiləşdirmə zamanı anlayışın həcmi daralır, məzmunu isə genişlənir. Anlayışın məzmunu və həcmi arasındakı göstərilən asılılıq o zaman doğru olur ki, məzmunun dəyişməsi prosesi zamanı bir anlayışın həcmi digər anlayışın həcminin altçoxluğu olsun.

Əgər bir anlayışın həcmi (h_1) o biri anlayışın həcminin (h_2) altçoxluğu olarsa, onda ikinci anlayış birinci üçün cins anlayış, birinci isə öz növbəsində ikinci üçün növ anlayış adlanır.

Məsələn, romb paraleloqram anlayışına nəzərən növ, öz növbəsində paralelrqram romb anlayışı üçün cinsdir.

Anlayışın formalaşmasında onun nitq və siməd vasitəsilə ifadə olunması zəruridir.

Elm və texnikanın müəyyən anlayışını birqiymətli işarə edən söz elmi termin adlanır. Məsələn, «romb» sözü elmi termindir.

Anlayışın məzmununu təsəvvür etmək üçün onun mühüm xassələrini göstərmək lazımdır. Bunu anlayışın tərifində göstərirlər. Anlayışın hər biri ayrılıqda zəruri, hamısı birlikdə kafi olan bütün əlamətlərinin (xassələrinin) əlaqəli cümlələr şəklində təsviri (ifadəsi) anlayışın tərifi adlanır. anlayışın tərifində artıq söz olmamalıdır.

Şagirdlərə izah olunmalıdır ki, anlayışın tərifi isbat olunmur. Anlayışlara tərif müxtəlif üsullarla verilə bilər.

1. Yaxın cins və növ fərqinin göstərilməsi ilə anlayışa tərif aşağıdakı sxem üzrə verilir:

$$A_1 = \{x | x \in A \wedge P(x)\} \wedge A_1 \neq \varnothing,$$

$$A_2 = \{x | x \in A \wedge 1P(x)\} \wedge A_1 \neq \varnothing,$$

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ A_1 \cup A_2 = A \text{ olarsa,}$$

$A_1(A_2)$ anlayışı A anlayışına nəzərən növ, A anlayışı isə $A_1(A_2)$ anlayışına nəzərən cins anlayış adlanır (burada P müəyyən xassədir).

Yaxın cins və növ fərqinin göstərilməsi ilə verilən tərifə misal göstərək: «Diaqonalları bərabər olan paraleloqrama düzbucaqlı deyilir». Burada yaxın cins – paraleloqram, növ fərqi – diaqonalların bərabər olması, termin isə düzbucaqlıdır. Yuxarıdakı sxemə uyğun yazsaq

A= {paraleloqramlar çoxluğu},

A_1= {diaqonalları bərabər olan paraleloqramlar çoxluğu},

P= «Diaqonalların bərabər olması».

Yaxın cins növ fərqinin göstərilməsi ilə verilən təriflər aşağıdakı konkret formalarda ola bilər:

1) obyektlərin xarakterik əlamətlərini göstərməklə onlara verilən təriflər;
2) inkar edən təriflər;
3) konstruktiv və rekursiv təriflər.

Bu formaların hər birində məntiqi bağlayıcılardan (və, və ya) istifadə oluna bilər. Ona görə də orta məktəb riyaziyyat kursunda konyuktiv və dizyuntiv təriflər də fərqləndirilir.

Obyektlərə onların xarakterik əlamətlərini göstərməklə verilən tərifə misal göstərək: «Qarşı tərəfləri cüt-cüt paralel olan düz xətlər üzərində yerləşən dördbucaqlı paraleloq-ram adlanır».

Bu tərifdə: cins – dördbucaqlı;
növ fərqləri – bir cüt qarşı tərəfin paralel olması və o biri cüt qarşı tərəfin paralel olması;
termin – paraleloqramdır.

Digər tərəfdən, bu tərifdə növ fərqləri məntiqi «və» bağlayıcısından istifadə olunmaqla birləşdirildiyindən o həm də konyuktiv tərifdir.

Başqa bir misal göstərək: «Məxrəci sürətindən kiçik olan və ya məxrəci sürətinə bərabər olan kəsr düzgün olmayan kəsr adlanır».

Bu tərifdə: cins – adi kəsr;

növ fərqləri – məxrəci sürətdən kiçikdir və ya məxrəc sürətə bərabərdir;

termin – düzgün olmayan kəsr.

Bu tərifdə növ fərqləri məntiqi «və ya» bağlayıcısı ilə birləşdiyindən o dizyuntiv tərifdir. İnkar edən tərif təsvir etdiyi obyektlərin xassələrini yox, bu obyektlərdə olmayan xassələri təsvir edir. Məsələn, «Bir müstəvidə yerləşməyən və ortaq nöqtəsi olmayan düz xətlər çarpaz düz xətlər adlanır».

Bu tərifdə: cins – düz xətlər;

növ fərqləri – bir müstəvidə yerləşməmək və ortaq nöqtəyə malik olmamaq;

termin – çarpaz və düz xətlər.

Bu tərif həm də konyuktiv tərifdir.

Konstruktiv və rekursiv təriflərdə obyektin xassələri onun konstruksiya olunmasının təsviri ilə göstərilir. Başqa sözlə, növ fərqləri əməllər vasitəsilə verilir. Məsələn, «$y = kx + b$ şəklində göstərilə bilən funksiya xətti funksiya adlanır, burada k və b məlum ədədlər, x isə sərbəst dəyişəndir».

Bu tərifdə: cins – funksiya;

növ fərqləri – x sərbəst dəyişən və k və b məlum ədədlər;

termin – xətti funksiyadır.

Obyektin qurulması (konstruksiya olunması) üçün tələb olunan əməllər müxtəlif formalarda verilə bilər. Məsələn, rekursiv tərifdə müəyyən bazis obyekti və bu xassəli yeni obyektləri qurmağa imkan verən qayda verilir. Məsələn, «ədədi ardıcıllıqda ikincidən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki hədlə bu ədədi ardıcıllıq üçün sabit olan bir ədədin hasilinə bərabər olarsa, onda bu ədədi ardıcıllıq həndəsi silsilə adlanır: $a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad n \geq 2$.

§4. Riyazi təkliflər.

Təfəkkürdə anlayışlar bir-birilə müəyyər əlaqədə olur. Anlayışların əlaqələri təkliflər vasitəsi ilə ifadə olunur.

Riyazi təkliflərin aşağıdakı növləri fərqləndirilir: aksiomlar, teoremlər və qaydalar (alqoritmlər). Aksiom isbatsız qəbul edilən riyazi təklifdir. Məsələn, «Müstəvinin iki müxtəlif nöqtəsindən yeganə düz xətt keçirmək olar».

Riyazi nəzəriyyə qurularkən ilk anlayışlar, ilk münasibətlər, aksiomlar sistemi və nəticə çıxarmaq qaydaları qəbul edilir.

Aksiomlar sistemi ziddiyyətsiz, asılı olmayan və tam olmalıdır.

Əgər verilən aksiomlar sistemindən bu sistemlə qurulan nəzəriyyəyə aid olan eyni bir təklifin həm doğru, həm də yalan olması alınmırsa, onda aksiomlar sistemi ziddiyyətsiz adlanır. Əks halda aksiomlar sistemi ziddiyyətli adlanır.

Əgər aksiomlar sisteminin heç bir aksiomu bu sistemin yerdə qalan aksiomlarından nəticə kimi alınmırsa, onda verilən aksiomlar sistemi asılı olmayan adlanır.

Aksiomlar sisteminin tamlığı dedikdə bu sistemlə ifadə oluna bilən istənilən təklifin doğru və ya yalan olduğunu isbat etməyin mümkün olduğu başa düşülür.

Doğruluğu isbat olunan (əsaslandırılan) riyazi təkliflər teorem adlanır.

Alqoritm (qayda) dedikdə qoyulmuş məqsədə çatmaq və ya qoyulmuş məsələni həll etmək üçün müəyyən ardıcıllıqla yerinə yetirilən əməl və ya əməliyyatlar küllisi başa düşülür.

Məktəb riyaziyyat kursunda alqoritm və qaydalar çoxdur. Məsələn, natural ədədin sadə vuruqlarına ayrılması qaydası; kəsrlərin ən kiçik ortaq məxrəcə gətirilməsi qaydası və s.

Alqoritmlərə qoyulan tələblərin ən mühümləri aşağıdakılardır:

1) alqoritmi yerinə yetirdikdə həmişə konkret nəticə alınmalıdır;
2) alqoritm sadə və aydın olmalıdır;
3) alqoritm sonlu sayda adımlardan (əməl və ya əməliyyatdan) ibarət olmalıdır və s.

Məsələn, $ax = b$ şəklində olan tənliyin həlli alqoritmini yada salaq: 1) əgər $a \neq 0$ isə, onda $x = \frac{b}{a}$; 2) əgər $a = 0$ və $b = 0$ isə, onda istənilən ədəd həldir; 3) əgər $a = 0$ və $b \neq 0$ isə, onda tənliyin həlli yoxdur.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu alqoritm yuxarıdakı tələblərin hər birini ödəyir.

§5. Teoremlərin növləri və onların qarşılıqlı əlaqəsi.

Hər bir teorem əsasən iki hissədən ibarət olur:

1) bu və ya digər riyazi fakta hansı şərtlərlə baxılır (teoremin şərti);
2) bu fakt haqqında nə təsdiq olunur (teoremin hökmü).

Məsələn, belə bir teoremi nəzərdən keçirək: «Əgər dördbucaqlı paraleloqramdırsa, onda onun diaqonalları kəsişərək, yarıya bölünürlər».

Burada teoremin şərti (p): dördbucaqlı-paraleloqramdır; teoremin hökmü (q): diaqonalların kəsişmə nöqtəsi onların hər birini yarıya bölür.

Teoremin şərtini və hökmünü asanlıqla ayırd etmək üçün onu çox vaxt «əgər..., onda...» məntiqi bağlayıcısından istifadə edərək, implakasiya şəklində ifadə edirlər. Ona görə də teoremi ümumi şəkildə, məntiqi dildə belə yazmaq olar: $p \Rightarrow q$.

Teoremin isbat edilməsi isə onu göstərməkdən ibarətdir ki, əgər şərt ödənirsə, bu halda məntiqi olaraq ondan hökm alınır, yəni p-nin doğruluğunu qəbul edərək, məntiqin müəyyən qaydalarına uyğun olaraq q-nün doğru olduğunu isbat etməkdən ibarətdir.

Verilmiş $p \Rightarrow q$ teoremindən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri almaq olar:

a) tərs teorem: $q \Rightarrow p$;

b) əks teorem: $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$;

c) əks teoremin tərs teoremi: $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Əgər yuxarıdakı teoremi düz teorem qəbul etsək, onda bu teoremdən aşağıdakı teoremləri almaq olar:

1) Əgər dördbucaqlı - paraleloqramdırsa, onda onun diaqonalları kəsişərək, kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünürlər $(p_1 \Rightarrow q_1)$.
2) Əgər dördbucaqlıda diaqonallar kəsişərək, yarıya bölünürsə, onda bu dördbucaqlı paraleloqramdır $(q_1 \Rightarrow p_1)$.
3) Əgər dördbucaqlı paraleloqram deyildirsə, onda onun diaqonalları kəsişərək, kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünmürlər $(\overline{p}_1 \Rightarrow \overline{q}_1)$.
4) Əgər dördbucaqlıda diaqonallar kəsişərək, kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünmürsə, onda belə dördbucaqlı paraleloqram deyil $(\overline{q}_1 \Rightarrow \overline{p}_1)$.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, bu misalda alınan bütün dörd teoremin hər biri doğrudur.

Lakin bu həmişə belə olmur.

Belə bir təklifə baxaq: Əgər bucaqlar qarşılıqlıdırsa, onda onlar bərabərdirlər «$(p_2 \Rightarrow q_2)$». Verilmiş bu teoremin tərsini, əks teoremini və əks teoremin tərs teoremini tərtib edək:

a) Əgər bucaqlar bərabərdirsə, onda onlar qarşılıqlı bucaqlardır $(q_2 \Rightarrow p_2)$.
b) Əgər bucaqlar qarşılıqlı deyilsə, onda onlar bərabər deyil $(\overline{p}_2 \Rightarrow \overline{q}_2)$.
c) Əgər bucaqlar bərabər deyilsə, onda onlar qarşılıqlı deyil $(\overline{q}_2 \Rightarrow \overline{p}_2)$.

Bu misal göstərir ki:

a) düz teorem doğru olsa da, onun tərsi olan teorem doğru deyil (məsələn, düz bucaqlar bərabərdir, lakin onların qarşılıqlı olmaları vacib deyil);
b) düz teorem doğru olduğu kimi, əks teoremin tərsi olan teorem də doğrudur;
c) verilmiş teoremin tərsi olan teoremin doğru olmadığı kimi,

onun əksi olan teorem də doğru deyil.
Burada müəyyən edilmiş xassələr təsadüfi deyil. Bu dörd növ teorem arasında sıx əlaqə vardır:

1) $p \Rightarrow q$ və $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ eyni zamanda doğrudur və ya doğru deyil;
2) $q \Rightarrow p$ və $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ həmçinin eyni zamanda doğrudur və ya doğru deyil.

Teoremlər arasında belə qarşılıqlı əlaqənin olması onların öyrənilməsini asanlaşdırır.

Doğrudan da, riyazi obyektlərin teoremlər şəklində ifadə olunmuş xassələrinə baxdıqda, bütün dörd növ teoremlərin hamısının öyrənilməsi zərurəti yoxdur: cüt-cüt ekvivalent olan teoremlərdən (düz və tərs və ya düz və əks və s.) hər hansı birinin doğru olduğunu və ya doğru olmadığını müəyyənləşdirmək kifayətdir, belə ki, bu iki teoremdən hər birinin doğru olması və ya doğru olmaması qalan iki teoremdən hər birinin doğru olmasını və ya doğru olmamasını müəyyən edəcək. Elə buna görə də istənilən riyaziyyat kursunda biz adətən yalnız düz və tərs teoremlərlə rastlaşırıq, qalan teoremlərlə çox təsadüfi hallarda rastlaşmaq olur.

§6. Zəruri və kafi şərtlər.

Aşağıdakı təklifləri nəzərdən keçirək:

1) Əgər verilmiş natural ədəd cütdürsə, onda həmin ədəd 6-ya bölünür.
2) Əgər verilmiş natural ədəd 6-ya bölünürsə, onda həmin ədəd cütdür.
3) Əgər verilmiş natural ədəd cütdürsə, onda həmin ədəd 2-yə bölünür.
4) Əgər verilmiş natural ədəd 2-yə bölünürsə, onda həmin ədəd cütdür.

Bu təkliflərdən hər birini riyazi məntiq dilində ifadə etmək olar:

$$1)\ p_1 \Rightarrow q_1; \quad 2)\ q_1 \Rightarrow p_1 \quad 3)\ p_2 \Rightarrow q_2; \quad 4)\ q_2 \Rightarrow p_2 .$$

Biz görürük ki, birinci təklif doğru deyil, lakin ikinci, üçüncü və dördüncü təkliflər doğrudur.

Teoremləri ifadə etdikdə tez-tez «kafi» , «zəruri», «kafi və zəruri» terminlərindən istifadə edirlər. Bu terminlərin mənasını aydınlaşdıraq:

1. Əgər p-dən məntiqi olaraq q alınırsa (yəni $p \Rightarrow q$ teoremi doğrudursa), onda p şərtinə q hökmü üçün kafi şərt deyilir.
2. Əgər q-dən məntiqi olaraq p alınırsa (yəni $q \Rightarrow p$ teoremi doğrudursa), onda p şərtinə q hökmü üçün zəruri şərt deyilir.
3. Əgər p-dən məntiqi olaraq q alınırsa və q-dən də məntiqi olaraq p alınırsa (yəni hər iki teorem: düz və onun tərsi doğrudursa), onda p şərtinə q hökmü üçün kafi və zəruri şərt deyilir.

Yuxarıda baxdığımız misalda p_1 şərti q_1 üçün kafi şərt deyil, çünki p_1-dən məntiqi olaraq q_1 alınmır (yəni p_1-in doğru olmasından q_1-in doğru olması alınmır); p_2 isə q_2 üçün kafi şərtdir, çünki p_2-dən məntiqi olaraq q_2 alınır.

Bununla belə p_1 şərti q_1 üçün zəruri şərtdir, belə ki, q_1-dən məntiqi olaraq p_1 alınır.

p_2 şərti isə q_2 üçün kafi və zəruri şərtdir, belə ki, hər iki teorem eyni zamanda doğrudur: $p_2 \Rightarrow q_2$ və $q_2 \Rightarrow p_2$ (yəni burada $p_2 \Leftrightarrow q_2$ məntiqi ekvivalentliliyi vardır).

Aşağıdakı hallar da mümkündür:

a) p şərti q hökmü üçün kafidir, lakin zəruri deyil;

b) p şərti q hökmü üçün zəruridir, lakin kafi deyil.

Birinci halda p-nin doğruluğundan q-nün doğruluğu alınır, lakin q-nün doğruluğu həm də başqa p_1 şərtindən də alına bilər. Məsələn, ədədin cüt olması üçün, onun yalnız 6-ya bölünməsi deyil, həm də 4-ə bölünməsi kafidir. İkinci halda q-

nün doğru olmasından p-nin doğru olduğu alınır, eyni zamanda, əgər p doğru olarsa, onda q hər halda doğru olmaya da bilər. Məsələn, ədədin 6-ya bölünməsi üçün, həmin ədədin cüt olması zəruridir, lakin kafi deyil; məsələn, 4 cüt ədəddir, lakin 0, 6-ya bölünmür.

«Kafi», «zəruri», «kafi və zəruri» terminlərindən istifadə etdikdə «şərt» sözünün əvəzinə tez-tez «əlamət» sözü işlədilir.

«Kafi və zəruri» sözlərinin əvəzinə çox vaxt belə sözlərdən istifadə olunur: «onda və yalnız onda», «o halda və yalnız o halda», «o və yalnız o», «əgər və yalnız əgər». Onu da qeyd etmək faydalıdır ki, bu bağlayıcı ifadələrin ayrıca baxılan hissələri də müəyyən məna daşıyır: məsələn, «yalnız o halda», «yalnız onda» və s.sözləri isə «kafi şərt» sözlərini əvəz edirlər.

§7. Aksiomatik metod. Evklid həndəsəsinin aksiomları.

Aksiomatik metod elmi nəzəriyyələrin qurulması metodur. Elmi nəzəriyyə aksiomatik metodla qurulduqda:

1) bu nəzəriyyənin ilk anlayışları və ilk münasibətləri müəyyən edilir (ilk anlayışlara və münasibətlərə tərif verilmir);
2) ilk anlayışlar və münasibətlər arasındakı əlaqəni təyin edən aksiomlar sistemi seçilir və isbatsız qəbul edilir;
3) elmi nəzəriyyənin hər bir yeni anlayışı ilk anlayışlar və daha əvvəl daxil edilmiş anlayışlar vasitəsilə tərif edilir; elmi nəzəriyyənin hər bir yeni təklifi qəbul edilmiş aksiomlardan və daha əvvəl isbat edilmiş təkliflərdən dediktiv metodla alınır.

Nəticə çıxarmaq qaydaları, yəni bir doğru təklifdən digər təkliflərin alınması qaydaları qurulan nəzəriyyənin deyil, riyazi məntiqin predmetidir.

Qəbul edilmiş aksiomlar sistemi ziddiyyətsiz, tam və asılı olmayan aksiomlardan təşkil olunmalıdır. Aksiomatik metodun inkişafı prosesində aşağıdakı üç mərhələ fərqləndirilir:

1) məzmunlu aksiomlaşdırma mərhələsi;
2) yarımformal aksiomlaşdırma mərhələsi;
3) formal aksiomlaşdırma mərhələsi.

Elmi nəzəriyyənin məzmunlu aksiomlaşdırılması zamanı aksiomlar sistemi müəyyən çoxluğun obyektləri arasında əsas əlaqə və münasibətləri təsvir edir. Teoremlərin isbatı zamanı formal məntiq qanunlarından istifadə olunur.

Məsələn, əsasları məktəb həndəsə kursunda şərh olunan Evklid həndəsəsi belə aksiomlaşdırılmışdır.

Elmi nəzəriyyənin yarımformal aksiomlaşdırılması zamanı onun əhatə etdiyi obyektlər də aksiomlar vasitəsilə təyin olunur. Yarımformal aksiomlaşdırma zamanı təkliflərin isbatı prosesində yenə də formal məntiq qanunlarından istifadə olunur. Məsələn, qruplar nəzəriyyəsinin ənənəvi şərhini yarımformal aksiomlaşdırmaya misal göstərmək olar.

Elmi nəzəriyyənin formal aksiomlaşdırılması zamanı həm onun əhatə etdiyi obyektlər, həm də nəticə çıxarmaq qanunları aksiomlar vasitəsi ilə təyin olunur.

Aşağıda məktəb həndəsəsinin aksiomlar sisteminin bir variantı verilir:

1) (Aid olma aksiomu). İstənilən düz xəttin üzərində olan nöqtələr və onun üzərində olmayan nöqtələr var.
2) (Düz xətt aksiomu). İxtiyari iki nöqtədən bir və yalnız bir düz xətt keçir.
3) (Nöqtələrin düz xətt üzərində yerləşməsi aksiomu). Düz xəttin ixtiyari üç nöqtəsindən biri və yalnız biri qalan ikisi arasında yerləşir.
4) (Düz xəttin bölünməsi aksiomu). Düz xəttin ixtiyari A nöqtəsi bu düz xəttin qalan nöqtələrini aşağıdakı şərt ödəyən iki çoxluğa ayırır: eyni çoxluğa aid iki nöqtə A nöqtəsinin bir tərəfində yerləşir.
5) (Parçaların ölçülməsi aksiomu). Uzunluq vahidi seçməklə hər bir parçanın uzunluğunu ölçmək olar, yəni onun uzunluğunu müsbət ədədlə ifadə etmək olar.
6) (Parçaların toplanması aksiomu). Parçanın uzunluğu,

onun hər hansı daxili nöqtəsi ilə bölündüyü parçaların uzunluqları cəminə bərabərdir.

7) (Parçanın ayrılması aksiomu). Şüanın başlanğıcından, uzunluğu verilmiş, bir və yalnız bir parça ayırmaq olar.
8) (Bucağın ölçülməsi aksiomu). Hər bir bucağın sıfırdan böyük müəyyən dərəcə ölçüsü var. Açıq bucaq 180^0-yə bərabərdir.
9) (Bucaqların toplanması aksiomu). Bucağın dərəcə ölçüsü, onun öz daxili şüası ilə bölündüyü bucaqların dərəcə ölçüləri cəminə bərabərdir.
10) (Tusi-Paş aksiomu). Üçbucağın təpələrindən keçməyən düz xətt onun bir tərəfini kəsirsə, onda həmin düz xətt digər iki tərəfdən yalnız birini kəsir.
11) (Bucağın ayrılması aksiomu). İstənilən şüadan başlayaraq verilmiş yarım müstəvidə, bir tərəfi həmin şüa olan bir və yalnız bir bucaq ayırmaq olar.
12) (Üçbucaqların bərabərliyinin birinci əlaməti). İki üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucağı bərabərdirsə, bu üçbucaqlar bərabərdir.
13) (Paralellik aksiomu). Düz xəttin üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə ən çoxu bir paralel düz xətt çəkmək olar.

    Əgər həndəsi fiqur, ortaq daxili nöqtəsi olmayan sonlu sayda üçbucaqlardan ibarətdirsə, ona sadə fiqur deyəcəyik. Aşağıdakı aksiomlar sadə fiqurların sahələrini hesablamağa imkan verir.
14) (Sahənin varlığı aksiomu). Hər bir sadə fiqurun seçilmiş ölçü vahidi ilə ifadə olunan müsbət sahisi var.
15) (Sahələrin bərabərliyi aksiomu). Bərabər üçbucaqların sahəsi bərabərdir.
16) (Sahələrin toplanması aksiomu). Əgər fiqur, ortaq daxili nöqtəsi olmayan sonlu sayda sadə fiqurlardan ibarətdirsə, onda bu fiqurun sahəsi onun hissələrinin sahələri səminə bərəbərdir.
17) (Sahə vahidi aksiomu). Tərəfi a olan kvadratın sahəsi a^2-na bərabərdir.

II FƏSİL

ÇOXLUQ ANLAYIŞI VƏ ONUN MƏKTƏB RIYAZIYYATINDA ROLU.

§1. Çoxluq. Çoxluğun elementləri.

Müasir riyaziyyatda ən vacib, çox yayılmış və geniş istifadə olunan anlayışlardan biri də çoxluq anlayışıdır. Məşhur rus riyaziyyatçısı akademik P.S.Aleksandrov demişdir: “Çoxluqlar nəzəriyyəsinin ideya və anlayışları tam mənası ilə demək olar ki, müasir riyaziyyatın bütün bölmələrinə nüfuz etmiş və onun simasını əsaslı surətdə dəyişmişdir. Ona görə də çoxluqlar nəzəriyyəsinin anlayışları ilə tanış olmadan müasir riyaziyyat haqqında düzgün təsəvvür əldə etmək olmaz”.

Çoxluq anlayışı riyaziyyatın ilk anlayışlarından biridir.

Çoxluq haqqında danışarkən, hər hansı bir obyektin bu çoxluğa daxil olması və ya daxil olmaması faktlarından biri doğru olmalıdır.

Çoxluğu əmələ gətirən obyektlər çoxluğun elementləri adlanır. Məsələn: 7, 11, 17, 19 ədədləri natural ədədlər çoxluğunun elementləridir. Çoxluqları bir-birindən fərqləndirmək üçün onları latın və yunan əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə edirlər. Çoxluğun elementləri isə bir qayda olaraq, latın və yunan əlifbasının kiçik hərfləri ilə işarə edilirlər. $A=\{a,b,c,d\}$ və $B=\{c,d,a,b\}$ çoxluqlarının elementləri müxtəlif qaydada yazılmasına baxmayaraq, *A və B* çoxluğu *a, b, c, d* elementlərinin çoxluğudur. *a* elementinin *A* çoxluğuna daxil olması münasibəti $a \in A$ şəklində göstərilir və belə oxunur: *“a* elementi A çoxluğuna daxildir” və ya *a A* çoxluğunun elementidir, bəzən bu faktı $A \ni a$ şəklində də yazırlar (“*A* çoxluğu *a* elementini özündə saxlayır”). *a* elementinin *A* çoxluğuna daxil olmaması faktı isə $a \notin A$ kimi işarə edilir, bəzən $a \overline{\in} A$ və ya

$A \ni a$ şəklində də yazırlar. Məsələn: Əgər A cüt natural ədədlər çoxluğudursa, onda $16 \in A$, $328 \in A$, $17 \notin A$, $1\frac{2}{3} \notin A$ və s.

Çoxluq o zaman verilmiş hesab edilir ki, istənilən elementin bu çoxluğa daxil olub və ya olmadığını birqiymətli söyləmək mümkün olsun.

Elementlərinin sayının sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olaraq çoxluqları sonlu və ya sonsuz çoxluqlara ayırırlar.

Sonlu çoxluğu işarə edərkən onun elementlərini mötərizə daxilində "{" və "}" göstərirlər. Məsələn, $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Sonsuz çoxluğu işarə edərkən onun bütün elementlərinin elə xassəsi göstərilir ki, verilmiş elementin həmin çoxluğa daxil olub-olmadığını birqiymətli söyləmək mümkün olur, yəni çoxluğun elementlərinin mühüm və ümumi xarakteristik xassələri ğöstərilir. Məsələn: $A = \{x \in N \,|\, x : 3\}$-yəni 3-ə bölünən natural ədədlər çoxluğu. Ola bilər ki, çoxluğun heç bir elementi olmasın. Məsələn: $x^2 + 2 = 0$ tənliyinin həqiqi kökləri çoxluğuna heç bir ədəd daxil deyil. Heç bir elementi olmayan çoxluq boş çoxluq adlanır və adətən $\varnothing$ ilə işarə edilir. Boş çoxluğun elemntlərinin sayı sıfra bərabərdir. Bəzi ədədi çoxluqları işarə etmək üçün xüsusi hərflərdən istifadə olunur. Məsələn, natural ədədlər çoxluğu $N = \{1,2,3,\ldots\}$, mənfi olmayan bütün tam ədədlər çoxluğu - $N_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$, tam ədədlər çoxluğu $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, rasional ədədlər çoxluğu Q, həqiqi ədədlər çoxluğu R ilə işarə edilir.

§2. Alt çoxluq.

Tərif. Fərz edək ki, iki A və B çoxluqları verilmişdir. Əgər A çoxluğunun hər bir elementi B çoxluğunun da elementi olarsa, onda A çoxluğuna B çoxluğunun alt çoxluğu deyilir. Çoxluqlar arasında bu münasibət $A \subset B$ şəklində yazılır və belə oxunur: "*A B*-yə daxildir" və ya "*A B*-nin alt çoxluğudur". Bəzən

$A \subset B$ əvəzinə $B \supset A$ kimi yazılışdan da istifadə olunur, yəni B çoxluğu A çoxluğunu özündə saxlayır.

Alt çoxluğun tərifindən görünür ki, hər bir çoxluq özünün alt çoxluğudur, yəni: $A \subset A$ və ya $A \supset A$. Tərifə əsasən istənilən boş olmayan A çoxluğunun həmişə ən azı iki alt çoxluğu vardır. A və $\varnothing$ çoxluq. Bu çoxluqlar A çoxluğunun qeyri-məxsusi alt çoxluqları adlandırılır. A çoxluğunun $\varnothing$-dan və A-nın özündən fərqli, istənilən M altçoxluğuna A çoxluğunun məxsusi alt çoxluğu və ya düzgün hissəsi deyilir. Məsələn: Tutaq ki, $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,b,c,d,f,k\}$ çoxluqları verilmişdir. Göründüyü kimi A çoxluğunun bütün elementləri B çoxluğunda vardır. Onda $A \subset B$ və ya $B \supset A$ şəklində yazılır. Bu halda A çoxluğu B-nin məxsusi alt çoxluğu adlanır.

Verilən tərifə əsasən $A = \{a,b,c\}$ çoxluğunun məxsusi alt çoxluqları bunlardır:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}.$$

A çoxluğunun qeyri-məxsusi alt çoxluqları isə $\{a,b,c\}$ və $\varnothing$ çoxluqlarıdır.

Qeyd. Biz yuxarıda elementin çoxluğa və bir çoxluğun başqa bir çoxluğa daxil olması münasibətlərini verdik. Lakin iki çoxluğu əlaqələndirən daxil olma münasibətilə, elementlə çoxluğu əlaqələndirən daxil olma münasibətini bir-birindən fərqləndirmək lazımdır. Bunu aşağıdakı misal üzərində aydınlaşdıraq.

F ilə müəyyən bir müstəvini işarə edək. Aydındır ki, bu müstəviyə nöqtələr çoxluğu kimi baxmaq olar. A ilə bu müstəvidə yerləşən hər hansı düz xətti işarə edək. Burada A düz xətti F müstəvisinin nöqtələrindən təşkil olunduğundan A-ya F çoxluğunun alt çoxluğu kimi baxılmalıdır: $A \subset F$. Lakin demək olmaz ki, A F-in elementidir. Digər tərəfdən, həmin F müstəvisinə düz xətlər çoxluğu kimi baxmaq olar. Bu halda A düz xətti F çoxluğunun bir elementi olacaqdır: $A \in F$. Lakin bu halda nöqtə F çoxluğunun elementi deyil.

§3. Çoxluqların bərabərliyi.

Tərif. $A \subset B$ və $B \subset A$ şərtlərini ödəyən çoxluqlara bərabər çoxluqlar deyilir və $A = B$ şəklində yazılır.
Məsələn:

1) $A = \{-2,10\}$ çoxluğu ilə $(x+2)(x-10)=0$ tənliyinin kökləri çoxluğu bərabər çoxluqlardır.

2) $A = \{a,b,c,d\}$ və $B = \{c,d,a,b\}$ çoxluqlarına baxaq. Göründüyü kimi, $A \subset B$ və $B \subset A$. Deməli, $A = B$.

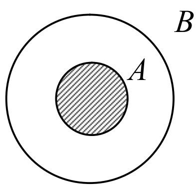
3) A ilə $x^2 + 4 = 0$ tənliyinin həqiqi kökləri çoxluğunu, B ilə $x^2 - 3 = 0$ tənliyinin rasional kökləri çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, bu halda $A = B$ $(A = \varnothing, B = \varnothing)$.

Çoxluqların bərabərliyinin aşağıdakı xassələri vardır:

1) Refleksivlik xassəsi: $A = A$.
2) Simmetriklik xassəsi: $A = B$ olarsa, $B = A$ olur.
3) Tranzitivlik xassəsi: $A = B$ və $B = C$ olarsa, $A = C$ olur.

Bəzi hallarda eyni bir çoxluğun alt çoxluqları nəzərdən keçirilir. Bu halda həmin çoxluğa universal çoxluq deyilir və J ilə işarə edilir. Məsələn: Bir universitetin bütün tələbələri çoxluğu universal çoxluq qəbul edilə bilər, çünki həmin universitetdə təhsil alan bütün fakültələrin tələbələri çoxluğu universitetin bütün tələbələri çoxluğunun (J) alt çoxluqlarıdır.

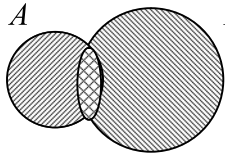
§4. Eyler-Venn dioqramları.



Şəkil 1.

Çoxluqlar arasındakı münasibəti əyani şəkildə təsvir etmək üçün Eyler-Venn dioqramlarından istifadə edilir [Eyler (1707-1783) İsveç riyaziyyatçisi, Peterburq EA-nın üzvü, Dyon-Venn (1834-1923) ingilis riyaziyyatçısı]. Eyler əyani olaraq hər bir çoxluğu dairə şəklində təsvir etməyi təklif etmişdir (bu zaman dairənin ölçüləri və vəziyyəti nəzərə alınmır). Əgər A çoxluğu B çoxluğunun hissəsidirsə, onda A–nı ifadə edən dairə B-ni ifadə edən dairənin içərisində yerləşdirilir (Şəkil 1).

Qeyd edək ki, əgər hər hansı iki çoxluğun ortaq elementləri vardırsa və onların heç biri digərinin hissəsi deyilsə, onda bu çoxluqlara uyğun Eyler dairələrinin bir-birini örtən müəyyən hissələri vardır (Şəkil 2).

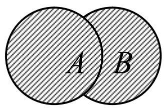


Şəkil 2.

Qeyd edək ki, Eyler-Venn dioqramlarında çoxluqların həmişə dairə şəklində təsvir edilməsi vacib deyil. Dairə əvəzinə istənilən fiqur (müstəvi), məsələn, kvadrat, romb, yarımdairə və s. götürmək olar.

§5.Çoxluqlar üzərində əməllər. Çoxluqların birləşməsi (cəmi).

Tərif. İki çoxluğun birləşməsi bu çoxluqların heç olmazsa birinə daxil olan bütün elementlərdən düzəldilmiş çoxluğa deyilir və çoxluqların birləşməsi əməliyyatı “$\cup$” simvolu ilə işarə edilir.



Şəkil 1.

Misal:

1) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, f, k\}$ şəklində olarsa, onda

$C = A \cup B = \{a, b, c, d, f, k\}$ olar.

Qeyd edək ki, A və B çoxluqlarının hər birinə daxil olan element bu çoxluqların birləşməsinə (C çoxluğuna) yalnız bir dəfə daxil olmalıdır.

2) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi, \theta\}$ və $B = \{\beta, \eta, \xi, \omega\}$ çoxluqlarının birləşməsi olan $C = A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi, \theta, \omega\}$ çoxlugunda 7 element var. Amma bu iki çoxluğun birlikdə 10 elementi var, yəni birləşməyə hər bir element bir dəfə daxil olur.

A və B çoxluqlarının birləşməsinə daxil olan ixtiyari x elementi $x \in A$ və ya $x \in B$ xassəsinə malik olduğu üçün $A \cup B$ birləşməsini riyazi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Buradan görünür ki, birləşməyə daxil olan hər bir element ya A-nın elementlərinin xarakterisik xassəsinə və ya B-nin elementlərinin xarakteristik xassəsinə malikdir.

§6. Çoxluqların birləşməsinin xassələri.

1) Kommutativlik xassəsi: İxtiyari iki A və B çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:
$$A \cup B = B \cup A .$$

2) Assosiativlik xassəsi: İxtiyari A, B və C çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

3) $B \subset A$ olduqda $A \cup B = A$.

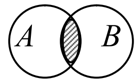
Xüsusi halda ixtiyari A çoxluğu üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$A \cup A = A, \ A \cup \varnothing = A, \ A \cup J = J \quad (A \subset J).$$

Oxşar qayda ilə istənilən sayda sonlu və sonsuz çoxluqların birləşməsini tapa bilərik. n – sayda verilmiş $A_1, A_3, ..., A_n$ çoxluqlarının birləşməsi $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, sonsuz sayda çoxluqların birləşməsi isə $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ şəklində işarə edilir. Aydındır ki, bu zaman $A_i \subset A$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

§7. Çoxluqların kəsişməsi.

Tərif. Verilmiş A və B çoxluqlarının bütün ortaq elementlərindən ibarət olan C çoxluğuna A və B çoxluqlarının kəsişməsi deyilir və bu $A \cap B = C$ kimi işarə olunur (Şəkil 1). Burada "$\cap$" – çoxluqların kəsişməsi simvoludur.



Şəkil 1.

A və B çoxluqları ortaq elementlərə malik deyilsə, onda bu çoxluqlara kəsişməyən çoxluqlar deyilir və simvolik olaraq $A \cap B = \varnothing$ kimi yazılır.

Məsələn:

1) $A = \{2,3,7,9,12\}$, $B = \{7,12,14,16,23\}$ şəklində olarsa, onda $C = A \cap B = \{7,12\}$ olar.
2) Əgər $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta, \eta, \xi\}$ şəklində olarsa, onda $A \cap B = \varnothing$.

Qeyd edək ki, A və B çoxluqlarının heç olmazsa bir ortaq elementi olarsa, onda həmin çoxluqlar kəsişir, yəni $A \cap B \neq \varnothing$ olur.

n-sayda çoxluqların kəsişməsi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1, x \in A_2, \ldots, x \in A_n\}.$$

A_i çoxluqlarının sayı sonsuz olarsa,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : x \in A_i,\ i = 1,2,3,\ldots\}.$$

§8. Çoxluqların kəsişməsinin xassələri.

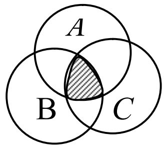
1) Çoxluqların kəsişməsi kommutativlik xassəsinə malikdir, yəni ixtiyari iki A və B çoxluqları üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$A \cap B = B \cap A.$$

2) Çoxluqların kəsişməsi assosiativdir, yəni ixtiyari *A, B* və *C* çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Bu xassənin isbatı çoxluqların kəsişməsinin tərifindən çıxır. Həmin xassəni əyani şəkildə göstərmək üçün Eyler-Venn dioqramından istifadə edək:



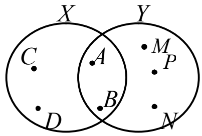
Şəkil 1.

3) $A \subset B$ olarsa, $A \cap B = A$ olar.

Xüsusi halda alınır ki, ixtiyari *A* çoxluğu üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$A \cap A = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing; \quad A \cap J = A \quad (A \subset J).$$

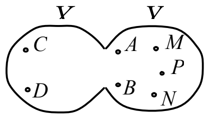
Misal. *A, B, C, D* nöqtələrindən ibarət olan *X* çoxluğu ilə *A, B, M, N, P* nöqtələrindən ibarət olan *Y* çoxluğunun birləşməsini və kəsişməsini tapın: $X = \{A, B, C, D\}$; $Y = \{A, B, M, N, P\}$.



Şəkil 2.

Tərifə görə yaza bilərik:

$$X \cup Y = \{A, B, C, D, M, N, P\}$$
$$X \cap Y = \{A, B\}.$$



Şəkil 3.

4) İxtiyari *A, B* və *C* çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$a)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$b)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

§9. Çoxluqların cəm qaydası.

Tutaq ki, sonlu A və B çoxluqları verilmişdir. A və B çoxluqlarının elementlərinin sayını uyğun olaraq, $m(A)$, $m(B)$ ilə işarə edək. Onda ixtiyari A və B sonlu çoxluqları üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \tag{1}$$

Doğrudan da əgər A və B çoxluqları kəsişmirlərsə, onda $m(A \cap B) = 0$. Bu halda verilmiş çoxluqların birləşməsindəki elementlərin sayı onların elementlərinin sayının cəminə bərabər olur:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Əgər A və B çoxluqlarının kəsişməsi boş deyilsə, onda onların ortaq elementlərinin sayı $m(A \cap B) \geq 1$ olacaqdır. Bu çoxluqların birləşməsini düzəltmək üçün A çoxluğunun elementlərinə B çoxluğunun A-da olmayan bütün elementlərini qoşmaq lazımdır. Belə elementlərin sayı $m(B) - m(A \cap B)$ fərqinə bərabərdir. Beləliklə,

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Bu düsturu

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) \tag{2}$$

şəklində də yazmaq olar.

Bu qaydanı, yəni cəm qaydasını ikidən artıq sayda cüt-cüt kəsişməyən çoxluqlar üçün ümumiləşdirmək olar.

Cəm qaydası aşağıdakı kimi ümumi şəkildə ifadə edilir:

$$m\{x \mid ya\ x \in A_1,\ ya\ \ x \in A_2, \ldots, ya\ \ x \in A_n\} = m(A_1) + \\ + m(A_2) + \ldots + m(A_n) \tag{3}$$

və ya

$$m(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_n),$$

burada $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \left(i, j = \overline{1,n}\ ;\ i \neq j\right)$.

Eyni qayda ilə isbat etmək olar ki, elementlərinin sayı sonlu olan A, B və C çoxluqları üçün

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) -$$

$$- m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$$

olur.

$$m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = m(A_1) + m(A_2) + ... + m(A_n) - m(A_1 \cap A_2) -$$

$$- ... - m(A_{n-1} \cap A_n) + m(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + m(A_{n-2} \cap A_n) + ... +$$

$$+ (-1)m(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

çoxluqların birləşməsindəki elementlərin sayını təyin etməyə imkan verən bu düsyur cəm qaydası adlanır.

Məsələn. Qrupda olan 40 tələbədən 30 nəfəri ingilis dilini, 27 nəfəri isə alman dilini mükəmməl bilir, 5 nəfəri isə nə ingilis, nə də alman dilini bilir. Neçə tələbə həm ingilis, həm də alman dilini bilir?

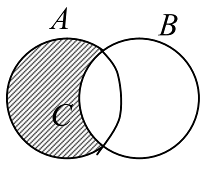
Həlli. Tutaq ki, A ingilis dilini, B isə alman dilini bilən tələbələr çoxluğudur. Məsələnin şərtinə görə $m(A) = 30$, $m(B) = 27$. (2) düsturundan alırıq ki,

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 30 + 27 - 35 = 22.$$

Deməli, 22 şagird həm ingilis və həm də alman dilini mükəmməl bilir.

§10. Çoxluqların fərqi.

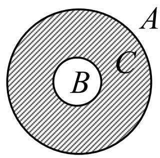
Tərif. A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olmayan bütün elementlərindən ibarət



Şəkil 1.

olan C çoxluğuna A və B çoxluqlarının fərqi deyilir və bu $C = A \setminus B$ kimi işarə edilir.

Bu halda B-nin A çoxluğunun alt çoxluğu olması vacib deyildir. Əgər xüsusi halda B çoxluğu A çoxluğunun alt çoxluğu olarsa $(B \subset A)$, onda A ilə B-nin fərqi olan $A \setminus B$, B çoxluğunu A çoxluğuna tamamlayan çoxluq adlanır və $C_A B$ kimi işarə edilir, yəni $C_A B = A \setminus B$.



Şəkil 2.

Misal. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,5,7\}$ çoxluqlarının fərqi $C = A \setminus B = \{1,3,4,6\}$şəklində olur.

Buradan görünür ki, C çoxluğunun hər bir elementi A çoxluğuna daxildir, lakin B çoxluğuna daxil deyil. Bu xassəni nəzərə alsaq, çoxluqların fərqinin tərifini simvolik olaraq aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\},$$
$$C_1 = B \setminus A = \{x \mid x \in B,\ x \notin A\}.$$

Ola bilər ki, $A \cap B = \varnothing$. Bu halda $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$ olur. Məsələn:

1. $A = [3,4]$, $B = [7,12]$. *Bu halda* $A \setminus B = [3,4]$, $B \setminus A = [7,12]$.
2. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi\}$, $B = \{\gamma, \eta, \xi\}$ çoxluqları verilmişdir. Aydındır ki, $A \setminus B = \{\alpha, \beta\}$, $B \setminus A = \varnothing$ olar.

Aydındır ki, $A = B$ olarsa, $A \setminus B = B \setminus A$ olar. Digər hallarda, $A \setminus B \neq B \setminus A$ olur.

Çoxluqların fərqini çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi əməlləri ilə əlaqələndirən aşağıdakı bərabərliklər ixtiyari *A, B, C* çoxluqları üçün doğrudur:

$$1)\ A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$2)\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$3)\ A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. Əgər $B \subset A$ isə, onda

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

münasibəti doğrudur. Qeyd edək ki, $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ bərabərliyi həmişə doğrudur.

Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. Universal J çoxluğunda bu çoxluqların tamamlayıcısı $C_J A$ və $C_J B$ ilə, onların kəsişməsi və birləşməsinin tamamlayıcıları uyğun olaraq, $C_J(A \cup B)$, $C_J(A \cap B)$ ilə işarə edilir.

Çoxluqların kəsişməsi və birləşməsinin tamamlayıcıları haqqında Şotland riyaziyyatçısı A.De Morqanın (1806-1871) aşağıdakı teoremi vardır:

Teorem: 1) Tutaq ki, $A \subset J$ və $B \subset J$ (*A və B* çoxluqları eyni bir J çoxlugunun alt çoxluqlarıdır). Onda A və B çoxluqlarının kəsişməsinin tamamlayıcısı, onların tamamlayıcılarının birləşməsinə bərabərdir:

$$C_J(A \cap B) = C_J A \cup C_J B. \tag{4}$$

2) A və B çoxluqlarının birləşməsinin tamamlayıcısı isə onların tamamlayıcılarının kəsişməsinə bərabərdir:

$$C_J(A \cup B) = C_J A \cap C_J B. \tag{5}$$

İsbatı. (4) bərabərliyinin doğruluğunu isbat edək. $\forall x \in C_J(A \cap B)$ götürək. Onda tərifə əsasən, aşağıdakı məntiqi ardıcıllığı alarıq:

$$\forall x \in C_J(A \cap B) \Rightarrow (x \notin A \cap B, x \in J) \Rightarrow (x \notin A \wedge x \in B) \vee$$
$$\vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)(x \in J) \Leftrightarrow (x \in C_J A \wedge x \notin C_J B) \vee$$
$$\vee (x \notin C_J A \wedge x \in C_J B) \vee (x \in C_J A \wedge x \in C_J B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in [x \in C_J A] \cup [x \in C_J B].$$

Beləliklə,

$$C_J(A \cap B) \subset [C_J A] \cup [C_J B]. \tag{6}$$

Digər tərəfdən

$$\forall x \in [C_J A] \cup [C_J B] \Rightarrow (x \in C_J A \wedge x \in C_J B) \vee$$
$$\vee (x \in C_J A \wedge x \notin C_J B) \vee (x \notin C_J A \wedge x \in C_J B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)(x \in J)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \notin A \cap B) \Leftrightarrow (x \in C_J (A \cap B)).$$

Buradan alırıq ki,

$$[C_J A] \cup [C_J B] \subset C_J (A \cap B) \ . \tag{7}$$

Beləliklə, (6) və (7) münasibətlərindən alırıq ki,

$$C_J (A \cap B) = [C_J A] \cup [C_J B].$$

İndi isə (5) bərabərliyinin doğruluğunu isbat edək. $\forall x \in C_J (A \cup B)$ götürək. Onda

$$\forall x \in C_J (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A \cap B(x \in J)) \Rightarrow (x \notin A \cup B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)(x \in J) \Leftrightarrow (x \in C_J A \wedge x \in C_J B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in [x \in C_J A] \cap [x \in C_J B],$$

yəni

$$C_J (A \cup B) \subset [C_J A] \cap [C_J B]; \tag{8}$$

sonra,

$$\forall x \in [C_J A] \cap [C_J B] \Rightarrow (x \in C_J A \wedge x \in C_J B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \notin A \wedge x \notin B(x \in J)) \Leftrightarrow (x \notin A \cup B(x \in J)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in C_J (A \cup B),$$

yəni

$$[C_J A] \cap [C_J B] \subset C_J (A \cup B) \ . \tag{9}$$

Onda (8) və (9)-dan alırıq:

$$C_J (A \cup B) = [C_J A] \cap [C_J B].$$

Teoremin hər iki hissəsi tamamilə isbat edildi.

Misal. $J = \{\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi, \theta\}$ $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $B = \{\alpha, \beta, \delta\}$ olsun. Onda

$C_J A = \{\eta, \xi, \theta\}$, $C_J B = \{\gamma, \eta, \theta\}$, $A \cap B = \{\alpha, \beta\}$

$C_J (A \cap B) = \{\gamma, \eta, \xi, \theta\}$, $C_J (A \cup B) = \{\gamma, \eta, \theta\}$

olur. Axırıncı bərabərliklərdən görünür ki,

$C_J\left(A\cap B\right)=C_J\left(A\cup B\right)$-dır (bu halda A və B J-nin alt çoxluqlarıdır).

Qeyd edək ki, "tamamlama" əməliyyatının nəticəsi verilmiş çoxluğun hansı çoxluğa "tamamlanmasından" bilavasitə asılı olur. Məsələn: tam ədədlər çoxluğunu rasional ədədlər çoxluğuna tamamlayan – bütün adi kəsr ədədlər çoxluğudur. Əgər tam ədədlər çoxluğunun həqiqi ədədlər çoxluğuna tamamlanmasına baxırıqsa, onda kəsr və irrasional ədədlər çoxluqlarının birləşməsi tamamlayıcı çoxluq olacaqdır.

§11. Verilmiş çoxluğun bütün alt çoxluqları.

Tutaq ki, hər hansı A çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluğun bütün mümkün olan alt çoxluqlarının əmələ gətirdiyi çoxluğu *P(A)* ilə işarə edək. Məsələn: $A=\{a,b\}$ *olarsa*, $P(A)=$ $=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ olar. Aydındır ki, $\varnothing$ çoxluq ixtiyari çoxluğun alt çoxluğu və hər bir çoxluq özünün alt çoxluğu olduğu üçün, yəni $\varnothing\subset A$ və $A\subset A$ olduğuna görə $\varnothing\in P(A)$ və $A\in P(A)$ olar.

Sonlu A çoxluğunun elementlərinin sayını $m\left(A\right)$ simvolu ilə işarə edək. Bu halda A iki elementli çoxluq isə, onda $m\left(A\right)=2$. Əgər $A=\varnothing$ olarsa, onda $m\left(A\right)=0$ qəbul edilir.

Teorem. Verilimiş n elementli A çoxluğunun bütün mümkün olan alt çoxluqlarının sayı 2^n -ə bərabərdir, yəni

$$m(P(A))=2^{m(A)}. \tag{10}$$

Isbatı. Teoremi isbat etmək üçün riyazi induksiya metodundan istifadə edək.

1) Tutaq ki, $n=0$. Bu o deməkdir ki, A boş çoxluqdur, yəni $A=\varnothing$; onda $P(A)=\{\varnothing\}$ və $m(P(A))=1$ olar, yəni

$$m(P(A))=1=2^0.$$

2) $n=1$ olduqda, $A=\{a\}$ olar. $P(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$,

$$m(P(A))=2;\quad 2=2^1.$$

3) $n = 2$ olduqda $A = \{a, b\}$ olar.

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

$m(P(A)) = 4 = 2^2$.

İndi isə teoremin $(n-1)$ üçün doğru olduğunu qəbul edək. Onda $(n-1)$ elementli çoxluq üçün

$$m(P(A)) = 2^{n-1} \text{ olar.}$$

Bu çoxluğa bir element də əlavə etməklə n elementli çoxluğa tamamlayaq. Bu elementi əvvəlki 2^{n-1} sayda elementi olan çoxluğun hər bir elementinin yanında yazsaq, onda n-elementli çoxluğun, əlavə olaraq 2^{n-1} sayda alt çoxluğunu almış oluruq. Aydındır ki, n-elementli çoxluğun bütün alt çoxluqları sayı $2^{n-1} + 2^{n-1}$ olar.

Deməli,

$$m(P(A)) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

$$m(P(A)) = 2^n.$$

Teorem isbat edildi.

§12. Nizamlanmış cüt.

Iki a və b elementlərinin müəyyən sırada düzülüşünə nizamlanmış cüt deyilir və (a, b) ilə işarə edilir. a- ya cütün birinci, b-yə isə ikinci elementi (komponenti, koordinatı) deyilir. Iki cüt o zaman bərabər hesab edilir ki, həmin cütlərin uyğun komponentləri bərabər olsun, yəni

$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ olduqda $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ hesab edilir. $a \neq b$ olduqda $(a, b) \neq (b, a)$ olur.

Tutaq ki, (a, b) nizamlanmış cütü $\frac{1}{4}$ kəsrinin surət və məxrəcini göstərir: $(a = 1\ ,\ b = 4)$; *onda* $(1,4) \neq (4,1)$ olar.

§13. Iki çoxluğun düz (Dekart) hasili.

Fərz edək ki, boş olmayan A və B çoxluqları verilmişdir. A çoxluğundan hər hansı bir a elementi götürüb, sonra ona B çoxluğunun müəyyən bir b elementini qoşmaqla (a,b) nizamlı cütünü quraq. Bu qayda ilə hər dəfə birinci yerdə A çoxluğunun elementlərini, ikinci yerdə isə B çoxluğunun elementlərini yazmaqla A və B çoxluqlarının bütün elementlərindən istifadə etməklə bütün nizamlı cütləri tərtib etmək olar. Nəticədə A və B çoxluqlarının elementlərindən düzəldilmiş nizamlı cütlərdən ibarət olan C çoxluğunu alırıq.

Elementləri verilmiş A və B çoxluqlarının elementlərinin nizamlanmış (x, y) cütlərindən ibarət olan C çoxluğuna (burada $x \in A, y \in B$) A və B çoxluqlarının düz hasili və ya dekart hasili deyilir. A və B çoxluqlarının düz hasili $C = A \times B$ şəklində işarə edilir. Onda tərifə görə əsaslanaraq $C = A \times B = \{(x, y) \mid x \in A\ ,\ y \in B\}$ şəklində yazmaq olar.

Misal. Fərz edək ki, $A = \{1,2,4,6\}$, $B = \{3,4,5\}$ çoxluqları verilmişdir. Bu halda $A \times B$ düz hasilinin elementlərini yazaq:

$$A \times B = \{(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(2,4);(2,5);(4,3);$$
$$(4,4);(4,5);(6,3);(6,4);(6,5)\}.$$

Göründüyü kimi $A \times B$ çoxluğunda 12 nizamlanmış cüt var. A çoxluğunun 4, B çoxluğunun 3 elementi var, yəni $4 \cdot 3 = 12$

Göstərmək olar ki, sonlu çoxluqların dekart hasilindəki cütlərin sayı A və B çoxluqlarında olan elementlərin sayını göstərən ədədlərin hasilinə bərabərdir.

A və B çoxluqları üçün $A = B$ olduqda $A \times A$ çoxluğu $A \times A = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$ şəklində olur.

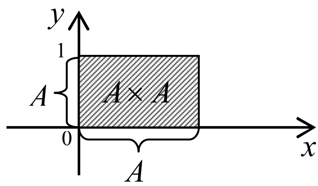
Məsələn, $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b\}$ olarsa, onda $A = B$ və $A \times A = \{(a,a);(a,b);(b,a);(b,b)\}$ şəklində olar. Bu misal göstərir ki, dekart hasilin hər bir cütü nizamlanmışdır.

Çoxluqların dekart hasilini təsvir etmək üçün "həndəsi dildən" istifadə etmək daha əlverişli olur. Bu halda $A \times B$

çoxluğunun elementlərini nöqtələr adlandırırlar. Əgər $C=(x,y)$ olarsa, $x\in A$ C nöqtəsinin absisi, $y\in B$ isə C nöqtəsinin ordinatı adlandırılır.

Məsələn, həqiqi ədədlər çoxluğunu R ilə işarə etdikdə müstəvinin nöqtələr çoxluğu $R\times R$ dekart (düz) hasilindən ibarət olur. Başqa bir misal göstərək: $A=[0,1]$ parçasını götürək. Onda $A\times A=\{(x;y)\mid x\in[0,1];y\in[0,1]\}$ olar. Bu çoxluq kvadrat əmələ gətirir, yəni ixtiyari A çoxluğu üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

1. $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.
2. $A\neq B$ olduqda $A\times B\neq B\times A$.
3. A, B və C çoxluqlarından heç biri boş çoxluq deyilsə, onda



Şəkil 1.

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C=A\times B\times C.$$

2-ci xassənin doğruluğunu izah edək.

Doğrudan da, $A\neq B$ olduqda, ya elə x_0 elementi vardır ki, $x_0\in A$, $x_0\notin B$, ya da elə y_0 elementi vardır ki, $y_0\notin A$, $y_0\in B$. Fərz edək ki, $x_0\in A$, $x_0\notin B$. Onda $(x_0,y_0)\in A\times B$ cütü $B\times A$ ya daxil deyil, çünki $x_0\notin B$. Deməli $A\times B\neq B\times A$. $y_0\in B, y_0\notin A$ olduqda da analoji qayda ilə göstərmək olar ki, $A\times B\neq B\times A$. Deməli, $A\neq B$ olduqda həmişə $A\times B\neq B\times A$.

Çoxluqların dekart hasili əməlini çoxluqların birləşməsi və fərqi əməlləri ilə əlaqələndirən aşağıdakı distributivlik qanunları doğrudur:

$$1)\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C); \qquad (11)$$

$$2)\ (A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C). \qquad (12)$$

(11)- bərabərliyinin doğru olduğunu isbat edək:

Tutaq ki, $(x,y)\in(A\cup B)\times C$, *onda* $x\in A\cup B, y\in C$,

$$(x,y)\in(A\cup B)\times C\Rightarrow(x\in A\cup B, y\in C)\Rightarrow(x\in A\vee x\in B, y\in C)$$
$$\Rightarrow\Rightarrow((x\in A, y\in C)\vee(x\in B, y\in C))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow((x,y)\in A\times C\vee(x,y\in B\times C))\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C).$$

Buradan alırıq ki,

$$(A\cup B)\times C\subset(A\times C)\cup(B\times C), \qquad (13)$$

$$\forall(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)\Rightarrow((x,y)\in A\times C\vee(x,y)\in B\times C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow((x\in A, y\in C)\vee(x\in B, y\in C))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x\in A\vee x\in B, y\in C)\Rightarrow(x\in A\cup B, y\in C)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow((x,y)\in(A\cup B)\times C).$$

Beləliklə, göstərdik ki,

$$\forall(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)\Rightarrow(x,y)\in(A\cup B)\times C\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(A\times C)\cup(B\times C)\subset(A\cup B)\times C. \qquad (14)$$

(13) və (14) münasibətlərindən alırıq ki, (11) münasibəti doğrudur yəni

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C).$$

(12) –nin isbatı analoji qaydada aparılır.

Misal. $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=(a,b)$, $C=\{d\}$ çoxluqlarına baxaq.

Əvvəlcə $(A\cup B)\times C$ çoxluğunu tapaq.

$$A\cup B=\{\alpha,\beta,\gamma,a,b\},\ (A\cup B)\times C=$$
$$=\{(\alpha,d),(\beta,d),(\gamma,d),(a,d),(b,d)\}.$$

İndi isə bərabərliyin sağ tərəfini, yəni $(A\times C)\cup(B\times C)$-ni tapaq.

$$A\times C=\{\alpha,\beta,\gamma\}\times\{d\}=\{(\alpha,d),(\beta,d),\{\gamma,d\}\}$$

$$B\times C=\{(a,d),(b,d)\},$$

$$(A\times C)\cup(B\times C)=\{(\alpha,d),(\beta,d),(\gamma,d),(a,d),(b,d)\}.$$

Bu münasibətlərdən alırıq ki,

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ doğrudur.

Çoxluqların Dekart hasilini istənilən k sayda $A_1, A_2, ..., A_k$ çoxluqları üçün ümumiləşdirmək olar. Bu hasil
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \{(a_1, a_2, ..., a_k): a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_k \in A_k\}$şə klində yazılır. Əgər $A_1 = A_2 = ... = A_k$ olarsa, onda $A \times A \times ... \times A$ Dekart hasili simvolik olaraq, A^k ilə işarə edilir, burada A^k -“A çoxluğunun k -cı dərəcədən Dekart qüvvəti kimi oxunur”.

Çoxluqların Dekart hasilində olan elementlərin sayı haqqındakı aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Sonlu sayda verilmiş $A_1, A_2 ... A_m$ çoxluqlarının Dekart hasilinin elementlərinin sayı verilmiş çoxluqların elementləri sayını göstərən ədədlərin hasilinə bərabərdir, yəni

$$n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_m) = n(A_1)n(A_2)...n(A_m). \qquad (15)$$

İsbatı. Teoremi iki sonlu çoxluq üçün isbat edək. Fərz edək ki, sonlu A və B çoxluqları verilmişdir. Onda göstərək ki,

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$$

bərabərliyi doğrudur.

Tutaq ki, $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ şəklində verilmiş sonlu çoxluqlardır, yəni $m(A) = k$, $m(B) = n$. $A \times B$ *hasili* (x_i, y_j), $(i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n})$ cütlərindən ibarətdir. Bu cütləri aşağıdakı kimi düzmək olar.

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} (x_1, y_1), (x_1, y_2), ... (x_1, y_n) \\ (x_2, y_1), (x_2, y_2), ... (x_2, y_n) \\ .... \\ .... \\ (x_k, y_1), (x_k, y_2), ... (x_k, y_n) \end{array}\right\}}_{n - \text{sütun}} k - \text{sətir.} \qquad (16)$$

Buradan hər sətirdə (x_i, y_j) şəklində n cüt sütun olmaqla k sətir alarıq. Onda $A \times B$ dekart hasilində olan bütün cütlərin sayı $n \cdot k$ -ya bərabər olar, yəni

$$m(A \times B) = n \cdot k ,$$

burada k-ədədi A çoxluğunun, n-ədədi isə B çoxluğunun elementlərinin sayını göstərdiyindən

$$m(A\times B)=m(A)\cdot m(B)=n\cdot k$$

alarıq.

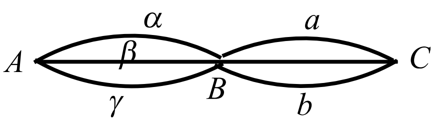
Beləliklə, iki sonlu çoxluq üçün teoremin doğruluğu isbat edildi.

$n(A_1\times A_2\times\ldots\times A_m)=n(A_1)\times n(A_2)\times\ldots\times n(A_m)$ bərabərliyi hasil qaydası adlandırılır.

Əgər a elementini n üsulla, b elementini m üsulla seçmək mümkün olarsa, onda (a,b) nizamlanmış cütünü $n\cdot m$ üsulla seçmək olar.

Misal. A məntəqəsindən B məntəqəsinə üç yol gedir. B-dən C-yə isə iki yol gedir. B məntəqəsindən keçməklə A-dan C-yə neçə üsulla getmək olar?

Məsələni həll etmək üçün A-dan B-yə gedən yolları α,β,γ ilə, B-dən C-yə gedən yolları isə a və b ilə işarə edək. Onda A-dan B-yə gedən hər bir üsul bir cüt göstərir. Bu cütlər aşağıdakılardır:



Şəkil 2.

$$(\alpha,a),(\beta,a),(\gamma,a),(\alpha,b),(\beta,b),(\gamma,b).$$

Aydındır ki, alınan cütlər çoxluğu A-dan B-yə gedən yollar çoxluğu $A_1=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ ilə B-dən C-yə gedən yollar çoxluğunu $A_2=\{a,b\}$ -nin dekart hasilini göstərir.

$$m(A_1\times A_2)=m(A_1)\times m(A_2).$$

$m(A_1)=3$ və $m(A_2)=2$ olduğuna görə $m(A_1\times A_2)=6$ olar. Deməli, A məntəqəsindən C məntəqəsinə (B-dən keçməklə) 6 üsulla getmək olar.

§14. Eynigüclü çoxluqlar. Qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq.

Fərz edək ki, F sonlu çoxluqdur və onun elementlərinin sayı n-dir. Onda bu çoxluğun elementlərinin sayı olan n ədədinə F çoxluğunun gücü deyilir və simvolik olaraq belə yazılır: $\overline{\overline{F}} = n$ və ya $m(A) = n$, burada $\overline{\overline{F}}$ simvolu "F çoxluğunun gücü" kimi oxunur. Məsələn, $F = \{1, 3, 5, 23\}$ şəklindədirsə, onda F çoxluğunun gücü, yəni $\overline{\overline{F}} = 4$ olur.

Tutaq ki, F və A iki sonlu çoxluqdur. Təbii olaraq, belə bir sual meydana çıxır ki, bu çoxluqlardakı elementlərin sayı eynidirmi? $\overline{\overline{F}}$ və $\overline{\overline{A}}$ ədədlərini tapmaqla, başqa sözlə F və A çoxluqlarının elementlərinin sayını tapmaqla biz bu suala cavab verə bilərik. Biz bu çoxluqların elementlərini saymasaq (yəni bu çoxluqların gücünü hesablamasaq) da bu suala cavab verə bilərik. Məsələn, tutaq ki, $F = \{a, b, c, d, e\}$ və $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ çoxluqları verilmişdir. Bu çoxluqları aşağıdakı kimi göstərməklə

F	a	b	c	d	e
A	α	β	γ	δ	ε

bu çoxluqlarda elementlərin sayının eyni olduğunu görürük. Göründüyü kimi $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{A}} = 5$. Bu cədvəl F və A çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkün olduğunu göstərir.

Misal. Tutaq ki, N natural ədədlər çoxluğu və M müsbət cüt ədədlər çoxluğudur. Bu çoxluqların elementlərini aşağıdakı cədvəl vasitəsilə göstərməklə

N	1	2	3	...	n	...
M	2	4	6	...	$2n$	...

bu iki çoxluqdakı elementlərin "sayının" eyni olduğunu görürük.

Tərif. Əgər F və A çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkün olarsa, onda deyirlər ki, bu iki çoxluq ekvivalentdir və simvolik olaraq, $F \sim A$ kimi yazılır.

Hökm. Fərz edək ki, F və A sonlu çoxluqdur. Bu çoxluqların ekvivalent olması üçün zəruri və kafi şərt bu çoxluqların güclərinin bərabər olmasıdır, yəni $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{A}}$.
Ekvivalent çoxluqlarda elementlərin sayı sonsuz olarsa, bu çoxluqların "eynigüclü" olduğu qəbul edilir. Deməli, N natural ədədlər çoxluğu ilə M müsbət cüt ədədlər çoxluğu eynigüclü çoxluqlardır.

Tərif. N natural ədədlər çoxluğu ilə ekvivalent olan çoxluğa hesabi çoxluq deyilir və bu çoxluğun gücü simvolik olaraq, a hərfi ilə işarə edilir. Deməli, $\overline{\overline{N}} = a$.
Bu tərifdən istifadə edərək asanlıqla aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat edilir.

Teorem. A çoxluğunun hesabi olması üçün zəruri və kafi şərt onun elementlərinin "nömrələnə" bilməsidir, yəni A çoxluğunun

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \tag{17}$$

şəklində göstərilməsinin mümkün olmasıdır.
Qeyd edək ki, rasional ədədlər çoxluğu hesabi çoxluqdur. Hər bir sonsuz çoxluq hesabi çoxluq olmaya da bilər.

Teorem. $F = [0,1]$ parçasının nöqtələri çoxluğu hesabi çoxluq deyil.

Isbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, F hesabi çoxluqdur. Onda bu çoxluğun elementlərini nömrələyə bilərik:

$$F = [0,1] = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}. \tag{18}$$

Başqa sözlə $[0,1]$ parçasının hər bir nöqtəsi (18) ardıcıllığının müəyyən həddidir. $[0,1]$ parçasını 3 bərabər yerə bölək. Aydındır ki, (18) ardıcıllığının birinci həddi x_1 bu üç

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right] \tag{19}$$

parçalarının üçündə də eyni zamanda ola bilməz. x_1 elementi bu üç parçanın hansına daxil deyilsə, o parçanı F_1 ilə işarə edək. Ola bilər ki, x_1 elementi (19) parçalarından ikisinə daxil olmasın, onda F_1 ilə bu parçalardan hər hansı birini işarə edirik. Deməli, $x_1 \notin F_1$. Sonra F_1 parçasını 3 bərabər yerə bölüb, x_2 elementinin daxil olmadığı parçanı F_2 ilə işarə edək (belə parça iki dənə olarsa, onda F_2 ilə bu parçalardan hər hansı birini işarə edirik). Deməli, $x_2 \notin F_2$. Bu prosesi sonsuz dəfə davam etdirsək, bir-birinə daxil olan parçalar ardıcıllığı almış oluruq, yəni

$$F \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots,\ x_n \notin F_k, k = n, n+1, \dots \ \left(n = 1,2,3,\dots\right). \quad (20)$$

F_n parçasının uzunluğu $\frac{1}{3^n}$-ə bərabər olduğu üçün n-in artması ilə parçaların uzunluqları ardıcıllığı 0-a yığılır. Onda, limitlər nəzəriyyəsindən məlum olan Kantor teoreminə əsasən, elə bir yeganə ξ $\left(\xi \in [0,1]\right)$ nöqtəsi var ki, o F_n parçalarının hər birinə daxildir, yəni

$$\xi_n \in F_n \quad n = 1,2,3,\dots . \quad (21)$$

ξ nöqtəsi $[0,1]$ parçasına daxil olduğu üçün o (18) ardıcıllığındakı hədlərdən biri olmalıdır. Tutaq ki, $\xi = x_m$ (m müəyyən natural ədəddir). Deməli, (20) münasibətinə əsasən,

$$\xi \notin F_k,\ k = m, m+1, \dots \quad . \quad (22)$$

(22) münasibəti (21) münasibətinə zidd olduğu üçün bizim fərziyyəmiz, yəni (18) münasibəti doğru deyil. Bununla teorem isbat olundu.

Tərif. $F = [0,1]$ parçası ilə ekvivalent olan hər bir çoxluq kontinium güclü çoxluq adlanır və onun gücü simvolik olaraq c hərfi ilə işarə edilir.

Deməli, $\overline{\overline{F}} = c$, burada $F = [0,1]$. Həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində göstərilir ki, N natural ədədlər çoxluğunun bütün mümkün altçoxluqları olan $P(N)$ çoxluğu

$F = [0,1]$ çoxluğu ilə ekvivalentdir. Ona görə (10) düsturuna oxşar olaraq, a və c simvolları arasında $c = 2^a$ simvolik münasibətini yazırlar. Burada c $[0,1]$ parçasının gücü, a isə natural ədədlər çoxluğunun gücüdür.

Teorem. İxtiyari $[a,b]$ parçasının nöqtələri çoxluğu kontinium güclü çoxluqdur.

Isbatı. Əgər x elementi $[a,b]$ parçasının nöqtəsi olarsa, onda

$$y = \frac{x-a}{b-a} \qquad (23)$$

vasitəsi ilə təyin olunan y elementi $[a,b]$ parçasının nöqtəsi olacaq. (23) funksiyası $[a,b]$ parçası ilə $[0,1]$ parçası arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır, yəni $[a,b] \sim [0,1]$.Bu isə hər iki çoxluğun eynigüclü çoxluq olması deməkdir, yəni $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələri çoxluğu kontinium güclüdür.Teorem isbat olundu.

Aşağıdakı hökmlər doğrudur:

1. İrrasional ədədlər çoxluğunun gücü c -dir.
2. Həqiqi ədədlər çoxluğunun gücü c -dir.

§15. Nizamlanmış çoxluq.

Tərif. Əgər aşağıdakı iki şərti ödəyən elə φ qaydası varsa ki, bu qaydaya əsasən F çoxluğunun ixtiyari iki müxtəlif a və b elementləri üçün onlardan birinin o birindən "əvvəl gəldiyini" söyləmək olur, onda F çoxluğuna nizamlanmış çoxluq deyilir:

1. əgər φ qaydasına görə a elementi b elementindən "əvvəl gəlirsə", onda bu qaydaya görə b elementi a elementindən "əvvəl gəlmir";

2. əgər φ qaydasına görə a elementi b elementindən və b elementi c elementindən "əvvəl gəlirsə", onda bu qaydaya görə a elementi c - dən "əvvəl gəlir".

φ -yə nizamlanma qaydası deyilir. a elementinin b elementindən "əvvəl gəlməsini" simvolik olaraq $a \to b$ kimi yazılır. Əgər a elementi b elementindən "əvvəl gəlirsə", onda deyirlər ki, b elementi a elementindən "sonra gəlir" və simvolik olaraq, $b \leftarrow a$ kimi yazılır. Əgər $a \to b \to c$ isə onda deyirlər ki, b elementi a və c elementləri arasında yerləşir.

Misallara baxaq.

1. F həqiqi ədədlər çoxluğudursa, onda a və b ədədləri üçün "əvvəl gəlir" sözünü "kiçikdir" sözü ilə əvəz etməklə F çoxluğunun nizamlı çoxluq olduğunu alırıq.

2. Tutaq ki, F kompleks ədədlər çoxluğudur. Onda ixtiyari $z \neq 0$ kompleks ədədini birqiymətli olaraq

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = |z|, \ \ 0 \leq \varphi < 2\pi, r > 0 \qquad (24)$$

şəklində göstərmək olar.

Əgər $z = 0$ isə, onda $r = 0$ və $\varphi = 0$ şəklində götürməklə, Z kompleks ədələr çoxluğu ilə (r,φ) cütləri ($r \geq 0$ və $0 \leq \varphi < 2\pi$) arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış oluruq:

$$z \Leftrightarrow (r,\varphi), \ r \geq 0 \ \text{ və } \ 0 \leq \varphi < 2\pi . \qquad (25)$$

Fərz edək ki,

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{aligned} \qquad (26)$$

kompleks ədədləri verilib. Əgər qəbul etsək ki (yəni elə φ qaydası vardır ki), $r_1 < r_2$ olduqda, z_1 kompleks ədədi z_2 kompleks ədədindən "əvvəl gəlir" və $r_1 = r_2$ olduqda şərtləşsək ki, $\varphi_1 < \varphi_2$ olanda z_1 kompleks ədədi z_2 kompleks ədədindən "əvvəl gəlir", onda kompleks ədədlər çoxluğunun da nizamlı çoxluq olduğunu alarıq.

Fərz edək ki, $F = \{a, b, c\}$ çoxluğu nizamlı çoxluqdur. Onda elə φ_1 qaydası var ki, bu qaydaya görə $a \to b \to c$. Əgər elə φ_2 qaydası da var ki, bu qaydaya əsasən $A = \{b, a, c\}$ çoxluğu nizamlı çoxluqdur, onda F və A çoxluqları müxtəlif nizamlı çoxluqlar sayılır. Aydındır ki, bu halda φ_1 və φ_2 qaydaları eyni ola bilməz.

3. Tutaq ki, F çoxluğu üç α, β, γ elementlərindən ibarətdir.

Bu çoxluğu neçə müxtəlif qaydada nizamlamaq olar?

3 elementdən ibarət olan F çoxluğunu aşağıdakı kimi $3!$ sayda müxtəlif qaydada nizamlaya bilərik:

1. $F_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ (bu yazılış o deməkdir ki, α elementi β-dan, β elementi isə γ-dan əvvəl gəlir, yəni $\alpha \to \beta \to \gamma$).
2. $F_2 = \{\alpha, \gamma, \beta\}$ (F_1 və F_2 müxtəlif nizamlanmış çoxluqlardır).
3. $F_3 = \{\beta, \gamma, \alpha\}$.
4. $F_4 = \{\beta, \alpha, \gamma\}$.
5. $F_5 = \{\gamma, \alpha, \beta\}$.
6. $F_6 = \{\gamma, \beta, \alpha\}$.

Hökm. Əgər F çoxluğu n sayda elementdən ibarətdirsə, onda bu çoxluğu $n!$ sayda müxtəlif qaydada nizamlamaq olar.

Tərif. F nizamlanmış çoxluğunun hissəsi elə A nizamlanmış çoxluğuna deyilir ki:

1. $A \subset F$.
2. F çoxluğunda verilmiş nizamlanma qaydası A çoxluğunun elementlərinə də şamil edilir.

Fərz edək ki, müəyyən bir φ qaydasından istifadə etməklə a, b, c elementləri vasitəsi ilə düzəldilmiş $F = \{a, b, c\}$ nizamlı çoxluğu verilib. Bu φ qaydasından istifadə etməklə a və b elementlərindən yalnız $A = \{a, b\}$ nizamlı çoxluğunu ala bilərik. $A = \{a, b\}$ nizamlı çoxluğu $F = \{a, b, c\}$ nizamlı çoxluğunun hissəsi olur.

Əgər a və b elementlərindən $D=\{b,a\}$ kimi nizamlı çoxluq düzəltmək istəyiriksə, onda bu elementlərə əvvəl tətbiq edilən φ qaydası hökmən dəyişməlidir. Tutaq ki, ψ qaydasını tətbiq etməklə a və b elementlərindən $D=\{b,a\}$ kimi nizamlı çoxluq alınmışdır. Bu halda aldığımız $D=\{b,a\}$ nizamlı çoxluğu $F=\{a,b,c\}$ nizamlı çoxluğunun hissəsi deyil.

Tutaq ki, A nizamlanmış çoxluqdur və $a\in A$-dır. Əgər A çoxluğunun a elementindən əvvəl gələn elementi yoxdursa, onda a elementinə A nizamlanmış çoxluğunun birinci elementi deyilir. Fərz edək ki, $b\in A$. Əgər A nizamlanmış çoxluğunun bütün elementləri b-dən əvvəl gəlirsə, onda b elementinə A nizamlanmış çoxluğunun sonuncu elementi deyilir.

Lemma. Əgər A sonlu nizamlanmış çoxluq isə, onda onun birinci və axırıncı elementi var.

Isbatı. Göstərək ki, A çoxluğunda birinci element var (analoji qayda ilə göstərilir ki, A-da axırıncı element var). A-dan hər hansı bir element götürək. Əgər o birinci isə lemma isbat olundu. Əks halda A-da bu elementdən əvvəl gələn element var. Əgər bu element birinci isə, onda yenə də lemma isbat olundu. Əks halda yeni üçüncü elementin seçilməsi imkanı yaranır. A-nın elementlərinin sayı sonlu olduğu üçün bu prosesi sonlu sayda davam etdirməklə A çoxluğunun birinci elementini almış oluruq. Lemma isbat olundu.

Nəticə. Əgər A sonlu n sayda elementdən ibarət nizamalnmış çoxluq isə, onda onun elementlərini $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kimi elə işarə etmək olar ki, $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$ olar.

Tərif. Tutaq ki, A və B iki nizamlanmış çoxluqdur və ψ qaydası bu çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır. Əgər A çoxluğundan olan ixtiyari a və $a^{/}$ üçün $a\to a'$ olmasından çıxırsa ki, $b\to b'$-dir (burada $b=\psi(a)\in B;\ b'=\psi(a')\in B$), onda deyirlər ki, qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olan ψ qaydası A və B çoxluqlarını bir-birinə “bağlayır”.

Tərif. Nizamlanmış iki A və B çoxluqlarını bir-birinə “bağlamaq” mümkün olarsa, onda onlara oxşar çoxluqlar deyilir və simvolik olaraq $A \simeq B$ kimi yazılır.

Bu tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı üç teorem asanlıqla isbat edilir.

Teorem 1. Əgər nizamlanmış çoxluqlar oxşardırlarsa, onda onlar ekvivalentdirlər.

Teorem2. Əgər A və B sonlu nizamlanmış çoxluqlarının gücü eynidirsə, onda onlar oxşardırlar.

Teorem 3. Tutaq ki, A, B və C nizamlanmış çoxluqlardır. Onda:
1) $A \simeq A$, 2) Əgər $A \simeq B$, isə onda $B \simeq A$; 3) Əgər $A \simeq B$ və $B \simeq C$ isə, onda $A \simeq C$.

Tərif. Tutaq ki, A nizamlanmış çoxluqdur və $a \in A$. A çoxluğunun a elementindən əvvəl gələn bütün elementləri çoxluğu a elementinin A çoxluğundan ayırdığı parça adlanır və bu parça A_a kimi işarə edilir.

Aydındır ki, a elementi A_a parçasına daxil daxil deyil. Əgər a elementi A nizamlanmış çoxluğunun birinci elementi isə, onda $A_a = \varnothing$.

Bu tərifdən istifadə etməklə aşağıdakı hökmün doğruluğu asanlıqla isbat edilir.

Hökm. Tutaq ki, A nizamlanmış çoxluqdur, $a, a' \in A$ və a' elementi a -dan əvvəl gəlir, yəni $a' \to a$. Onda:

1) $A_{a'}$ parçası A_a parçasına daxildir, yəni $A_{a'} \subset A_a$ və $a' \in A_a$.

2) $A_{a'} = (A_a)_{a'}$, burada $(A_a)_{a'}$ parçası a' elementinin A_a parçasından (nizamlanmış çoxluğundan) ayırdığı parçadır.

Tərif. Əgər nizamlanmış A çoxluğunun istənilən boş olmayan hissəsinin birinci elementi varsa, onda bu çoxluğa tam nizamlanmış çoxluq deyilir.

Bu tərifdən istifadə etməklə alırıq:

1. Hər bir nizamlanmış sonlu çoxluq tam nizamlanmış çoxluqdur.
2. Natural ədədlər çoxluğu tam nizamlanmış çoxluqdur.
3. Nizamlanmış $L = \{\ldots,4,3,2,1\}$ çoxluğu tam nizamlanmış çoxluq deyil.
4. "<"-dir simvolu ilə nizamlanmış $A = (-\infty,1]$ çoxluğu tam nizamlanmış çoxluq deyil.

Tam nizamlanmış çoxluqlara məxsus olan aşağıdakı xassələri qeyd edək:

1. Tam nizamlanmış çoxluğun hər bir hissəsi tam nizamlanmış çoxluqdur.
2. Boş olmayan tam nizamlanmış çoxluğun birinci elementi var.
3. Iki oxşar nizamlanmış çoxluqlardan biri tam nizamlanmış çoxluqdursa, onda o birisi də tam nizamlanmış çoxluqdur.
4. Tam nizamlanmış çoxluqda ən axırıncı elementdən başqa (əgər varsa) hər bir elementdən bilavasitə sonra gələn element var.
5. Tam nizamlanmış çoxluqdan sonsuz azalan ardıcıllıq ayırmaq olmaz, yəni $\alpha_1 \leftarrow \alpha_2 \leftarrow \alpha_3 \leftarrow \ldots$ kimi sonsuz ardıcıllıq ayırmaq olmaz.
6. Tam nizamlanmış çoxluq özünün parçasına, yaxud öz parçasının hissəsinə oxşar ola bilməz.

Tərif. Çoxluqda hər hansı bir qayda ilə yığılma anlayışı (limit anlayışı) təyin olunubsa, onda bu çoxluğa fəza deyilir.

III FƏSİL

ƏDƏD ANLAYIŞI VƏ ONUN GENİŞLƏNDİRƏLMƏSİ.

§1. Natural ədədlər sistemi. Peano aksiomatikası.

Əşyaları sayarkən istifadə edilən 1,2,3,... və s. ədədlərinə natural ədədlər deyilir. Müasir riyaziyyatda natural ədəd və 1,2,3,... natural ədədlər sırasına iki baxımdan yanaşırlar: 1) nəzəri-çoxluq; 2) aksiomatik nöqtəyi-nəzər.

Natural ədədlərə nəzəri-çoxluq baxımdan yanaşmağın sadə variantı budur ki, hər bir natural ədədə sonlu çoxluğun elementləri sayı, onun gücünün «göstəricisi» kimi baxılır. Məsələn, $A=\{x,y,z,u,v\}$ çoxluğunun elementlərinin sayını göstərmək üçün 5 natural ədədinə istinad edirik. Natural ədədlər çoxluğunun elementlərini onların artması qaydası ilə ardıcıl düzəndə natural ədədlərin 1,2,3,... sırası alınır ki, burada hər bir natural ədədin öz yeri vardır. Natural ədədlər çoxluğunu N ilə işarə edirlər. Bu sırada k-dan böyük olmayan elementlərin çoxluğunu N_k ilə işarə edib, onu natural ədədlər sırasının N_k kəsiyi adlandırırlar, yəni:

$$N_k=\{x: \quad x\le k,\ x\in N\}.$$

«Natural sıranın kəsiyi» anlayışı çoxluğun elementlərinin sayı anlayışını bir qədər də dəqiqləşdirməyə imkan verir. Məsələn, xüsusi halda diqqət yetirək ki, yuxarıda gətirdiyimiz $A=\{x,y,z,u,v\}$ çoxluğunun elementlərinin sayını müəyyən edəndə aşkar görünür ki, A çoxluğu ilə $N_5=\{1,2,3,4,5\}$ çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış oluruq. Deməli, sonlu A çoxluğunun elemetləri sayı olan k-nı, yəni onun gücünü tapmaq, bu çoxluğun elementləri ilə natural sıranın nizamlanmış N_k kəsiyi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaqdır. Əgər bir-biri ilə kəsişməyən müxtəlif sonlu çoxluqları onların güclərinin bərabərliyinə nəzərən siniflərə ayırsaq, onda bir-biri ilə kəsişməyən çoxluqların elə siniflərini yaratmış oluruq ki, eyni sinfə daxil olan çoxluqlar müxtəlif təbiətli elementlərə malik olsalar da onların elementləri sayı eyni olur. Hər bir eynigüclü sonlu çoxluqlar sinfi bu sinfin bütün çoxluqları üçün dəyişməz qalan və oradakı elementlərin miqdarını göstərən bir ədədlə xarakterizə edilir. Bu zaman natural ədəd bir-biri ilə ekvivalent olan sonlu çoxluqlar sinfinin invariantı kimi çıxış edir, yəni natural ədədlər eynigüclü çoxluqlardan düzəldilmiş hər bir sinfin sıra nömrəsini də göstərir. Bu isə o deməkdir ki, natural ədədə həm miqdar, həm də sıra nömrəsi göstərən ədəd kimi baxmaq tamamilə təbiidir.

İndi isə natural ədədlərə aksiomatik baxışla tanış olaq.

Natural ədədlər sisteminin aksiomatik qurulması üçün boş olmayan N çoxluğu, natural ədəd, 1 (vahid) ədədi və ilk anlayışları «bilavasitə sonra gəlir» ilk münasibəti götürülür. Bu ilk anlayışların və münasibətin köməyi ilə natural ədədlər nəzəriyyəsi qurula bilər.İtalyan riyaziyyatçısı Peanonun adı ilə bağlı aksiomlar sistemi aşağıdakılardan ibarətdir (aksiomlar sistemində «a-dan bilavasitə sonra gələn» ədədi a' ilə işarə edirlər: $a' = a + 1$):

Tərif. Natural ədədlər boş olmayan elə N ($N \neq \varnothing$) çoxluğunun elementlərinə deyilir ki, onun ixtiyari a və b elementləri üçün «b elementi a-dan bilavasitə sonra gəlir» münasibəti təyin edilib və aşağıdakı aksiomlar ödənilir:

1^0. Heç bir natural ədəddən bilavasitə sonra gəlməyən 1 (vahid) natural ədədi vardır (yəni istənilən a natural ədədi üçün $a' \neq 1$);

2^0. İxtiyari a natural ədədi üçün həmişə bundan bilavasitə sonra gələn yalnız bir a' natural ədədi vardır (yəni $a = b$ isə, onda $a' = b'$);

3^0. İxtiyari a natural ədədi birdən çox sayda olmayan natural ədəddən bilavasitə sonra gəlir (yəni $a' = b'$ isə, onda $a = b$);

4^0. Vahidi özündə saxlayan hər hansı M natural ədədlər çoxluğu $(1 \in M)$ istənilən a natural ədədini və a-dan bilavasitə sonra gələn a' elementini də öz daxilində saxlayırsa $(a' \in M)$, onda M çoxluğu N natural ədədlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür $(M = N)$.

Peanonun 1^0-ci aksiomu hökm edir ki, natural ədədlər çoxluğunda elə bir ədəd var ki, bu çoxluğun heç bir elementindən bilavasitə sonra gəlməyir (bu 1 ədədidir); 2^0-ci aksiom natural ədədlər çoxluğunun sonsuz olmasını göstərir (çünki burada həmişə $a' \neq a$ olması nəticəsinə gəlmək çətin deyil); 3^0-cü aksiom göstərir ki, heç bir natural ədəd iki müxtəlif natural ədəddən bilavasitə sonra gələ bilməz; 4^0-cü aksiom tam riyazi induksiya üsulunun əsasını təşkil edir (bunu «induksiya aksiomu» adlandırırlar).

§2. Mənfi olmayan tam ədədlər sistemi.

Sıfrı natural ədədlər çoxluğuna qoşmaqla bir çox xassələri ilə fərqlənən yeni ədədlər çoxluğu, yəni

$$N_0 = \{0,1,2,3,...\}$$

kimi işarə olunan, mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu alınır.

Sıfrın natural ədədlər sisteminə qatılması nəticəsində alınan mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu üçün Peano aksiomlar sistemi aşağıdakı şəkil alır:

1^0. Sıfır mənfi olmayan tam ədəddir və heç bir mənfi olmayan tam ədəddən bilavasitə sonra gəlməyir.

2^0. İxtiyari mənfi olmayan a tam ədədindən bilavasitə sonra həmişə yalnız bir mənfi olmayan a' tam ədədi gəlir (yəni $a = b$ olduqda $a' = b'$ olur).

3^0. İxtiyari mənfi olmayan tam ədəd birdən çox sayda olmayan digər mənfi olmayan tam ədəddən bilavasitə sonra gəlir (yəni $a' = b'$ olduqda $a = b$ olur).

4^0. Əgər M çoxluğu sıfrı və istənilən mənfi olmayan a tam ədədini öz daxilində saxlamaqla a-dan bilavasitə sonra gələn a' ədədini də öz daxilinə saxlayırsa, onda M çoxluğu bütün mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu olan N_0 ilə üst-üstə düşür $(M = N_0)$.

§3. Həqiqi ədədlərin onluq kəsrlər vasitəsilə təsnifatı. Rasional və irrasional ədədlər.

$\{-1,-2,-3,...\}$ ədədlər çoxluğuna mənfi tam ədədlər çoxluğu deyilir. $Z = \{0;\pm1,\pm2,\pm3,...\}$ ədədlər çoxluğuna tam ədədlər çoxluğu deyilir.

Tərif 1. $Q = \left\{\frac{p}{q}\right\}$ şəkilli adi kəsrlər çoxluğuna rasional ədədlər çoxluğu deyilir, burada $q \in N, p \in Z, ƏBOB(p,q) = 1$.

Adi kəsrin məxrəci istənilən tam ədəd ola bilər. Məxrəci 10, 100, 1000,… və s. kimi ədədlər (belə ədədlər 10^n, $n = 1,2,3,...$, kimi göstərilir) olan adi kəsrlərə onluq kəsr adı verilmişdir. Məsələn,

$$a = \frac{9856742}{1000} \tag{1}$$

kəsri onluq kəsrdir. Bu kəsri tam və kəsr hissəyə ayıraraq belə yazmaq olar:

$$a = 9856{,}742. \tag{2}$$

(1) və yaxud (2) bərabərliyi ilə təyin olunan a onluq kəsrini belə də yaza bilərik:

$$a = 9\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 5\cdot10^1 + 6\cdot10^0 + 7\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2} + 2\cdot10^{-3}. \tag{3}$$

(2) ifadəsinə uyğun olaraq hər bir onluq kəsri ümumi şəkildə

$$a = \pm a_n a_{n-1}...a_1 a_0, b_1 b_2 ... b_m \tag{4}$$

kimi göstərmək olar, burada $\pm a_n a_{n-1}...a_1 a_0, b_1 b_2 ... b_m$ rəqəmləri

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \tag{5}$$

rəqəmlərindən biridir; n və m isə mənfi olmayan tam ədədlərdir.

(4) düsturu ilə təyin olunan a ədədini, (3) yazılışına analoji olaraq, aşağıdakı kimi onluq kəsrlər vasitəsilə yaza bilərik:

$$a = \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^0 +$$
$$+ b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + b_m \cdot 10^{-m}) . \qquad (6)$$

(4) ifadəsindəki vergüldən sonra gələn $b_1, b_2, \ldots$ rəqəmlərinin sayı sonsuz isə, yəni

$$a = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \qquad (7)$$

isə, onda bu yazılışa a ədədinin sonsuz onluq kəsr vasitəsilə yazılışı deyilir. (6) düsturuna əsasən (7) ifadəsi ilə verilmiş a ədədini aşağıdakı kimi sonsuz onluq kəsrlər vasitəsilə yaza bilərik:

$$a = \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 +$$
$$+ b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + b_k \cdot 10^{-k} + \ldots) . \qquad (8)$$

Əgər (7) ifadəsi ilə təyin olunan sonsuz onluq kəsr

$$a = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , c_1 c_2 \ldots c_k d_1 d_2 \ldots d_m d_1 d_2 \ldots d_m \ldots \qquad (9)$$

şəklində göstərilə bilirsə, onda ona dövrü sonsuz onluq kəsr deyilir, burada, əvvəl qeyd etdiyimiz kimi, $a_n a_{n-1} \ldots a_1, a_0, c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, \ldots, d_m$ (5) ifadəsindəki rəqəmlərdən biridir, n, k, m - mənfi olmayan tam ədəddir. Bu zaman ($d_1 d_2 \ldots d_m$)-ə bu onluq kəsrin dövrü deyilir və (9) ifadəsi aşağıdakı kimi qısa yazılır:

$$a = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , c_1 c_2 \ldots c_k (d_1 d_2 \ldots d_m) \ . \qquad (10)$$

Əgər (7) düsturu ilə verilmiş sonsuz onluq kəsri (9) şəklində göstərmək mümkün deyilsə, onda bu onluq kəsrə dövrü olmayan sonsuz onluq kəsr deyilir.

Sonsuz onluq kəsrlər vasitəsilə rasional və irrasional ədədlərə aşağıdakı kimi tərif vermək olar:

Tərif 2. Dövrü olan sonsuz onluq kəsrlərin təyin etdiyi ədədə rasional ədəd deyilir.

Tərif 3. Dövrü olmayan sonsuz onluq kəsrlərin təyin etdiyi ədədə irrasional ədəd deyilir.

Riyaziyyatda rasional və irrasional ədədə bir ümumi ad-həqiqi ədəd adı verilib.

Rasional ədədlər çoxluğunu Q, irrasional ədədlər çoxluğunu T, həqiqi ədədlər çoxluğunu R ilə işarə etsək, onda

$$R = Q \cup T. \tag{11}$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, rasional ədədlərin yuxarıdakı iki tərifi ekvivalentdir.

Deyilənlərdən aydın olur ki, məsələn

$$a = 0{,}121212... = 0{,}(12) \tag{12}$$

ədədi rasional ədəd və

$$b = 0{,}121121112... \tag{13}$$

(kəsr hissəsində hər dəfə «1» sayı 1 vahid artır) ədədi isə irrasional ədəd olacaq.

Tərif. Dövrü bilavasitə vergüldən sonra başlayan kəsrə sırf dövrü onluq kəsr deyilir. Məsələn

$$0{,}33... = 0{,}(3);\ 4{,}218218218... = 4{,}(218).$$

Təklif. Dövrü bilavasitə vergüldən sonra başlamayan dövrü onluq kəsrə qarışıq dövrü onluq kəsr deyilir. Məsələn,

10,24666…=10,24(6);

3,12757575…=3,12(75).

Asanlıqla aşağıdakı təkliflərin doğruluğu göstərilir:

Təklif 1. Sırf dövrü onluq kəsr, surəti dövrə, məxrəci isə dövrdəki rəqəmlərin sayı qədər 9 olan adi kəsrə bərabərdir. Məsələn,

$$0{,}1212... = 0{,}(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

Təklif 2. Qarışıq dövrü onluq kəsr, surəti ikinci dövrə qədərki ədədlə birinci dövrə qədərki ədədin fərqinə, məxrəci isə dövrdəki rəqəmlərin sayı qədər 9 və birinci dövrə qədər olan rəqəmlərin sayı qədər sıfır olan adi kəsrə bərabərdir. Məsələn,

$$0,412626... = 0,41(26) = \frac{4126 - 41}{9900} = \frac{817}{1980}.$$

Məsələ. Göstərin ki, $\sqrt{5}$ ədədi rasional ədəd deyil.

Həlli. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $\sqrt{5}$ ədədi rasional ədəddir. Onda elə m və n natural ədədləri var ki,

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n} \tag{14}$$

olur.

Ümumiliyi pozmadan m və n ədədlərinin qarşılıqlı sadə olduğunu qəbul etmək olar:

$$\text{ƏBOB}(m,n) = 1. \tag{15}$$

Əks halda, əgər $\text{ƏBOB}(m,n) = d > 1$ isə, onda (14) kəsrini d-yə ixtisar etsək, alınan yeni kəsr üçün (15) şərti ödəniləcək. (14) bərabərliyinin hər iki tərəfini kvadrara yüksəltməklə, $5 = m^2 / n^2$ alırıq, buradan isə çıxır ki,

$$m^2 = 5n^2. \tag{16}$$

(16) bərabərliyinin sağ tərəfi 5-ə böləndüyü üçün m^2 ədədi 5-ə bölünməlidir. Asanlıqla göstərmək olar ki, tam ədədin kvadratının 5-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt həmin ədədin özünün 5-ə bölünməsidir. Deməli,

$$m = 5k, \quad k \in N. \tag{17}$$

(17)-ni (16)-da nəzərə alsaq,

$$n^2 = 5k^2 \tag{18}$$

olduğunu alarıq. Yuxarıdakı mühakiməni aparmaqla

$$n = 5 \cdot p, \quad p \in N, \tag{19}$$

olduğunu alarıq. (17) və (19)-dan çıxır ki,

$$\text{ƏBOB}\,(m,n) \geq 5. \tag{20}$$

(20) bərabərsizliyi (15) bərabərliyinə ziddir. Alınmış ziddiyyət bizim fərziyyəmizin doğru olmadığını göstərir. Bununla da $\sqrt{5}$ ədədinin rasional ədəd olmadığı isbat olundu.

Qeyd edək ki, dövrdə 9-u və yaxud 0-ı (sıfırı) göstərməklə eyni bir rasional ədəd üçün sonsuz onluq kəsrlər vasitəsi ilə iki cür yazılış almaq olar: məsələn, $a = 0{,}63$ rasional ədədini həm

$$a = 0{,}63000...$$

və həm də

$$a = 0{,}62999...$$

sonsuz onluq kəsrləri vasitəsilə ifadə etmək olar.

Tutaq ki, E- sonsuz onluq kəsrlər çoxluğudur; E_1- dövrü 0 olan sonsuz onluq kəsrlər çoxluğudur; E_2- dövrü 9 olan sonsuz onluq kəsrlər çoxluğudur; R- həqiqi ədədlər çoxluğudur.

Asanlıqla aşağıdakı hökmlərin doğruluğu göstərilir:

Hökm 3. R çoxluğu ilə $E \setminus E_1$ çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır.

Hökm 4. R çoxluğu ilə $E \setminus E_2$ çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var.

§4. Həqiqi ədədlərin zəncirvari kəsrlər vasitəsilə təsnifatı.

Zəncirvari kəsr anlayışı ədədlər nəzəriyyəsinin maraqlı, həm də geniş tətbiqləri olan mövzularından biridir.

Tərif. q_0 ixtiyari tam ədəd, $q_1, q_2, ..., q_n$ natural ədədlər olduqda,

$$a = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\begin{matrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-2} + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}\end{matrix}}}}} \tag{1}$$

kəsrinə sonlu zəncirvari kəsr deyilir, burada n- mənfi olmayan tam ədəddir.

(1) kəsrində iştirak edən $q_0, q_1, q_2, ...$ ədədlərinə zəncirvari kəsrin elementləri və ya natamam qismətləri, $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3}, ...$ kəsrlərinə isə zəncirvari kəsrin halqaları deyilir.

(1) zəncirvari kəsrini qısa olaraq belə də yazırlar:

$$a = [q_0; q_1, q_2, ..., q_n]. \tag{2}$$

(2) işarələməsindən istifadə etməklə (1) zəncirvari kəsrini belə də yazmaq olar:

$$a = [q_0; q_1, q_2, ..., q_n] = q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, ..., q_n]}. \tag{3}$$

Hökm 1. Hər bir sonlu zəncirvari kəsr rasional ədəddir.

Doğrudanda, (1) zəncirvari kəsrinin elementləri üzərində sonlu rasional əməliyyatlar aparmaqla nəticədə onun adi kəsrə, yəni $\frac{p}{q}(p \in Z, q \in N)$ rasional ədədinə bərabər olan qiymətini hesablamış oluruq.

Bu hökmün tərsi də doğrudur:

Teorem. Hər bir rasional ədədi sonlu zəncirvari kəsr şəklində göstərmək olar.

İsbatı. $a = \frac{p}{q}$ verilmiş rasional ədəd olsun, burada $p \in Z$ və $q \in N$ olduğu nəzərdə tutulur.

p və q ədədlərinə Evklid alqoritmini tətbiq edib, aşağıdakı bərabərliklər sistemini yazaq:

$$\left.\begin{array}{l} p = q \cdot q_o + r_1, \\ q = r_1 \cdot q_1 + r_2, \\ r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3, \\ r_2 = r_3 \cdot q_3 + r_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1}, \\ r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} = r_n \cdot q_n \end{array}\right\} \qquad (E)$$

$$q > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > 0.$$

(E) bərabərliklərindən asanlıqla aşağıdakı bərabərliklər alınır:

$$a = \frac{p}{q} = q_0 + \frac{1}{\left(\frac{q}{r_1}\right)},$$

$$\frac{q}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)},$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\left(\dfrac{r_2}{r_3}\right)},$$

……………….

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{\left(\dfrac{r_{n-1}}{r_n}\right)},$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n \ .$$

Bu bərabərliklərdən isə alırıq ki,

$$a = \frac{p}{q} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \left(\dfrac{r_2}{r_3}\right)}} =$$

$$= \ldots = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\begin{array}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_{n-2} + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}\end{array}}}}}$$

yaxud qısa yazsaq,

$$a=\frac{p}{q}=[q_0;q_1,q_2,...,q_n]$$

alarıq. Əgər $a=\dfrac{p}{q}$ tam ədəd olsa, yəni $q=1$ və $a=p$ olsa, onda (E) bərabərliklərində yalnız $p=1\cdot p+0,\ q_0=p,\ r_1=0$ bərabərlikləri qalır və zəncirvari kəsr $a=q_0$ olur. Teorem isbat olundu.

Yuxarıda şərh olunanlardan aşağıdakı hökmün doğruluğu alınır:

Hökm. Rasional ədədlər çoxluğu ilə sonlu zəncirvari kəsrlər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var.

Misal. $a=\dfrac{97}{43}$ adi kəsrini zəncirvari kəsr şəklində yazın.

$$a=\frac{97}{43}=2+\frac{11}{43}=2+\frac{1}{\left(\frac{43}{11}\right)}=2+\frac{1}{3+\frac{10}{11}}=$$

$$=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\left(\frac{11}{10}\right)}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{10}}}=$$

$$=[2;3,1,10].$$

Əgər $a=[2;3,1,10]$ sonlu zəncirvari kəsri verilmişsə və buna uyğun adi kəsri tapmaq tələb olunursa, onda yuxarıdakı prosesi aşağıdan yuxarıya doğru davam etdirməklə $a=\dfrac{97}{43}$ adi kəsrini alacağıq. Bu tərs prosesə zəncirvari kəsrin bükülməsi deyilir.

Tərif. (1) zəncirvari kəsrində $n=\infty$ olsa, yəni (1)-də cəmləmə prosesi aşağıya doğru sonsuz davam etsə, başqa sözlə $a=[q_0;q_1,q_2,q_3,...]$ olsa, onda bu kəsrə sonsuz zəncirvari kəsr deyilir.

Ədədlər nəzəriyyəsində aşağıdakı hökmün doğruluğu göstərilir:

Hökm. İrrasional ədədlər çoxluğu ilə sonsuz zəncirvari kəsrlər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğynluq var.

Deməli, həqiqi ədədlər çoxluğu ilə zəncirvari kəsrlər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var. Zəncirvari kəsrdə halqaların sayı sonlu isə, onda o müəyyən bir rasional ədədi, əgər halqaların sayı sonsuz isə onda o müəyyən bir irrasional ədədi xarakterizə edir.

§5. Zəncirvari kəsrlərin tətbiqi ilə ədədin kökünün hesablanması.

Misal 1. $\sqrt{2}$ ədədini zəncirvari kəsr şəklində göstərin və kökü 0,01 dəqiqliklə hesablayın.

$\sqrt{2}$ irrasional ədədinin tam hissəsi 1-dir, kəsr hissəsi isə $\sqrt{2}$-1 fərqidir. Burada $0<\sqrt{2}-1<1$-dir. $\sqrt{2}$-1 kəsr hissəsini $\frac{1}{\alpha_1}$ kimi göstərək, yəni $\sqrt{2}\text{-}1=\frac{1}{\alpha_1}$. Buradan alırıq ki, $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$. Göründüyü kimi α_1 ədədinin tam hissəsi 2, kəsr hissəsi isə $\alpha_1-2=\sqrt{2}-1$ olacaq. Beləliklə,

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}. \tag{4}$$

rekurent münasibətinə görə yaza bilərik:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}}}\;. \tag{5}$$

(5) prosesini sonsuz davam etdirsək, alırıq:

$$\sqrt{2}-1=[0;2,2,2...]\,. \qquad (6)$$

(6) bərabərliyindən istifadə etməklə $\sqrt{2}$ irrasional ədədinin sonsuz zəncirvari kəsr şəklində aşağıdakı ifadəsini alırıq

$$\sqrt{2}=[1;2,2,2,\ldots]. \qquad (7)$$

(7) bərabərliyindən istifadə etməklə 2 ədədinin kvadrat kökünü ixtiyari dəqiqliklə tapa bilərik. 2-nin kvadrat kökünü 0,01 dəqiqliklə tapmaq tələb olunursa, onda (7) sonsuz zəncirvari kəsrinin aşağıdakı sonlu hissəsini götürmək kifayətdir:

$$\sqrt{2}\approx[1;2,2,2,2]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=1+\frac{12}{29}\,.$$

Buradan alırıq ki, $\sqrt{2}\approx 1{,}4137...$, yəni $\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

Misal 2. $\sqrt{3}$ irrasional ədədini sonsuz zəncirvari kəsr şəklində göstərin və 3 ədədinin kvadrat kökünü 0,01 dəqiqliklə hesablayın.

$\sqrt{3}$ irrasional ədədinin tam hissəsi 1-dir, kəsr hissəsi isə $\sqrt{3}$-1 fərqidir. Burada 0<$\sqrt{3}$-1<1-dir. $\sqrt{3}$-1 kəsr hissəsini $\frac{1}{\alpha_1}$ kimi göstərək, yəni $\sqrt{3}$-1=$\frac{1}{\alpha_1}$. Buradan $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=$ $=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. Deməli,

$$\sqrt{3}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}}\,. \qquad (8)$$

(8) rekurent düsturundan istifadə etməklə yaza bilərik:

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}}. \tag{9}$$

(9) rekurent münasibətinə əsasən yaza bilərik:

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}}}}. \tag{10}$$

Bu prosesi sonsuz davam etdirsək, $\sqrt{3}-1$ ədədinin sonsuz zəncirvari kəsr şəklində aşağıdakı ifadəsini alarıq:

$$\sqrt{3}-1=[0;1,2,1,2,\ldots].$$

Buradan alırıq ki,

$$\sqrt{3}=[11,2,1,2,\ldots]. \tag{11}$$

(11) sonsuz zəncirvari kəsrindən istifadə etməklə 3 ədədinin kvadrat kökünü ixtiyari dəqiqliklə hesablamaq olar. 3-ün kvadrat kökünü 0,01 dəqiqliklə tapmaq tələb olunursa, onda

$$\sqrt{3}\approx[1;1,2,1,2]=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=1+\frac{8}{11}=$$

$$=1,7272\ldots\approx 1,73.$$

Misal 3. $\sqrt{5}$ irrasional ədədini sonsuz zəncirvari kəsr şəklində göstərin və kökü 0,01 dəqiqliklə tapın.

$\sqrt{5}$ ədədinin tam hissəsi 2-dir, kəsr hissəsi isə $\sqrt{5}$-2 fərqidir. Burada 0<$\sqrt{5}$-2<1-dir. $\sqrt{5}$-2 kəsr hissəsini $\frac{1}{\alpha_1}$ kimi göstərək, yəni $\sqrt{5}$-2=$\frac{1}{\alpha_1}$. Buradan alırıq ki,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \sqrt{5}+2 = 4+\left(\sqrt{5}-2\right).$$

Deməli,

$$\sqrt{5}-2 = \frac{1}{4+\left(\sqrt{5}-2\right)}. \qquad (12)$$

(12) rekurent münasibətinə əsasən yaza bilərik:

$$\sqrt{5}-2 = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\left(\sqrt{5}-2\right)}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\left(\sqrt{5}-2\right)}}}. \qquad (13)$$

(13) prosesini sonsuz davam etdirsək, ($\sqrt{5}$-2) ədədinin sonsuz zəncirvari kəsr şəklində aşağıdakı ifadəsini alarıq:

$$\sqrt{5}\text{-}2=[0;4,4,4,\ldots].$$

Buradan alırıq ki,

$$\sqrt{5}=[2;4,4,4,\ldots]. \qquad (14)$$

(14) sonsuz zəncirvari kəsrindən istifadə etməklə 5 ədədinin kvadrat kökünü ixtiyari dəqiqliklə hesablamaq olar. 5-in kvadrat kökünü 0,01 dəqiqliklə tapmaq tələb olunursa, onda

$$\sqrt{5} \approx [2;4,4,4,4] = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}} = 2+\frac{8}{305} \approx$$

$$\approx 1,236065\ldots\ .$$

§6. Kompleks ədədlər və onlar üzərində əməllər.

$a+ib$ şəklində olan ədədə kompleks ədəd deyilir (burada $a, b \in R, i=\sqrt{-1}$). a ədədinə z kompleks ədədinin həqiqi hissəsi deyilir və $a=\mathrm{Re}(z)$ kimi işarə edilir, b ədədinə isə z kompleks ədədinin xəyali hissə əmsalı deyilir və $b=\mathrm{Im}(z)$ kimi işarə edilir. Kompleks ədədlər üçün aşağıdakı aksiomlar qəbul edilir:

I. $a+ib$ və $c+id$ kompleks ədədləri yalnız eyni uyğun komponentlərə malik olduqda bərabər adlanırlar, yəni

$$a+ib=c+id \Leftrightarrow a=c,\ b=d .$$

II. $a+ib$ və $c+id$ kompleks ədədlərinin cəmi $(a+c)+i(b+d)$ kompleks ədədinə deyilir, yəni

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d) .$$

III. $a+ib$ və $c+id$ kompleks ədədlərinin hasili $(ac-bd)+i(ad+bc)$ kompleks ədədinə deyilir, yəni

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc) .$$

IV. $a+i\cdot 0$ kompleks ədədi a həqiqi ədədinə bərabər götürülür, yəni

$$a+i\cdot 0=a .$$

$(a+ib)$ və $(c+id)$ kompleks ədədlərinin nisbəti $\dfrac{a+ib}{c+id}$ elə $x+iy$ kompleks ədədinə deyilir ki,

$$a+ib=(c+id)\cdot(x+iy) \tag{1}$$

bərabərliyi ödənilsin, burada fərz edilir ki, $c+id\neq 0$, yəni $|d|+|c|>0$.

III aksioma əsasən (1) bərabərliyinin sağ tərəfini hesablasaq, alarıq:

$$a+ib=(cx-dy)+i(cy+dx) . \tag{2}$$

I-ci aksioma görə (2) bərabərliyindən alırıq:

$$\left.\begin{aligned} cx-dy=a \\ dx+cy=b \end{aligned}\right\} . \tag{3}$$

Bu tənliklər sistemini həll edərək, tapırıq:

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Beləliklə

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, \tag{4}$$

yəni $c+id \neq 0$ olduqda $a+ib$ və $c+id$ kompleks ədədlərinin nisbəti var, yeganədir və bu nisbət (4) düsturu ilə hesablanır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, kompleks ədədlər çoxluğu meydan təşkil edir. z kompleks ədədinin kvadratı dedikdə $z \cdot z$ hasili başa düşülür, yəni $z^2 = z \cdot z$; z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən (n natural ədəddir) qüvvəti dedikdə isə aşağıdakı hasil başa düşülür:

$$z^n = z \cdot z ... z, \tag{5}$$

belə ki, (5) düsturunun sağ tərəfindəki vuruqların sayı n-dir. z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən (n- natural ədəddir) kökü elə bir u kompleks ədədinə deyilir ki,

$$z = u^n \tag{6}$$

bərabərliyi ödənilsin. z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən kökünü simvolik olaraq $z^{\frac{1}{n}}$ və ya $\sqrt[n]{z}$ kimi işarə etsək, (6) bərabərliyini belə də yaza bilərik:

$$z^{\frac{1}{n}} = u \quad \text{və ya} \quad \sqrt[n]{z} = u.$$

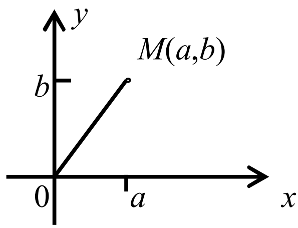
$z = a+ib$ kompleks ədədilə ona qoşma adlanan $\bar{z} = a-ib$ kompleks ədədinin cəmi və hasili düsturlarından istifadə etməklə alırıq:

$$z + \bar{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a,$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2,$$

yəni, göründüyü kimi, qoşma kompleks ədədlərin cəmi və hasili həqiqi ədədlərdir.

Kompleks ədədin həndəsi təsvirini, triqonometrik şəklini, modulunu və arqumentini izah etmək üçün müstəvi üzərində XOY düzbucaqlı dekart koordinat sistemini götürək (şəkil 1). $z = a + ib$ ədədinin həqiqi hissəsi olan a ədədini absis oxu üzərində, xəyalı hissə əmsi olan b ədədini isə ordinat oxu üzerialıdə qeyd etməklə, müstəvi üzərində $M(a,b)$ nöqtəsini quraq. Bu qayda ilə $z = a + ib$ kompleks ədədinə müstəvinin $M(a,b)$ nöqtəsini qarşı qoyaq və tərsinə müstəvinin hər bir $M(a,b)$ nöqtəsinə $z = a + ib$ kompleks ədədini qarşı qoyaq. Beləliklə, kompleks ədədlər çoxluğu ilə müstəvinin nöqtələri çoxluğa arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmış oluruq.



Şəkil 1.

$$z = a + ib \Leftrightarrow M(a,b).$$

OM parçasının uzunluğuna, yəni $\sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə $z = a + ib$ kompleks ədədinin modulu deyilir və $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ kimi işarə edilir. $\overrightarrow{OM}$ vektoru ilə $\overrightarrow{OX}$ vektoru arasındakı φ bucağına $z = a + ib$ kompleks ədədinin arqumenti deyilir və belə işaqə edilir: $arq(z) = \varphi$.

Şəkil 1-dən göründüyü kimi

$$a = |z| \cdot \cos\varphi,$$

$$b = |z| \cdot \sin\varphi \ .$$

Deməli, $z = a + ib$ kompleks ədədini

$$z = |z| \cdot \cos\varphi + i|z| \cdot \sin\varphi$$

və ya

$$z = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi) \qquad (7)$$

kimi yazmaq olar. (7) ifadəsinə $z = a + ib$ kompleks ədədinin triqonometrik şəkli deyilir. $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyaları 2π periodlu funksiyalar olduğu üçün (7) düsturuna əsasən $z = a + ib$ kompleks ədədinin triqonometrik şəklini aşağıdakı kimi də yaza bilərik:

$$z = |z|(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)), \qquad k \in z\,. \tag{8}$$

α həqiqi ədədi üçün $\cos\alpha + i\sin\alpha$ -nı $e^{i\alpha}$ simvolu ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}\,. \tag{9}$$

(9) düsturuna kompleks ədəd üçün Eyler düsturu deyilir. Riyazi analiz kursunda $y = \sin x,\ y = \cos x$ və $y = e^x$ funksiyalarının Teylor düsturu ilə ayrılışını yazmaqla və (16) düsturundan istifadə etməklə, (9) düsturunun doğruluğu göstərilir. (9)-u (8)-də nəzərə alsaq $z = a + ib$ kompleks ədədinin triqonometrik şəkli üçün aşağıdakı düsturu alarıq:

$$z = |z|e^{i(2k\pi + arq(z))}, \qquad k \in z\,. \tag{10}$$

istənilən tam m və natural n ədədləri üçün

$$\left(e^{i\alpha}\right)^m = e^{i\alpha m},$$

$$\left(e^{i\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\alpha}{n}}, \tag{11}$$

olduğunu nəzərə alsaq, (10) düsturundan $z = a + ib$ kompleks ədədinin m-ci dərəcədən qüvvəti üçün

$$z^m = |z|^m e^{i(2km\pi + m\cdot arq(z))}, \qquad k \in z, \tag{12}$$

düsturunu, n-ci dərəcədən kökü üçün isə

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi + arq(z)}{n}}, \qquad k \in z, \tag{13}$$

düsturunu alarıq.

(13) düsturundan istifadə etməklə, aşağıdakı hökmün doğruluğu asanlıqla isbat edilir.

Hökm. Sıfırdan fərqli olan z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən düz n dənə müxtəlif $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ kökləri var və bu köklər aşağıdakı düsturla hesablanır

$$z_k = \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi + arq(z)}{n}}, \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{14}$$

(11) düsturunun birincisini belə yazmaq olar

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi, \quad m \in N. \tag{15}$$

(15) Muavr düsturu adlanır.

Mənfi olmayan k tam ədədi üçün

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i \tag{16}$$

olduğunu nəzərə almaqla, (15)-in sol tərəfinə Nyuton binomunu tətbiq etsək, arqumentin istənilən $m(m \in N)$ mislinin sinus və kosinusu üçün aşağıdakı düsturları alarıq:

$$\cos m\varphi = \cos^m \varphi - C_m^2 \cos^{m-2} \varphi \sin^2 \varphi +{}_m^4 \cos^{m-4} \varphi \sin^4 \varphi - ...,$$

$$\sin m\varphi = C_m^1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi - C_m^3 \cos^{m-3} \varphi \sin^3 \varphi +$$
$$+ C_m^5 \cos^{m-5} \varphi \sin^5 \varphi - ...,$$

burada $C_m^k = \dfrac{m(m-1)...(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$ binominal əmsallardır.

(14) düsturundan istifadə etməklə verilmiş z kompleks ədədinin köklərini asanlıqla tapmaq olur. Məsələn $z = 1$ isə, onda $\arg(z) = 0$ olur və 1-in n-ci dərəcədən kökləri üçün

$$z_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \ k = 0,1,...,n-1, \tag{17}$$

ədədlərini alırıq. (17)-ni açıq şəkildə yazsaq:

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

…………………………

$$z_{n-1} = \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}, \qquad (18)$$

vahidin n -ci dərəcədən bütün köklərini tapmış olarıq, onların sayı düz n dənədir və bu köklərin hamısı müxtəlifdir, yəni

$z_p \neq z_q$, əgər $p \neq q$ isə.

$n = 3$ olsa, yəni $\sqrt[3]{1}$ ədədi üçün (18) düsturuna əsasən

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} z_0 = 1, \\ z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

olur.

IV FƏSİL

FUNKSİYA ANLAYIŞI VƏ ONUN MƏKTƏB RİYAZİYYATINDA ROLU.

§1. Funksiya anlayışı.

Funksiya anlayışı riyaziyyatın real aləmlə bilavasitə bağlı olan fundamental anlayışlarından biridir. Riyaziyyatın inkişafı prosesində funksiya anlayışı ciddi dəyişikliklərə məruz qalmışdır. Məsələn, L.Eylerin vaxtında funksiya anlayışı analitik ifadə anlayışı ilə eyniləşdirilirdi. Dirixlenin vaxtında isə funksiya bir kəmiyyətin digərindən asılı olaraq dəyişməsi kimi qəbul edilirdi. Funksiya haqqında belə təsəvvürün əsas nöqsanı funksiya anlayışının kəmiyyət, dəyişmə və asılılıq kimi çox mürəkkəb anlayışlar vasitəsilə təyin edilməidir.

Məktəb riyaziyyat kursunda funksiya anlayışı bir neçə variantda daxil edilir: bir variantda funksiya ilk anlayış kimi daxil edilir. Başqa variantda inikas ilk anlayış kimi daxil edilir, funksiya isə bir ədədi çoxluğun digər ədədi çoxluğa inikası kimi daxil edilir. Üçüncü variantda isə funksiya anlayışı ədədi çoxluqların elementləri arasında xüsusi münasibət kimi daxil edilir. Nəhayət, funksiya çoxluqların elementləri arasında qarşı qoyma kimi də daxil edilə bilər:

Tutaq ki, hər hansı $\boldsymbol{X} \neq \varnothing$ ədəi çoxluğu verilmişdir. Əgər istənilən $x \in \boldsymbol{X} (\forall x \in X)$ ədədinə qarşı yeganə y ədədini qarşı qoyan f qaydası verilmişsə, onda deyirlər ki, təyin oblastı X çoxluğu olan $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir.

Funsiyanın verilməsi üçün:

1) onun təyin oblastı və

2) təyin oblastına daxil olan hər bir x ədədinə qarşı qoyulan y ədədinin x-ədədi vasitəsilə tapılması qaydası verilməlidir.

Funksiyanın verilməsinin əsas üsulları analitik, cədvəl və qrafik üsullar hesab edilir.

Funksiya analitik üsulla verildikdə hər bir x ədədinə qarşı qoyulan y ədədinin tapılması qaydası düstur və ya düsturlar vasitəsilə təsvir edilir.

Funksiya cədvəl üsulu ilə verildikdə x-in və ona uyğun y-in qiymətləri cədvəl vasitəsilə verilir. Bu üsul vasitəsilə funksiyanın qiymətini sonlu sayda nöqtədə vermək olar. $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki dedikdə koordinat müstəvisində $(x, f(x))$ şəklində bütün nöqtələr çoxluğu başa düşülür. Funksiyanın qrafik üsulla verilməsi çox əlverişlidir: o funksiyanın xassələrini əyani təsvir etmək imkanı yaradır.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir. Bu funksiyanın təyin oblastını D_f ilə işarə edək. $E_f = \{y | x \in D_f, y = f(x)\}$ çoxluğu $y = f(x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu adlanır.

Funsiyanın qrafikini qurmaq üçün onun ümumi xassələrini bilmək çox vacibdir. Funksiyanın ümumi xassələri dedikdə onun tək və ya cüt olması, artan və ya azalan olması, dövrü olması və ya dövrü olmaması, məhdud və ya qeyri-məhdud olması və s. başa düşülür.

§2. Funksiyanın ümumi xassələri. Tək və cüt funksiyalar.

Əgər istənilən $x \in X$ üçün $-x \in X$ olarsa, onda X çoxluğu koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik çoxluq adlanır.

Təyin oblastı koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik çoxluq olan $y = f(x)$ funksiyası $f(x) = f(-x)$ şərtini ödəyərsə, onda o cüt funksiya adlanır.

Misal. $y = 2x^4 - 5$ cüt funksiyadır. Ona görə ki, $f(-x) = 2(-x)^4 - 5 = 2x^4 - 5 = f(x)$.

Təyin oblastı koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik çoxluq olan $y = f(x)$ funksiyası $f(-x) = -f(x)$ şərtini ödəyirsə, onda o tək funksiya adlanır.

Misal. $y = 2x^3 - x$ tək funksiyadır. Ona görə ki, $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$.

Nə tək və nə də cüt olan funsiya amorf funksiya adlanır.

Misal. $y = x - 2x^2$ amorf funksiyadır.

Aşağıdakı hökmlər doğrudur:

1. İstənilən funksiyanı tək və cüt funksiyaların cəmi şəklində göstərmək olar:

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x),$$

burada $f_+(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ cüt, $f_-(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ isə tək funksiyadır. Əgər $f(x)$ funksiyası tək (cüt) olarsa, onda bu funksiya üçün $f_+(x) = 0$ $(f_-(x) = 0)$ olar. Misal: $y = x^2 - 5x + 2$ funksiyası üçün $f_+(x) = x^2 + 2$, $f_-(x) = -5x$-dir.

2. Eyni çoxluqda təyin olunmuş $f(x)$ və $g(x)$ cüt funksiyaları üçün $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ və $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ funksiyaları da həmin çoxluqda cüt funksiyalardır.

3. Eyni çoxluqda təyin olunmuş $f(x)$ və $g(x)$ eyni zamanda tək funksiyalar olarsa, onda $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ funksiyaları tək, $f(x)\cdot g(x)$ və $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiyaları isə həmin çoxluqda cüt funksiyalar olar.

4. Verilmiş çoxluqda $f(x)$ cüt, $g(x)$ isə tək funksiyalar olarsa, onda $f(x)\cdot g(x)$ və $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiyaları həmin çoxluqda tək funksiyalar olar.

§3. Məhdud funksiyalar.

D_f çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası $\forall x \in D_f$ üçün $f(x)\geq A$ (A-sonlu ədəddir) şərtini ödəyərsə, onda o aşağıdan məhdud funksiya adlanır.

Misal. $y=x^2-1$ funksiyası aşağıdan məhdud funksiyadır, çünki

$$\forall x \in (-\infty,+\infty) \text{ üçün } x^2-1\geq -1.$$

D_f çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası $\forall x \in D_f$ üçün $f(x)\leq A$ (A-sonlu ədəddir) şərtini ödəyərsə, onda o yuxarıdan məhdud funksiya adlanır.

Misal. $y=-0{,}5x^2+3$ funksiyası yuxarıdan məhdud funksiyadır, çünki

$$\forall x \in (-\infty,+\infty) \text{ üçün } -0{,}5x^2+3\leq 3.$$

D_f çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası bu çoxluqda həm aşağıdan və həm də yuxarıdan məhdud olarsa, onda bu funksiya məhdud funksiya adlanır.

Misal. $y=\frac{x}{|x|}\ (x\neq 0)$ funksiyası məhdud funksiyadır.

Aşağıdakı hökmlər doğrudur:

1. Eyni çoxluqda təyin olunmuş $f(x)$ və $g(x)$ məhdud funksiyaları üçün $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\cdot g(x), |f(x)|$ və $|g(x)|$ funksiyaları da bu çoxluqda məhdud funksi-yalardır.
2. Eyni çoxluqda təyin olunmuş $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarından $f(x)$ məhdud olarsa, $g(x)$ isə $|g(x)|\geq M>0$ şərtini ödəyərsə, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyası bu çoxluqda məhdud funksiya olur.
3. Əgər $f(x)$ D_f çoxluğunda məhdud funksiya olarsa, onda $\sqrt[n]{|f(x)|}\ (n\in N)$ funksiyası da bu çoxluqda məhdud funksiya olar.
4. Əgər $f(x)$ D_f çoxluğunda təyin olunmuş ixtiyari funksiya olarsa, onda $\cos f(x)$ və $\sin f(x)$ funksiyaları bu çoxluqda məhdud olarlar.
5. Əgər $f(x)$ D_f çoxluğunda məhdud funksiya olarsa, onda $\arcsin f(x)$ və $\arccos f(x)$ funksiyaları $|f(x)|\leq 1, x\in D_f$ şərtini ödəyən çoxluqda məhdud olar.

§4. Monoton funksiyalar.

Əgər $y=f(x),\ x\in D_f$ funksiyası istənilən $x_1,x_2\in D_f$, $x_1<x_2$ üçün $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$ şərtini ödəyərsə, onda $f(x)$ D_f çoxluğunda artan (azalan) funksiya adlanır.

Misal. $y = 5x - 2$ funksiyası bütün ədəd oxunda artan funksiyadır, çünki istənilən $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_1 < x_2$ üçün $5x_2 - 2 - (5x_1 - 2) = 5(x_2 - x_1) > 0$ olduğundan $5x_1 - 2 < 5x_2 - 2$ olur. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $y = -3x + 4$ funksiyası bütün ədəd oxunda azalandır.

Əgər $y = f(x),\ x \in D_f$ funksiyası istənilən $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2$ üçün $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$ şərtini ödəyərsə, onda $f(x)$ funksiyası D_f çoxluğunda azalmayan (artmayan) funksiya adlanır.

Misal.

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ əgər } \mathbf{x} \in (\mathbf{-\infty, -1}], \\ x, \text{ əgər } x \in (-1, 1), \\ 1, \text{ əgər } \mathbf{x} \in [\mathbf{1}, +\infty) \end{cases}$$

azalmayan funksiyadır.

Verilmiş çoxluqda təyin olunan $f(x)$ funksiyası bu çoxluqda artan və ya azalan olarsa, onda $f(x)$ funksiyası bu çoxluqda ciddi monoton funksiya adlanır.

Aşağıdakı hökmlər doğrudur:

1. Əgər $f(x)$ funksiyası D_f çoxluğunda artan (azalan) funksiya olarsa, onda $f(x) + C$ funksiyası da D_f çoxluğunda artan (azalan) funksiyasıdır (burada C istənilən sabitdir).
2. Əgər $f(x)$ funksiyası D_f çoxluğunda artan funksiya olarsa, onda $C \cdot f(x)$ funksiyası $C > 0$ olduqda artan, $C < 0$ olduqda isə azalan funksiyadır (burada $C \ne 0$ sabitdir). Əgər $f(x)$ funksiyası D_f çoxluğunda azalan funksiya olarsa, onda $C \cdot f(x)$ funksiyası $C > 0$ olduqda azalan, $C < 0$ olduqda isə artandır.

3. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları X çoxluğunda artan (azalan) funksiyadırsa, onda $f(x)+g(x)$ bu çoxluqda artan (azalan) funksiyadır.
4. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları X çoxluğunda artan (azalan) və mənfi olmayan funksiyalardırsa, onda $f(x)\cdot g(x)$ funksiyası da bu çoxluqda artan (azalan) funksiyadır.
5. Əgər $f(x)$ X çoxluğunda artan (azalan) və müsbət qiymətli funksiyadırsa, onda $\dfrac{1}{f(x)}$ funksiyası bu çoxluqda azalan (artan) funksiyadır.
6. Əgər $f(x)$ X çoxluğunda artan (azalan) və mənfi olmayan funksiya isə, onda $\alpha \in (0,1)$ üçün $\sqrt[\alpha]{f(x)}$ funksiyası bu çoxluqda artan (azalan) funksiyadır.
7. Əgər $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda artan (azalan) funksiya isə, onda $0<a<1$ üçün $a^{f(x)}$ funksiyası bu çoxluqda azalan (artan) funksiyadır.
8. Əgər $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda artan (azalan) funksiya isə, onda $a>1$ üçün $a^{f(x)}$ funksiyası bu çoxluqda artan (azalan) funksiyadır.
9. Əgər $f(x)$ funksiyası artan (azalan) və müsbət qiymətli funksiya isə, onda $a>1$ üçün $\log_a f(x)$ funksiyası bu çoxluqda artan (azalan), $0<a<1$ olduqda isə azalan (artan) funksiyadır.

§5. Dövrü funksiya.

$y=f(x), x\in X$ funksiyası aşağıdakı iki şərti ödədikdə o, X çoxluğunda T dövrlü funksiya adlanır:
a) elə $T\ (T\neq 0)$ ədədi var ki, istənilən $x\in X$ üçün $x+T, x-T\in \boldsymbol{X}$;

b) istənilən $x \in X$ üçün $f(x) = f(x+T)$.

Misal. $y = \sin 2x$ funksiyası $T = \pi$ dövrlü funksiyadır.

Aşağıdakı faktlar doğrudur:

1. Əgər T_1 və T_2 $\left(T_1 \neq T_2\right)$ $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyasının dövrləri isə, onda $T_1 + T_2$ ədədi də bu funksiyanın X çoxluğunda dövrüdür.
2. Əgər T ədədi $f(x)$ funksiyasının dövrü isə, onda istənilən $n \in Z$ $(n \neq 0)$ üçün $n \cdot T$ də bu funksiyanın X çoxluğunda dövrüdür.
3. Əgər T_1 və T_2 $y = f(x), x \in X$ funksiyasının dövrləri isə, onda $n \cdot T_1 + k \cdot T_2 \neq 0$ ədədi də bu funksiyanın X çoxluğunda dövrüdür $(n, k \in Z)$.
   Dövrü funksiyanın ən kiçik müsbət dövrü varsa, onda o bu funksiyanın əsas dövrü adlanır.
4. Dövrü funksiyanın təbii təyin oblastında kəsilmə nöqtələrinin sayı sonlu ola bilməz.
5. Dövrü funksiya özünün hər bir qiymətini sonsuz sayda nöqtədə alır.
6. Dövrü funksiya bütün təyin oblastında ciddi monoton funksiya ola bilməz.
7. Bütün ədəd oxunda kəsilməz və dövrü olan funksiya məhduddur. Deməli, bütün ədəd oxunda kəsilməz, lakin məhdud olmayan funksiya dövrü ola bilməz.
8. Fərz edək ki, bütün həqiqi oxda $f_1(x)$ $T_1 > 0$ dövrlü, $f_2(x)$ isə $T_2 > 0$ dövrlü funksiyadır. Əgər T_1/T_2 rasional ədəd olarsa, onda $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$ və $f_1(x) \cdot f_2(x)$ funksiyaları müəyyən dövrlü funksiyalardır.

§6. Kəsilməz funksiyalar.

Əvvəlcə funksiyanın nöqtədə limiti anlayışını daxil edək.

Fərz edək ki, $y = f(x),\ x \in D_f$ funksiyası verilmişdir və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, istənilən $x \in D_f \cap ((\alpha - \delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \delta))$ üçün $|f(x) - b| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda b ədədinə $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limiti deyilir. Əgər x a-ya yaxınlaşdıqda $f(x)$-in limiti b-yə bərabərdirsə, onda bu fakt

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

kimi işarə olunur, burada a və b ədədlərinin sonlu olduğu nəzərdə tutulur. Ola bilər ki, a və b ədədlərindən biri və ya hər ikisi sonsuzluğa bərabər olsun.

Misal.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sonlu a və b üçün $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ faktını həndəsi olaraq belə şərh etmək olar: $\forall x \in D_f \cap ((\alpha - \delta, \alpha) \cup$ $\cup (\alpha, \alpha + \delta))$ üçün $y = f(x)$ funk-siyasının qrafikinin bütün $(x, f(x))$ nöqtələri $b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$ zolağı daxilində yerləşir.

Fərz edək ki, $y = f(x), x \in (a, b)$ funksiyası verilmişdir. Əgər $x_0 \in (a, b)$ üçün $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır. $y = f(x), x \in (a, b)$ funksiyası (a, b) intervalının bütün nöqtələrində kəsilməz olarsa, onda $f(x)$ (a, b) intervalında kəsilməz funksiya adlanır.

Misal.
$$y=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \quad \text{olanda,}\\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \quad \text{olanda}\end{cases}$$
funksiyası bütün ədəd oxunda kəsilməzdir.

Aşağıdakı faktlar dlğrudur:

I. Fərz edək ki, $y=f(x), x\in(a,b)$ və $y=g(x), x\in(a,b)$ funksiyaları $x_0\in(a,b)$ nöqtəsində kəsilməzdirlər. Onda: 1) elə $\delta>0$ var ki, $f(x)$ funksiyası $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ intervalında məhduddur; 2) əgər $f(x_0)>0$ $(f(x_0)<0)$ isə, onda elə $\delta>0$ vardır ki, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ üçün $f(x_0)>0$ $(f(x_0)<0)$ olur; 3) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ və $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (əgər $g(x)\neq 0$ isə) funksiyalarının hər biri $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

II. Fərz edək ki, $y=f(x), x\in(a,b)$ funksiyası $x_0\in(a,b)$ nöqtəsində kəsilməzdir və $f(x)$ (a,b) intervalında ciddi monotondur. Onda $x=f^{-1}(y)$ tərs funksiyası $y_0=f(x_0)$ nöqtəsində kəsilməz olur.

III. Fərz edək ki, $y=f(x), x\in(a,b)$ funksiyası $x_0\in(a,b)$ nöqtəsində, $u=g(y)$, $y\in(c,d)\supset E_f$ funksiyası isə $f(x_0)=y_0\in(c,d)$ nöqtəsində kəsilməzdir. Onda $u(f(x)), x\in(a,b)$ mürəkkəb funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməz olur.

§7. Qabarıq funksiya.

X parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün istənilən $x_1, x_2 \in X$ və istənilən $\alpha \in (0,1)$ üçün

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \geq \alpha f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)$$

münasibəti ödənilərsə, onda $f(x)$ funksiyası bu parçada yuxarıya qabarıq funksiya adlanır.

X parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün istənilən $x_1, x_2 \in X$ və istənilən $\alpha \in (0,1)$ üçün

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \leq \alpha \cdot f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)$$

münasibəti ödənilirsə, onda $f(x)$ funksiyası aşağıya qabarıq funksiya adlanır.

Funsiyanın yuxarıya qabarıq olması həndəsi olaraq o deməkdir ki, $f(x)$ funksiyasının qrafikinin istənilən AB qövsünün heç bir nöqtəsi onun $A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ və $B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ uc nöqtələrini birləşdirən vətərdən aşağıda yerləşməyir.

Doğrudan da $f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right)$ $f(x)$ funksiyasının $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ nöqtəsindəki qiymətidir. $\alpha f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)$ isə qrafiki $A\left(x_1; f\left(x_1\right)\right)$ və $B\left(x_2; f\left(x_2\right)\right)$ nöqtələrindən keçən xətti funksiyanın $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ nöqtəsindəki qiymətidir.

Funksiyanın aşağıya qabarıq olması həndəsi olaraq o deməkdir ki, $f(x)$ funksiyası qrafikinin istənilən AB qövsünün heç bir nöqtəsi onun $A\left(x_1; f\left(x_1\right)\right)$ və $B\left(x_2; f\left(x_2\right)\right)$ uc nöqtələrini birləşdirən vətərdən yuxarıda yerləşməyir.

Aşağıdakı faktlar doğrudur:

1. Əgər $f(x)$ yuxarıya (aşağıya) qabarıq funksiya olarsa, onda - $f(x)$ aşağıya (yuxarıya) qabarıq funksiya olar.
2. Əgər $f(x)$ yuxarıya (aşağıya) qabarıq funksiya olarsa, onda $c > 0$ üçün $c \cdot f(x)$ yuxarıya (aşağıya) qabarıq funksiya olar.
3. Eyni çoxluqda yuxarıya (aşağıya) qabarıq olan iki funksiyanın cəmi də həmin çoxluqda yuxarıya (aşağıya) qabarıq funksiya olur.
4. Əgər $y = L(u)$ artan və aşağıya qabarıq funksiya, $u = f(x)$ isə aşağıya qabarıq funksiya olarsa, onda $y = L(f(x))$ aşağıya qabarıq funksiya olar.
5. $y = f(x)$ və $y = f^{-1}(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalar olarsa, onda:
   a) $f(x)$ artan və yuxarıya qabarıq funksiya olduqda $f^{-1}(x)$ artan və aşağıya qabarıq funksiya olar;
   b) $f(x)$ azalan və yuxarıya qabarıq funksiya olduqda $f^{-1}(x)$ azalan və yuxarıya qabarıq funsiya olar;
   v) $f(x)$ artan və aşağıya qabarıq funksiya olduqda $f^{-1}(x)$ artan və yuxarıya qabarıq funksiya olar;
   q) $f(x)$ azalan və aşağıya qabarıq funksiya olduqda $f^{-1}(x)$ azalan və aşağıya qabarıq funksiya olur.
6. Parçada sabit olmayan yuxarıya (aşağıya) ciddi qabarıq funksiya bu parçanın daxili nöqtəsində ən kiçik (ən böyük) qiymətini ala bilməz.

§8. Mürəkkəb funksiya.

Fərz edək ki, $y=g(x)$ təyin oblastı D_g, qiymətlər çoxluğu isə E_g olan funksiya, $z=f(x)$ isə təyin oblastı $D_f \supset E_g$, qiymətlər çoxluğu isə E_f olan funksiyadır. Onda hər bir $x \in D_g$ ədədinə $y=g(x)$, $f(y)=z$ şərtlərini ödəyən $z \in E_f$ ədədini qarşı qoyan funksiya mürəkkəb funksiya adlanır. Fərz edək ki, $y=f(x)$ təyin oblastı D_f, qiymətlər çoxluğu isə E_f olan funksiyadır. Əgər $f(x)$ funksiyası $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ üçün $f(x_1) \neq f(x_2)$ şərtini ödəyərsə, $x=f^{-1}(y)$ kimi işarə edilən funksiya hər bir $y \in E_f$ ədədinə $f(x)=y$ şərtini ödəyən yeganə $x \in D_f$ ədədini qarşı qoyur. $x=f^{-1}(y)$ funksiyası $y=f(x)$ funksiyasının tərsi adlanır. Əgər $y=f(x)$ funksiyasının tərsi varsa, onda $f^{-1}(x)$ funksiyasını tapmaq üçün $\forall y \in E_f$ üçün $y=f(x)$ tənliyindən x-i y vasitəsilə tapmaq lazımdır: $x=f^{-1}(y)$.

Misal. $y=3x-1$ funksiyasının tərsini tapaq: $x=\frac{y+1}{3}$. Deməli, $f(x)=3x-1$ funksiyasının tərsi $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{3}$-dür. Qarşılıqlı tərs funksiyalar üçün $f^{-1}(f(x))=x, \forall x \in D_f$ üçün və $f(f^{-1}(y))=y, \forall y \in E_f$ üçün münasibətləri ödənilir.

§9. Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın tədqiqi və onun qrafikinin qurulması.

Törəmə anlayışı funksiyanın tədqiqi prosesini əhəmiyyətli dərəcədə sadələşdirir. Törəmənin tətbiqi ilə fuksiyanın tədqiq olunması üçün bəzi anlayışları və təklifləri daxil etmək lazımdır.

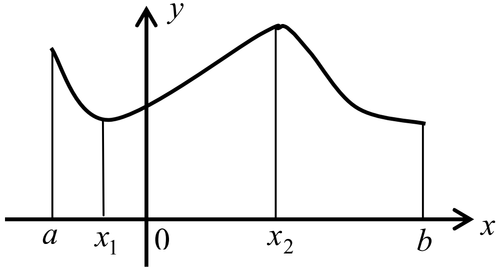
1. Əgər $y = f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandırsa, onda $f(x)$-in sabit funksiya olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $x \in (a,b)$ üçün $f'(x) = 0$ olması şərtidir.

2. Əgər $y = f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında artan (azalan) və diferensiallanan funksiyadırsa, onda istənilən $x \in (a,b)$ üçün $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ olur.

3. Əgər (a,b) intervalında diferensiallanan $y = f(x)$ funksiyası üçün istənilən $x \in (a,b)$ üçün $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ şərti ödənilərsə, onda $f(x)$ bu intervalda ciddi artan (azalan) funksiyadır.

4. Fərz edək ki, $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyası verilmişdir. Əgər $x_0 \in X$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan elə $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \supset X, \delta > 0$ intervalı varsa ki, istənilən $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ üçün $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ olur, onda x_0 nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının lokal maksimum (minimum) nöqtəsi adlanır.

Funksiyanın lokal maksimum və lokal minimum nöqtələri onun ekstremum nöqtələri adlanır. Funksiyanın ekstremum nöqtəsindəki qiyməti onun ekstremal qiyməti adlanır.

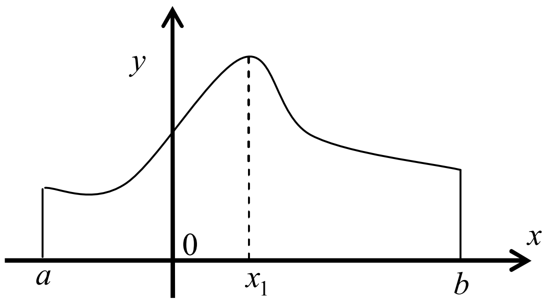


Səkil 1.

Verilən şəkildə x_1 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının lokal minimum, x_2 nöqtəsi isə lokal maksimum nöqtəsidir.

5. Fərz edək ki, $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyası verilmişdir. Əgər $x_0 \in X$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan elə $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$, $\delta > 0$ intervalı varsa ki, istənilən $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ üçün $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ olur, onda x_0 nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının ciddi lokal maksimum (minimum) nöqtəsi adlanır.

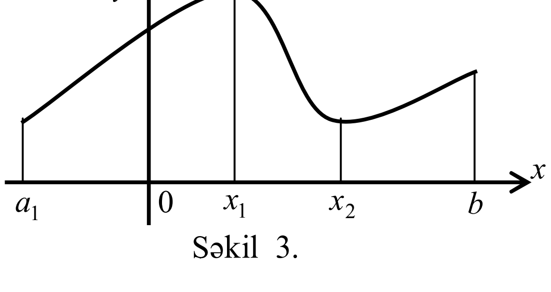
Aşabıdakı şəkildə x_1 nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının ciddi lokal maksimum nöqtəsidir.



Şəkil 2.

6. Fərz edək ki, $y=f(x)$, $x\in X$ funksiyası $(x_0-\delta,x_0]\subset X$ aralığında artır (azalır) və $[x_0,x_0+\delta)\subset X$ aralığında isə azalır (artır), onda x_0 nöqtəsi $y=f(x)$ funksiyasının lokal maksimum (minimum) nöqtəsi olur.

7. Fərz edək ki, $y=f(x)$, $x\in X$ funksiyası verilmişdir. Əgər elə $x_0\in M, M\subset X$ nöqtəsi varsa ki, istənilən $x\in M$ üçün $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$, onda $f(x_0)$ qiyməti M çoxluğunda $y=f(x)$ funksiyasının ən böyük (ən kiçik) qiyməti adlanır. Qrafiki aşağıda verilən funksiyanın $x_1\in[a,b]$ nöqtəsində özünün ən böyük, $x_2\in[a,b]$ nöqtəsində isə ən kiçik qiymətini alır.



Səkil 3.

8. Fərz edək ki, $y = f(x)$, $x \in (a,b)$ funksiyası verilmişdir və $x_0 \in (a,b)$ bu funksiyanın ekstremum nöqtəsidir. Əgər $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandırsa, onda $f'(x_0) = 0$ olar.

9. Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında təyin olunmuşdur. $f(x)$ $x_0 \in (a,b)$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməzdir və həmin ətrafda x_0 nöqtəsini çıxmaqla diferensiallanandır. Əgər x_0 nöqtəsindən solda $f'(x) < 0 \left(f'(x) > 0 \right)$, sağda isə $f'(x) > 0 \left(f'(x) < 0 \right)$ olarsa, onda x_0 nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının minimum (maksimum) nöqtəsidir.

10. Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandır. $f(x)$ funksiyasının (a,b) intervalında aşağıya (yuxarıya) qabarıq olması üçün zəruri və kafi şərt (a,b) intervalında $f'(x)$ törəməsinin azalmayan (artmayan) olmasıdır.

11. Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın tədqiqi və onun qrafikinin qurulmasını aşağıdakı mərhələlərə bölmək olar:

- funksiyanın tə'yin oblastının tapılması;
- funksiyanın ümumi xassələrinin (tək, cüt, dövrü və s.) müəyyən edilməsi;
- funksiyanın işarəsinin sabit olduğu aralıqların tapılması (funksiyanın işarəsinin müsbət (mənfi) olduğu aralıqda onun qrafiki yuxarı (aşağı) yarımmüstəvidə yerləşir);
- funksiyanın törəməsinin işarəsinin sabit olduğu aralıqların tapılması və bunun əsasında funksiyanın monotonluq aralıqlarının və ekstremum nöqtələrinin tapılması;

- funksiya qrafikinin asimptotlarının (şaquli, üfiqi və maili) tapılması.

Misal 1. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$ funksiyasını tədqiq etməli və qrafikini qurmalı.

- tə'yin oblastı: $(-\infty,+\infty)$;
- tək funksiyadır:

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x-2)^2}-\sqrt[3]{(-x+2)^2}=$$

$$=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}=$$

$$=-\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)=-f(x)$$

- şaquli asimptotu yoxdur: $y=0$ düz xətti funksiya qrafikinin üfiqi asimptotudur, çünki

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{\sqrt[3]{(x-2)^4}+\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-8x}{\sqrt[3]{(x-2)^4}+\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt[3]{(x+2)^4}}=0\ ;$$

- dövrü funksiya deyil;
- funksiyanın qrafiki koordinat oxlarını koordinat başlanğıcında kəsir: $f(0)=0$.
- Asanlıqla yoxlamaq olar ki, istənilən $x\in(-\infty,0)$ üçün $f(x)>0$ və istənilən $x\in(0,+\infty)$ üçün $f(x)<0$, ona görə ki,

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}>0,\ \ x\in(-\infty,0)$$

və

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}<0,\ \ x\in(0,+\infty).$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, istənilən $x\in(-\infty,+\infty)$ üçün $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}>0$. Ona görə də istənilən $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ üçün $f'(x)>0$ və istənilən $x\in(-2,+2)$ üçün $f'(x)<0$. Başqa sözlə $f(x)$ $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ çoxluğunda artır, $(-2,+2)$ aralığında isə funksiya azalır. $x=-2$ və $x=2$ nöqtələrində $f(x)$ funksiyasının törəməsi yoxdur, ona görə də funksiyanın ekstremum nöqtələri yoxdur. $f(-2)=\sqrt[3]{(-4)^2}=2\cdot\sqrt[3]{2}$ $f(x)$ funksiyanın ən böyük, $f(2)=-\sqrt[3]{4^2}=-2\cdot\sqrt[3]{2}$ isə həmin funksiyanın ən kiçik qiymətləridir.

- Funksiyanın yuxarıya qabarıq və aşağıya qabarıq olduğu aralıqlarını tapmaq üçün onun ikinci tərtib törəməsini hesablayaq:

$$f''(x)=\frac{2}{3}\left((x-2)^{-\frac{1}{3}}-(x+2)^{-\frac{1}{3}}\right)'=$$

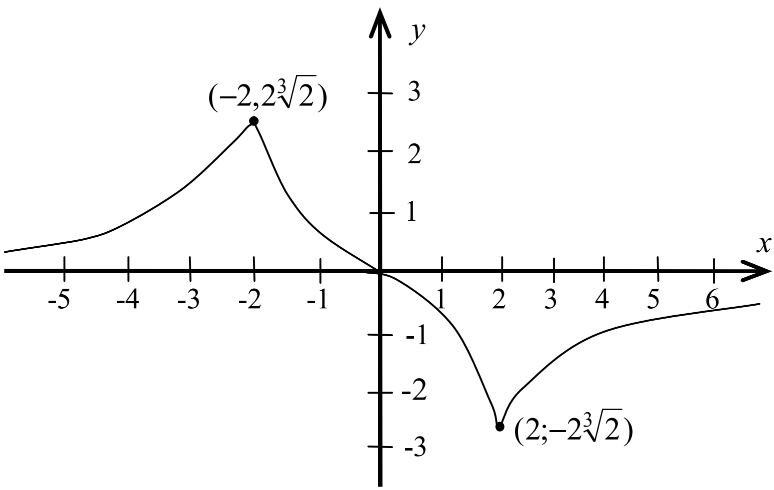
$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{4}{3}}\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\left((x+2)^{-\frac{4}{3}}-(x-2)^{-\frac{4}{3}}\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}-\sqrt[3]{(x+2)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-4)^4}}, x\neq\pm 2$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, istənilən $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ üçün $f''(x)>0$ olur. Deməli, bu çoxluqda funksiya aşağıya qabarıqdır. İstənilən $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ üçün $f''(x)<0$ olduğundan funksiya $(0,2)\cup(2,+\infty)$ çoxluğunda yuxarıya qabarıqdır.

Yuxarıdakılar əsasında funksiyanın qrafikini asanlıqla qurmaq olar.



Şəkil 4.

<u>Misal 2.</u> $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$ funksiyasını tədqiq etməli və qrafikini qurmalı.

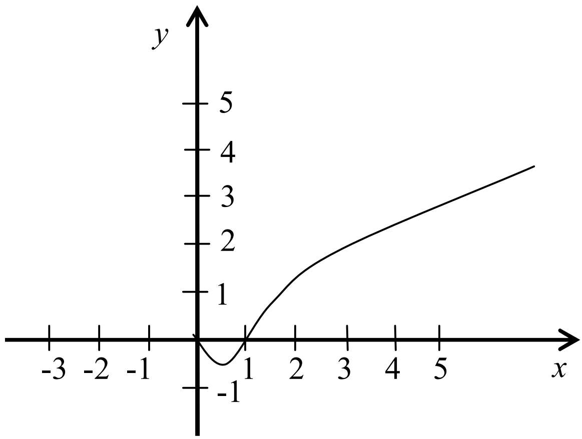
Bu funksiyanın əsas xassələri aşağıdakılardır:

- tə'yin oblastı: $(0,+\infty)$;
- nə tək, nə də cüt funksiyadır;
- dövrü funksiya deyildir;

- $x \in (0,1)$ üçün $f(x) < 0$ və $x \in (1,+\infty)$ üçün $f(x) > 0$ olur; dövrü funksiya deyil;
- funksiyanın qrafiki absis oxunu $(1,0)$ nöqtəsində kəsir; funksiyanın qrafiki ordinat oxunu kəsməyir;
- $f'(x) = \dfrac{(\ln x + 2)}{2\sqrt{x}}$ olduğundan $(0, e^{-2})$ aralığında funksiya azalır, $(e^{-2}, +\infty)$ aralığında isə funksiya artır;
- $x = e^{-2}$ nöqtəsi funksiyanın minimum nöqtəsi, $f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}} \ln e^{-2} = \dfrac{-2}{e}$ isə funksiyanın minimum qiymətidir.
- $f''(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - (\ln x + 2) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$

  olduğundan $(0,1)$ aralığında $f''(x) > 0$, $(1,+\infty)$ aralığında isə $f''(x) < 0$ olur. Deməli, $(0,1)$ aralığında $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ aşağıya qabarıq, $(1,+\infty)$ aralığında isə yuxarıya qabarıqdır.

  Bu funksiyanın qrafiki aşağıda verilir.



Şəkil 5.