

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАКТОРА ЭФФЕКТИВНОСТИ АНТИМУТАГЕНЕЗА У ЖИВОТНЫХ

Бабаев М.Ш., Бахшалиева Н.З., Магerraмова Л.М.

Бакинский Государственный Университет

Ключевые слова: антимутагены, ФЭА, частота мутаций, хромосомные aberrации, мутагены.

Загрязнение биосферы приобретает глобальные масштабы, что приводит к ускорению мутационного процесса и накоплению мутационного груза. За кажущейся безвредностью многих химических веществ скрывается их способность повреждать наследственные структуры. Есть теоретические и экспериментальные предпосылки считать, что индуцированная геномная нестабильность может развиваться в результате действия химических мутагенов. Таким образом, ухудшение экологической обстановки ведет не только к накоплению мутационного груза, но и формированию геномной нестабильности, что в комплексе приводит к росту частоты наследственных, онкологических и других заболеваний человека, а также чревато утратой генофондов и уменьшением биологического разнообразия [1]. Учитывая вклад повреждений ДНК в патологические процессы, необходимо развивать новые подходы не только к решению проблем охраны окружающей среды, но и здравоохранения. Одной из актуальных задач является разработка мер генетической безопасности, к числу которых относится изучение и дальнейшее применение антимутагенов – веществ, способных снижать уровень спонтанных и индуцированных мутаций.

Проведена оценка антимутагенной активности 6 синтетических соединений в клетках костного мозга белых беспородных крыс. Показано, что заключение животных в озонатор индуцирует у них образование структурных аномалий хромосом в метафазах костного мозга.

Во время экспериментов антимутагены применялись прямым путем и после мутагенного воздействия. В случае прямого применения антимутагенов, они вводились животным за 24 часа до мутагенного воздействия в дозе 0,1-0,5 мг/100 гр массы тела, каждому в отдельности пероральным путем. Затем

их помещали в герметическую камеру с озоном на сутки и на следующий день животных убивали в соответствии с правилами гуманной эвтаназии. Во втором случае антимутагены вводились после воздействия озона, в тех же условиях. В обоих случаях, то есть, независимо от вариантов эксперимента проводился анализ частоты хромосомных aberrаций в клетках костного мозга бедренных костей крыс. В качестве контроля в обоих вариантах были использованы интактные животные. Экспериментальные варианты сравнивались как с контролем, так и с показателями анализа животных, подвергшихся воздействию только мутагена [2].

Антимутагенную активность изученных антиоксидантов сравнивали по фактору эффективности антимутагена (ФЭА), рассчитанному по оптимальной концентрации препарата по

формуле: $\text{ФЭА} = \frac{X_1 - X_2}{X_1}$, где, X_1 – частота aberrаций без

модификатора, X_2 – частота aberrаций с модификатором. Чем более ФЭА приближен к 1, тем более эффективным считают действие антимутагена [3]. Также вычисляли достоверность разницы между экспериментальными и контрольными

вариантами, t_d , по формуле: $t_d = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$, t_d – достоверность

разницы; M_1 – % контрольного варианта; M_2 – % варианта опыта; m_1 – отклонение в контрольном варианте и m_2 – отклонение в опытном варианте [4].

Результаты исследования показаны на примере изучения вариантов препарата кобальтовая соль бис-3-(2',4'-дитретьбутилфенокси) пропионовой кислоты. Исследования показали, что доза 0,2 мг/100гр продемонстрировала наибольшую эффективность как при применении до, так и после мутагена. При домутагенном воздействии эта доза антимутагена снижала частоту хромосомных aberrаций в клетках костного мозга бедренных костей у лабораторных млекопитающих от 12,57+ 1,10% до 4,55+0,71%. ФЭА при этом составляет примерно 0,64. По кривым, отражающим особенности генозащитного действия данного антимутагена видно, что его антимутагенные свойства снижаются в зависимости от дозы

(рис.1). Точнее, любое отклонение от показателя наиболее эффективной дозы (0,2 мг/100г массы тела) – в сторону уменьшения или увеличения дозы – приводит к снижению генозащитного действия. Из испытуемых доз высокую активность проявили также дозы 0,4 и 0,3мг/100г.

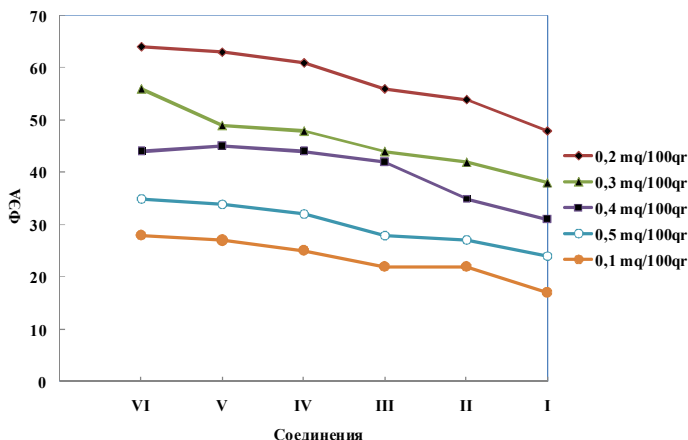


Рис. 1. Показатели эффективности антимутагена антиоксидантов, испытанных в процессе модификации генетических изменений в клетках крыс, подвергшихся воздействию озона. *Примечание:* VI – кобальтовая соль бис-3-(2',4'-дитретьбутилфенокси) пропионовой кислоты; V – Бис-2-Тио-4,6-дитретьбутил фенолят меди; IV – 1-гидрокси-2,6-дитретьбутилбензилмеркаптан; III – 1,1'-дигидрокси-2,2',6,6'-тетратретьбутилбензилдисульфид; II – 1,1'-дигидрокси 4,4'-дитретьбутилдифенилсульфид, I – 1,1'-дигидрокси-2, 2',6,6'-тетратретьбутилдидибензилсульфид

Использование этих доз антиоксиданта кобальтовая соль бис-3-(2',4'-дитретьбутилфенокси) пропионовой кислоты снижало показатели частоты хромосомных aberrаций соответственно до $6,29 \pm 0,83\%$ ($\Phi \text{ЭА} = 0,56$) и $6,84 \pm 0,87\%$ ($\Phi \text{ЭА} = 0,44$). В этом случае, разница между двумя сравниваемыми вариантами была с достоверностью $p < 0,001$. Две другие исследованные дозы

препарата также продемонстрировали антимутагенную эффективность. Однако, достоверность между показателями этих вариантов и вариантов с действием мутагенного фактора в дозе на 0,5 мг/100г массы тела составляла $p < 0,05$. Эффективность антимутагена соответственно составляла 0,35 и 0,28 (см. табл.1).

Варианты опыта	Доза антиоксиданта	Всего изуч. клеток	Аберрации хромосом, %		Td	P	ФЭА
			N	M $\pm$ m			
Контроль	0	813	23	2,83 $\pm$ 0,58	-	-	-
O ₃ (озон)	0	899	113	12,57 $\pm$ 1,10	7,85	-	-
Соед VI+ O ₃	0,1	835	76	9,10 $\pm$ 0,99	2,34	< 0,05	0,28
	0,2	857	39	4,55 $\pm$ 0,71	6,12	<0,001	0,64
	0,3	859	54	6,29 $\pm$ 0,83	4,55	<0,001	0,56
	0,4	848	58	6,84 $\pm$ 0,87	4,09	<0,001	0,44
	0,5	805	66	8,20 $\pm$ 0,97	2,97	< 0,01	0,35

Табл. 1. Ингибирование мутагенного влияния озона при предварительной обработке эмпирически избранными дозами препарата кобальтовая соль бис-3-(2',4'-дитретьбутилфенокси) пропионовой кислоты.

При применении данного соединения после воздействия мутагена соединение во всех испытанных дозах достоверно снижало частоту аберраций хромосом в клетках костного мозга. Как и в случае применения до мутагенного воздействия, наибольшую эффективность проявляла доза 0,2 мг/100г массы тела. В этой дозе частота хромосомных аберраций понижалась от 12,57 $\pm$ 1,10% до 5,0 $\pm$ 0,75% (ФЭА=0,60). В случае применения дозы 0,3 мг/100г массы тела частота мутаций снижалась до 6,95 $\pm$ 0,84% (ФЭА=0,48). В обоих случаях разница между сравниваемыми вариантами достоверна с точностью $p < 0,001$. Следующая испытанная доза – 0,4 мг/100г массы тела модифицировала частоту генетических изменений с достоверностью $p < 0,01$. То есть эта доза нейтрализовала частоту хромосомных аберраций в клетках костного мозга крыс до 7,49 $\pm$ 0,88% (ФЭА=0,40). Доза 0,1мг/100г соединения кобальтовая соль бис-3-(2',4'-дитретьбутилфенокси) пропионовой кислоты снижала частоту хромосомных аберраций до 9,84 $\pm$ 1,01% (ФЭА=0,26), а доза 0,5 мг/100г до 8,73 $\pm$ 0,96% (ФЭА=0,30).

Выводы

1. Показана активность соединения кобальтовая соль 3-бис-(2',4'-дитретибутилфеноксид) пропионовой кислоты при его применении как до так и после мутагенного воздействия озона.
2. При математическом вычислении полученных нами результатов установлено, что ФЭА испытанных антиоксидантов оказалось намного выше показателей эффективности антимутагенеза изученных ранее соединений.

Литература

1. Кужир Т.Д. Антимутагены и химический мутагенез в системах высших эукариот. -Минск: Технология, 1999.-267с.
2. Бахшалиева Н.З. Защитный эффект антиоксидантов в зависимости от сроков хранения в озоновой среде растений и животных. Монография. Изд. Университета Хазар, 2014.- 164с.
3. Алекперов У.К., Антимутагенез. Теоритические и практические аспекты. – Москва, Наука, 1984. – 105с.
4. Лакин Г.Ф. Биометрия . Учебное пособие для биол. спец. вузов, 4-е изд., перераб. и доп.- М.:Высш. школа, 1990. 352 с.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕНЕТИЧЕСКОГО СКРИНИНГА ГИПОТИРЕОЗА СРЕДИ НОВОРОЖДЕННЫХ

Бабаев М.Ш., Мамедова Р.Ф.

Бакинский Государственный Университет

Ключевые слова: математическое моделирование, генетический скрининг, гипотиреоз, тиреотропный гормон, массовое обследование, новорожденные, уравнение регрессии, критерий Стьюдента, статистический анализ,

Математическое моделирование биомедицинских процессов является в настоящее время одним из самых актуальных направлений в научных исследованиях. Современная биомедицина представляет собой экспериментальную науку с огромным эмпирическим опытом воздействия на ход болезней различными средствами. Наиболее эффективным аппа-

ратом экспериментального исследования является математическое моделирование. Для математического описания биомедицинских процессов используются системы линейных уравнений, которые могут быть использованы для прогнозирования процессов. При математическом моделировании обработки экспериментальных данных, возникает вопрос о точности, достоверности результатов анализов, вытекающих из математических уравнений, которые разрешаются с помощью элементов теории вероятностей (критерии Стьюдента, Кохрена, Фишера).

На основании данных массовых обследований, получены результаты генетического скрининга гипотиреоза среди новорожденных, представленные в таблице 1:

Таблица 1. Результаты генетического скрининга гипотиреоза среди новорожденных

уровни тиреотропного гормона (мЕд/л)							
	0-1,0	1,0-1,5	1,5-2,0	2,0-2,5	2,5-3,0	3,0-3,5	и выше
Количество новорожденных	32	88	85	37	14	5	6
Число %	11,985	32,959	31,835	13,857	5,243	1,873	2,247

Принимая за X_1 количество новорожденных, за X_2 численный процент, деленный на 100 – составим таблицу зависимости показателей функционирования процесса. $Y_{\text{экс}}$ вычисляем, как среднее арифметическое из экспериментальных показателей, приведенных в рабочей тетради.

Таблица 2. Зависимость показателей функционирования процесса.

X_1	X_2	$X_1 X_2$	X_1^2	X_2^2	$Y_{\text{экс}}$
32	0.11985	3.8352	1024	0.014364	0.872
88	0.32959	29.0040	7744	0.108690	1.254
85	0.31835	27.0597	7225	0.101346	1.786
37	0.13857	5.1271	1369	0.01920	2.397
14	0.05243	0.7340	196	0.00275	3.478
5	0.01873	0.09365	25	0.00035	4.260
6	0.02247	0.13482	36	0.000505	6.31

На основании экспериментальных данных была решена задача статистического исследования зависимостей показателей, характеризующая функционирование процесса. Выбранные для эксперимента уровни фактора, выражаются в кодированных величинах и соответствуют +1 и -1. На основе проведенных опытов были установлены уровни варьирования тиреотропного гормона в сыворотке крови новорожденных г.Баку. Основными факторами явились: количество новорожденных, их процентное содержание и уровень тиреотропного гормона (мкЕ\л). Эти факторы были закодированы путем линейного преобразования координат факторного пространства и выбором масштабов по осям в единицах интервалов варьирования. При этом используется соотношение:

$$X_i = \frac{c_i - c_{i0}}{\Delta c} \quad \text{где } x_i - \text{кодированное значение фактора.}$$

Для построения регрессионной модели был использован программный модуль BoxBenkinD, программа Matlab-6.5, описывающая экспериментальные отклики. Полный факторный эксперимент (ПФЭ) представляем в следующем виде: ПФЭ – $2^3 (Y_i \pm \Delta Y_i) = \bar{Y}_i \pm 1.2$, при $p = 0.95$, $f = 2$, $s^2 = 0.5$

Расположение экспериментальных точек для полного факторного эксперимента представлены на рис. 1

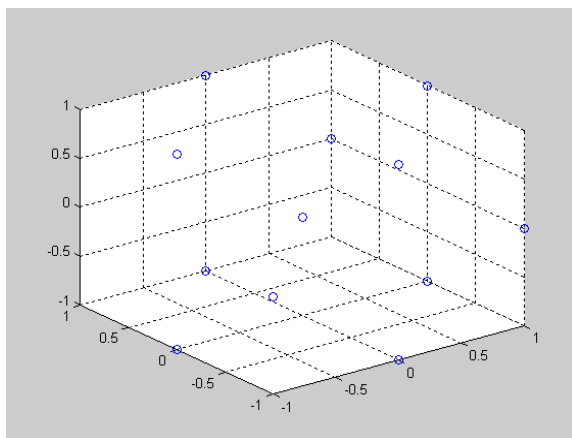


Рис. 1 План Бокса-Бенкина

Программа обеспечивает построение расчетной матрицы, расчет коэффициентов двухфакторной модели и проведение регрессионного анализа с проверкой адекватности модели (по критерию Фишера), а также вычисление невязки между данными эксперимента и полученными при использовании модели результатами.

Современные компьютерные средства представляют большую возможность обработки информации и выбора вида уравнения регрессии экспериментальным методом, например, путем сравнения величины остаточной дисперсии ($s_{ост}^2$), рассчитанной для различных моделей.

Зависимость целевого значения от факторов принята в виде линейной регрессии:

$$Y = b(1) + b(2) \cdot x_1 + b(3) \cdot x_2 + b(4) \cdot x_1 \cdot x_2 + b(5) \cdot (x_1 \cdot x_2)^{2/3} + b(6) \cdot (x_2 \cdot x_1)^{2/3}; \quad (1)$$

Исходя из значений Y и независимых переменных X_i определяют коэффициенты регрессии $b(i)$ и среднее отклонение $\delta(b_i)$.

Таблица 3. Матрица планирования и результаты экспериментов

	X1	X2	Y _{экс.}
Нижний уровень	5,0	0.02	0.872
Верхний уровень	88,0	0.33	6.31
Базовый уровень	40,3	0.17	3.591
Интервал варьирования	0,725	0.05	0.5

Коэффициенты b_i определяли по формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^n X_{ij} Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

где X_{ij} - нормированное значение i -го фактора в плановой матрице.

Для получения оценок b_k коэффициентов регрессионной модели минимизируется сумма квадратов ошибок регрессии:

$$\sum_i (y_i - b_1 - b_2 x_1 - b_2 x_2 - \dots - b_4 x_2^2)^2 \rightarrow \min$$

Решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений относительно b_k . О качестве полученного уравнения

регрессии можно судить, исследовав $\varepsilon_i = \overline{y_i} - y_i$ - оценку случайных ошибок опыта. Оценка дисперсии проводится по формуле:

$$S^2 = (\sum (Y_i - \overline{Y})^2) / (N - P - 1)$$

Величина S называется стандартной ошибкой регрессии. Чем меньше величина S , тем лучше уравнение регрессии описывает независимую переменную Y .

Для определения коэффициентов уравнения была использована программа S-plus 2000 professional, разработанная компанией Mathworks для автоматизированной математической обработки экспериментально полученных данных, т.е. для *статистического анализа данных*, расчета коэффициентов регрессии и коэффициентов парной корреляции для указанных выборок. В таблице 4 представлены экспериментальные и расчетные значения выходных параметров и ошибка опыта:

Таблица 4.

$Y_{\text{экс}}$	$Y_{\text{рас}}$	$ Y_{\text{экс}} - Y_{\text{рас}} $
0.872	0.921	0.049
1.254	1.429	0.175
1.786	1.885	0.099
2.397	2.772	0.375
3.478	3.963	0.485
4.260	4.637	0.377
6.310	6.425	0.115

$Y_{\text{рас}}$ вычисляем по формуле (1), подставляя значения коэффициентов и другие известные параметры. Также вычисляем разницу экспериментальных и расчетных данных.

На рис. 2 показан график поверхности функции отклика $yg(x_1, x_2)$ от входных кодированных параметров в пространстве.

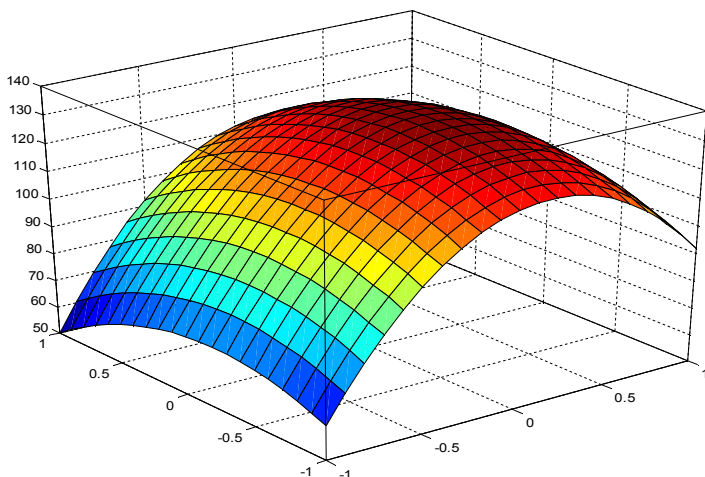


Рис. 2. График поверхности функции отклика $y_r(x_1, x_2)$ от входных кодированных параметров в пространстве .

Вычислив коэффициенты регрессии, был произведен статистический анализ уравнения регрессии, который состоял из следующих этапов:

1. оценка дисперсии воспроизводимости; 2. оценка значимости коэффициентов регрессии; 3. проверка адекватности модели. Дисперсию воспроизводимости определяли по трем дополнительным опытам в центре плана:

$$Y_1^0 = 9,2 ; \quad Y_1^1 = 9,5 ; \quad Y_1^2 = 9,8 \quad S_{\text{амид}}^2 = 0,36$$

Число степеней свободы дисперсии воспроизводимости $f = 2$. Оценку значимости коэффициентов регрессии проверяли по критерию Стьюдента:

$$t_i = \frac{b_i}{s(b_i)}$$

где b_i – коэффициенты уравнения регрессии; $s(b_i)$ – среднеквадратичное отклонение коэффициентов. Табулированное значение Стьюдента для уровня значимости $p=0,05$ и числа степеней свободы $f = 2$ равна $t_p(f)=4,3$. Оценив значимость коэффициентов, для которых t - отношение, меньшее табулированного, были получены коэффициенты регрессии, представленные в таблице 5.

Таблица 5.

b(1)	b(2)	b(3)	b(4)	b(5)	b(6)
12.7101	1.7545	-0.7597	0.4352	-3.0642	0.8057

$$Y = 92,18 + 16,1167 \cdot X_1 - 4,6802 \cdot X_2 + 1,55501 \cdot X_1 \cdot X_2 - 44,0027 \cdot X_1^2 - 15,0787 \cdot X_2^2 \quad (2)$$

где (2) - кодированное уравнение регрессии.

После перехода от кодированных значений параметров к естественным, уравнение регрессии примет вид:

$$Y_{\text{рас.}} = 80,12 - 496,06 \cdot X_1 + 1317,658 \cdot X_2 + 1978,9 \cdot X_1 \cdot X_2 - 377,0214 \cdot X_1^2 - 2595,79 \cdot X_2^2 \quad (3)$$

Полученная математическая модель может быть использована для прогнозирования генетического скрининга гипотиреоза среди новорожденных.

Литература

1. Медик В.А., Токмачёв М.С. Математическая статистика в медицине: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 800 с.
2. Медик В.А., Токмачёв М.. Руководство по статистике здоровья и здравоохранения. – М.: Медицина, 2006. – 528 с
3. Рязанцев П.П. Основы программного обеспечения для статистического анализа комплексного медицинского обследования населения // Роль медицинской науки и здравоохранения в реализации демографической политики государства. – Сб. научных тр. ННЦ СЗО РАМН, Т. 7, 2007. – С. 211 – 214

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бабаева С.Ф.

*Институт систем управления НАН Азербайджана,
Бакинский Государственный Университет
seva_babaeva@mail.ru*

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – положительно-определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$. Обозначим через H_γ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A , т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in D(A^\gamma)$, $\gamma \geq 0$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$. Обозначим через $L_2(R_+; H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$, определенных почти всюду в интервале $R_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера, с нормой $\|f\|_{L_2(R_+; H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$, а через $L(X, Y)$ пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахово пространства X в банахово пространство Y . Далее введем гильбертово пространство [1]:

$$W_2^3(R_+; H) = \{u : u''' \in L_2(R_+; H), A^3 u \in L_2(R_+; H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(R_+; H)} = \left(\|u'''\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим в H следующую краевую задачу

$$u'''(t) + A^3 u(t) + \sum_{j=0}^3 A_{3-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in R_+, \quad (1)$$

$$u''(0) = Ku, \quad (2)$$

где $f(t)$, $u(t)$ функции со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A – положительно-определенный самосопряженный оператор;

2) $K \in L(W_2^3(R_+; H), H_{1/2})$, причем $\chi = \|K\|_{W_2^3(R_+; H) \rightarrow H_{1/2}}$;

3) $B_j = A_j A^{-j}$, $j = \overline{0, 3}$, ограниченные операторы в H .

Определение 1. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+; H)$ существует функция $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+ , то ее будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+; H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u''(t) - K u\|_{1/2} = 0$$

и имеет место оценка $\|u\|_{W_2^3(R_+; H)} \leq \text{const} \|t\|_{L_2(R_+; H)}$, то задача (1), (2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе мы укажем достаточные условия на коэффициенты краевой задачи (1), (2), которые обеспечивают регулярную разрешимость этой задачи. Аналогичные условия найдены в работах [2,5]. Имеет место

Теорема. Пусть выполняются условия 1) – 3), причем $\chi < 1$ и имеет место неравенство

$$q(\chi) = \sum_{j=0}^3 c_j(\chi) \|B_{3-j}\| < 1,$$

Где $c_0(\chi) = c_1(\chi) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\chi}{1-\chi}$, $c_2(\chi) = 2^{1/3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\chi}{1-\chi}$,

$$c_3(\chi) = 2^{1/3} \cdot 3^{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\chi}{1-\chi}.$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Литература

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Д. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М. Мир, 1971, 371 с.
2. Aliev A.R., Babayeva S.F. On the boundary value problem with the operator on boundary conditions for the operator-differential equation of the third order // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry, 2010, V. 6, N 4, pp. 347-361.

3. Mirzoyev S.S., Babayeva S.F. Theory of Solvability of Boundary Value Problems for Third Order Operator-Differential Equations. Journal for Theory and Applications. Applied Mathematical Sciences. Vol.7 no.141-144, 2013.
4. Бабаева С.Ф. Об одной краевой задаче с оператором в краевом условии для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка. Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2014, № 1, с. 58-63.
5. Мирзоев С.С., Бабаева С.Ф. Об одной краевой задаче в гильбертовом пространстве для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка. Известия Педагог. Универс.. Серия естественных наук, Баку, 2014, № 3, с.3-8.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Багирова С.М.

Ганджинский Государственный Университет

bagirovasevindj@rambler.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^4 u}{dt^4} + A^4 u + \sum_{j=0}^3 A_{4-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(0) = Tu, \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

где $f(t)$, $u(t)$ вектор функции, определенные в $R_+ = (0, \infty)$ почти всюду со значениями в H . Производные понимаются в смысле теории обобщенных функций в абстрактных гильбертовых пространствах, а операторные коэффициенты задачи (1), (2) удовлетворяют условиям:

- 1) A -положительно определенный самосопряженный оператор;
- 2) Операторы A_j ($j = \overline{1, 4}$) линейные, причем $B_j = A_j A^{-j}$ вполне непрерывные операторы в H ;
- 3) Оператор T есть ограниченный оператор действующий

из пространства $W_2^4(R_+, H)$ в $H_{7/2}$.

Здесь $H_{7/2} = D(A^{7/2})$ с нормой $\|x\|_{7/2} = \|A^{7/2}x\|$, а $W_2^4(R_+ : H) = \left\{ u : A^4 u \in L_2(R_+ : H), \frac{d^4 u}{dt^4} \in L_2(R_+ : H) \right\}$ есть гильбертово пространство с нормой [1].

$$\|u\|_{W_2^4(R_+ : H)} = \left(\|A^4 u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \left\| \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \right)^{1/2}.$$

А $L_2(R_+ : H)$ есть гильбертово пространство вектор – функций $f(t)$ для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+ : H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Вводим подпространство $\overset{\circ}{W}_{2,T}^4(R_+ : H)$ пространства $W_2^4(R_+ : H)$:

$$\overset{\circ}{W}_{2,T}^4(R_+ : H) = \left\{ u : u \in W_2^4(R_+ : H), u(0) = Tu, u'(0) = 0 \right\}$$

и определим следующие операторы, связанные с задачей (1), (2):

$$P_0 u = \frac{d^4 u}{dt^4} + A^4 u, \quad u \in \overset{\circ}{W}_{2,T}^4(R_+ : H)$$

и

$$P_0 u = \frac{d^4 u}{dt^4} + A^4 u + \sum_{j=0}^4 A_{4-j} u^{(j)}, \quad u \in \overset{\circ}{W}_{2,T}^4(R_+ : H).$$

Имеет место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (1) и (3) причем

$$\|T\|_{W_2^4(R_+ : H) \rightarrow H_{7/2}} = x, \quad 0 \leq x < \frac{2^{1/4}}{3^{1/2}}. \quad \text{Тогда оператор } P_0 \text{ изоморфно}$$

отображает пространство $\overset{\circ}{W}_{2,T}^4(R_+ : H)$ на пространство $L_2(R_+ : H)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, причем A^{-1} - вполне непрерывный оператор и условия (2). Если резольвента операторного пучка $P(\lambda)$ существует на мнимой P оси и имеет место оценки

$$\|A^4 P^{-1}(\lambda)\| + \|\lambda^4 P^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const}, \quad \lambda \in (-i\infty, i\infty),$$

то оператор P есть нётеревый из пространства $\overset{\circ}{W}_{2,T}^4(R_+ : H)$ в $L_2(R_+ : H)$.

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М. Мир. 1971, 371с.
2. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве*. М. Наука, 1983, 78с.

ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ Байрамова Р.М., Тагиев М.М.

Проблема увеличения нефтегазоотдачи отдачи пластов и их транспортировки в магистральных трубопроводах, ставит ряд задач, решение которых связано с оптимальной организацией процессов воздействия на пласт и трубу, а также и управлением ими в условиях энергетического дефицита.

В данной работе рассматривается задача о течении газа в трубе. Газ движется при постоянной температуре по прямолинейной трубке постоянного сечения. Пренебрегая силой тяжести, удовлетворяет скорость v , считая, что она во всех точках одинакова и поперечного сечения в момент t одинакова и направлена вдоль трубки.

Направив ось Ox вдоль трубки и фиксировав начало координат. Выпишем систему уравнений, считая, что силой тяжести отсутствуют:

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

и уравнение состояния, выражающее закон Бойля-Мариотта,

$$P = k\rho, \quad (3)$$

Задача сводится к составлению одного уравнения, содержащего только ϑ .

Ясно, что давление p , плотность ρ и скорость ϑ есть функция только x и t .

$$P = P(x, t), \quad \rho = \rho(x, t), \quad v = v(x, t), \quad (4)$$

Дифференцируя по t уравнение Эйлера, имеем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (5)$$

По условия задача $P = k\rho$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = k \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) получает следующие вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{k}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (7)$$

С другой стороны, уравнение неразрывности дает:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и выполняя в правой части дифференцирование, находим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial t} \right) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kv}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (9)$$

Вследствие уравнения состояния Эйлера будем иметь:

$$\frac{kv}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{v}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -v \frac{\partial v}{\partial t} - v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), находим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial t} \right) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

или
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial t} \right) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Итак, приходим к искомому уравнению после переноса двух последних слагаемых в левую часть:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v \frac{\partial v}{\partial t} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Литература

1. С.В.Валландер «Лекций по гидроаэромеханике» Изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1978.
2. Л.Прандтль Гидроаэромеханике-Ижевск: Ниц «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 576с.

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Балакишиев Б.Б.

Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе рассматривается смешанная краевая задача для линейного эллиптического уравнения, нелокальное условие которой связано со значениями на линии, проходящей через точку смены типа граничных условий. Учитывая особенность производных точного решения, начиная с первого порядка, оценивается погрешность метода сеток.

Пусть область D - прямоугольник

$$D = \{(x_1, x_2), 0 < x_i < l_i, i = 1, 2\},$$

с границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$, где

$$\Gamma_1 = \{(x_1, 0), 0 \leq x_1 < l_1\} \cup \{(0, x_2), 0 \leq x_2 \leq l_2\} \cup \{(x_1, l_2), 0 < x_1 < l_1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(l_1, x_2), 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \Gamma_3 = \{(x_1, 0), 0 \leq x_1 < l_1\}, 0 < l < l_1.$$

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\left. \begin{aligned} L_u &\equiv \Delta u + au_{x_1} + bu_{x_2} - cu = f \text{ в } D, \\ u &= \psi_1 \text{ на } \Gamma_1, \\ lu &\equiv u(z) + \alpha(z)u(l, x_2) = \psi_2 \text{ на } \Gamma_2, \\ \Lambda u &\equiv \partial u / \partial n = \psi_3 \text{ на } \Gamma_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\psi_i, i=1,2,3, a, b, c, f, \alpha$ - заданные функции от x_1, x_2 :

$z = (l_1, x_2), |a|, |b| \leq M < \infty, c \geq 0, |\alpha(z)| \leq 1; \partial / \partial n$ - означает внутреннюю нормальную производную.

Из [1] следует, что для производных точного решения задачи (1) вблизи точки $(l, 0)$ справедлива оценка:

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} = O(r^{-m+\frac{1}{2}} + 1), 0 < r \leq r_1 < r^0,$$

где $r = \sqrt{(x_1 - l)^2 + x_2^2}, r^0 = \min\{l, l_1 - l_2, l_2\}$.

Построим разностные аналоги задачи (1).

I случай. Вводим в D квадратную сетку с шагом $h = l_i / N_i, N_i$ - целые, $i = 1, 2$.

$$D_h = \{(x_{1j}, x_{2k}), x_{ij} = jh, i = 1, 2, j = \overline{0, N_i}\}$$

и следующие разностные операторы:

$$\begin{aligned} L_h y_{ij} &\equiv \frac{1}{h^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} + y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 4y_{ij}) + \frac{a_{ij}^-}{h} (y_{ij} - y_{i-1,j}) + \\ &+ \frac{a_{ij}^+}{h} (y_{i+1,j} - y_{ij}) + \frac{b_{ij}^-}{h} (y_{ij} - y_{i,j-1}) + \frac{b_{ij}^+}{h} (y_{i,j+1} - y_{ij}) + c_{ij} y_{ij}, \end{aligned}$$

$$l_h y_{N_1,j} \equiv y_{N_1,j} + \alpha(l_1, x_{2j}) \left[y_{kj} + \frac{l - x_{1k}}{h} (y_{k+1,j} - y_{kj}) \right],$$

$$\Lambda_h y_{i0} \equiv \frac{1}{h} (y_{i1} - y_{i0}),$$

где $a_{ij}^+ = \frac{a_{ij} + |a_{ij}|}{2}, b_{ij}^+ = \frac{b_{ij} + |b_{ij}|}{2}, x_{1k} \leq l < x_{1,k+1}$.

Через Γ_{ih} обозначим множество узлов на $\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$ и

$$D_h = \overline{D_h} \setminus \Gamma_h, \quad \Gamma_h = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_{ih}.$$

Сформулируем дискретный аналог задачи (1):

$$\left. \begin{aligned} L_h y &= f \text{ в } D_h, \\ y &= \psi_1 \text{ на } \Gamma_{1h}, \\ l_h y &= \psi_2 \text{ на } \Gamma_{2h}, \\ \Lambda_h y &= \psi_3 \text{ на } \Gamma_{3h}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Введем полярные координаты в окрестности $r \leq r_1$ особой точки $(l, 0)$. Пусть $\theta(r, \varphi)$ такой угол, что

$$\operatorname{tg} \theta(r, \varphi) = \frac{b(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{a(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}$$

и в окрестности $r \leq r_1$ выполняется неравенство

$$0 \leq \theta(r, \varphi) - \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Рассматривается мажорантная функция:

$$g(x, y) = r^{-\chi} (A \cos \chi \varphi - \sin \chi \varphi - 1),$$

где $0 \leq \chi \leq \frac{1}{2}$ и A достаточно большое положительное число.

Используя $g(x, y)$ разрешимость дискретной задачи (2) следует из принципа максимума (см. [1]).

Следуя работе [2], доказывается следующая :

Теорема 1. Пусть функции $a, b, c, f, \psi_i, i = 1, 2, 3$ ещё удовлетворяют таким условиям, что решение $u(x_1, x_2) \in C^3(\overline{D}^*)$, где $\overline{D}^* = \overline{D} \setminus \{0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Тогда для погрешности $\delta = y - u$ справедлива оценка

$$|\delta(P)| \leq K_1 h^\nu + K_2 h^\nu r^{-\nu} + K_3 h,$$

где u и y - точные решения задач (1) и (2) соответственно; $K_i, i = 1, 2, 3$ - положительные постоянные не зависящие от h ; $0 < \nu \leq 1/2$, r - расстояние от узловой точки P до особой точки $(l, 0)$.

II случай. Пусть $h = \frac{l_1 - l}{N_1} = \frac{l_2}{N_2}$. Построим сеточную область с помощью линий

$$x_{1i} = l_1 - ih, x_{2j} = jh, i = 0, 1, \dots, N_1, N_1 + 1, \dots, N_1^*,$$

$j = 0, 1, \dots, N_2$. N_1^* -такое положительное целое число, что $0 \leq l_1 - N_1^* = \delta < h$.

Определим

$$D_h = \{(x_{1i}, x_{2j}): (x_{1i} \pm h, x_{2i} \pm h) \in \overline{D}\}, \Gamma_\delta = \{x_1 = \sigma, 0 \leq x_2 < l_2\},$$

$$\Gamma_{\sigma h} = \{(x_{1i}, x_{2j}): (x_{1i}, x_{2j}) \in \Gamma_\delta\}$$

причем $Mh < 2\tau$, где $0 < \tau < 1$ некоторое фиксированное число. Аппроксимируем уравнение и краевые условия задачи (1) вторым порядком точности, для чего воспользуемся следующими разностными операторами:

$$L_h y_{ij} \equiv \frac{1}{h^2} (y_{i-1,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 4y_{ij}) + \frac{a_{ij}}{2h} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) +$$

$$+ \frac{b_{ij}}{2h} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - c_{ij} y_{ij},$$

$$l_h y_{N_1,j} \equiv y_{0j} + \alpha(l_1, x_{2j}) y_{N_1,j},$$

$$\Lambda_h y_{i0} \equiv \left[\frac{1}{2h} (2 + b_{i0}h) y_{i,1} + \left(1 + \frac{a_{i0}h}{2} \right) y_{i+1,0} + \left(1 - \frac{a_{i0}h}{2} \right) y_{i-1,0} - \right.$$

$$\left. - (4 + b_{i0}h + c_{i0}h^2) y_{i0} \right]$$

$$K_h y_{N_1^*,j} \equiv y_{N_1^*,j} \left(1 + \frac{\sigma}{h} \right) - \frac{\sigma}{h} y_{N_1-1,j}$$

Сформулируем дискретный аналог задачи (1):

$$\left. \begin{aligned} L_h y &= f \text{ в } D_h, \\ y &= \psi_1 \text{ на } \Gamma_{1h}, \\ l_h y &= \psi_2 \text{ на } \Gamma_{2h}, \\ \Lambda_h y &= \overline{\psi}_3 \text{ на } \Gamma_{3h} \\ K_h y &= \overline{\psi}_1 \text{ на } \Gamma_{\sigma h}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\overline{\psi}_3 = \psi_3 + \frac{h}{2} f$, $\overline{\psi}_1 = \psi_1(0, jh)$, $j = 0, N_2 - 1$.

Теорема 2. Пусть функции $a, b, c, f, \psi_i, i = 1, 2, 3$ ещё удовлетворяют таким условиям, что решение $u(x_1, x_2) \in C^4(\overline{D}^*)$. Тогда

справедлива оценка $|\delta(P)| \leq K_1 h^{2\nu} r^{-\nu} + K_2 h^2$,

где $\delta = u - u_i$; u_i и u -точные решения задач (1) и (3) соответственно.

Литература

1. Балакишиев Б.Б., Досиев А.А. К численному решению смешанной краевой задачи для эллиптических уравнений. Сб. Приближенные методы операторных уравнений, Баку, 1984, стр.17-28.
2. Балакишиев Б.Б. О повышении точности метода сеток для решения нелокальных краевых задач при наличии особенностей. Теоретическая и прикладная механика. №3-4, 2011, Баку, стр.93-96.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РЯДА.

Галандарова Ш.М., Мегралиев Я.Т.

yashar_aze@mail.ru

***Азербайдж. Госуд. Экономический Университет
Бакинский Государственный Университет***

Одним из направлений современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, бурно развивающимся в последнее время, является теория нелокальных задач. Их исследование вызвано не только теоретическими интересами, но и практической необходимостью.

Нелокальным задачам с интегральными условиями последние годы уделяется пристальное внимание. Краевые задачи с такими условиями встречаются во многих приложениях. К нелокальным задачам с интегральными условиями приходят при изучении явлений, происходящих в плазме [1], распространения тепла [2], процессов влагопереноса в простых средах [3], в задачах математической биологии при описании динамики численности популяции особой [4], в задачах .

Нелокальные задачи с интегральными условиями ставились и изучались для различных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

и поставим для него в области $D_T = \{(x,t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ краевую задачу условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (3)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где $a(t), f(x,t), \varphi(x), h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ - искомая функция.

Условие (3) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы.

Введем понятие классического решения.

Определение. Под классическим решением краевой задачи (1)-(4) будем понимать функцию $u(x,t)$, если $u(x,t) \in C^2(D_T)$ и выполняются соотношения (1)-(4) в обычном смысле.

Справедлива следующие.

Лемма. Пусть

$$f(x,t) \in C(D_T), a(t) \in C[0,T], K(0) = K'(T) = 0,$$

$$K(T) \neq 0, K''(t) - a(t)K(t) = 0, (0 \leq t \leq T).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функции $u(x,t) \in C^2(D_T)$ удовлетворяющих уравнения (1), условиям (2), (3) и

$$u_t(x,T) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (5)$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{K(t)} \left[\int_0^T f(x,t)dt - K'(0)\varphi(x) \right].$$

Доказательство: Пусть $u(x,t)$ - решение задачи (1) -(4).

Умножим равенство (1) на $K(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T . Получим

$$\begin{aligned}
& K(T)u_t(x, T) - K(0)u_t(x, 0) - K'(T)u(x, T) + K'(0)u(x, 0) + \\
& + \int_0^T K''(t)u(x, t)dx - \int_0^T K(t)u_{xx}(x, t)dx = \\
& = \int_0^T K(t)a(t)u(x, t)dx + \int_0^T K(t)f(x, t)dx \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (6)
\end{aligned}$$

Так как ядро интегрального слагаемого $K(t)$ не зависит от x , то

$$\int_0^T K(t)u_{xx}(x, t)dx = \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^T K(t)u(x, t)dx \right). \quad (7)$$

В силу (2), (3), (7) и при условиях леммы из (6) приходим к выполнению (5).

Теперь предположим, что $u(x, t)$ является решением задачи (1), (2), (4), (5). Интегрируя по t от 0 до T равенство (1), умноженное предварительно на $K(t)$, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& K(T)u_t(x, T) + K'(0)u(x, 0) - \int_0^T K(t)u_{xx}(x, t)dx + \\
& + \int_0^T (K''(t) - a(t)K(t))u(x, t)dx = \int_0^T K(t)f(x, t)dx \quad (0 \leq x \leq 1).
\end{aligned}$$

В силу (5) получаем

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^T K(t)u(x, t)dx \right) = 0.$$

Так как $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$, то получаем граничные условия

$$\int_0^T K(t)u(0, t)dt = 0, \quad \int_0^T K(t)u_x(1, t)dt = 0.$$

Единственное решение этой краевой задачи есть

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = 0$$

Что и означает выполнение условия (4). Лемма доказана

Предположим, что данные задачи (1), (2), (4), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^1[0,1]$, $\psi''(x) \in L_2(0,1)$, $\psi(0) = \psi'(1) = 0$.
3. $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$,
 $f(0,t) = f'_x(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$.
4. $a(t), K(t) \in C[0,T]$, $K(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$.

Аналогично [5] можно доказать следующую теорему

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-4. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1),(2),(4),(5) имеет единственное решение.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и выполнены условия согласования

$$K(0) = K'(T) = 0, K(T) \neq 0,$$

$$K''(t) - a(t)K(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Диф-ференциальные уравнения- 1980- т.16-№ 11.-с. 1925–1935
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения- 1977, т. 13. №2.- с. 294-304.
3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Нальчик: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральным условием // Вестник Удмуртского Университета. Математика. механика. компьютерные науки.-1912. вып.1.- с.32-40.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВА

Гамидов Э.Г.

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве краевую задачу

$$-u''(t) + A^2u(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t), \quad t \in R_+ = (0, \infty) \quad (1)$$

$$u'(0) = 0, \quad (2)$$

где $u(t)$, $f(t)$ – функции определенные в $R_+ = (0, \infty)$ почти всюду, со значениями в H , производные понимаются в смысле теории распределений [1], а операторные коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию:

1) A – нормальный оператор с ограниченным обратным, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < \pi/2\}$$

2) Операторы $A_j \in L(H_j, H) \cap L(H_{j+1}, H_1)$, $j = 1, 2$.

Здесь $L(X, Y)$ есть пространство ограниченных операторов действующих из пространство X в пространство Y , а пространство $H_\gamma = D(C^\gamma)$, $\gamma \geq 0$ ($H_0 = H$), с нормой $\|x\|_\gamma = \|C^\gamma x\|$, где оператор C есть положительно определенный самосопряженный оператор из представления оператора $A = UC$, а U унитарный оператор.

Пусть $L_2(R_+; H)$ есть гильбертово пространство всех функций $f(t)$ определенных в R_+ почти всюду, измеримые, со значениями в H , для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+; H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Следуя монографию [1] введем следующие гильбертово пространство

$W_2^m(R_+; H) = \{u : u^{(m)} \in L_2(R_+; H), \quad C^{(m)}u \in L_2(R_+; H)\}$, $m = 1, 2, 3$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^m(R_+; H)} = \left(\|u^{(m)}\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|C^m u\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right)^{1/2}.$$

В связи исследованием задачи (1), (2) рассмотрим гильбертово пространство

$$\overset{\circ}{W}_2^3(R_+; H) = \{u : u \in W_2^3(R_+; H), u'(0) = 0\}.$$

Определение 1. Если при $f(t) \in W_2^1(R; H)$, существует $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в R_+ тождественно, краевое условие (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u'(t)\|_{3/2} = 0$$

и оценку

$$\|u\|_{W_2^3(R_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{W_2^1(R_+; H)},$$

то будем говорить, что задача (1), (2) корректно разрешима в

$$W_2^1(R_+; H).$$

Обозначим через $P_0 u = -u'' + A^2 u$, $P_1 u = A_1 u' + A_2 u$, $u \in \overset{\circ}{W}_2^3(R_+; H)$

Теорема 1. Пусть выполняется условия 1. Тогда при $u \in \overset{\circ}{W}_2^3(R_+; H)$ имеет место неравенства

$$\|A^{2-j} u^{(j)}\|_{W_2^1(R_+; H)} \leq c_j(\varepsilon) \|P_0 u\|_{W_2^1(R_+; H)}, \quad j = 0, 1 \quad (3)$$

где

$$c_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4 \\ \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varepsilon}, & \pi/4 \leq \varepsilon < \pi/2 \end{cases}$$

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2 \cos \varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \pi/2.$$

Теорема 2. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство

$$\overset{\circ}{W}_2^3(R_+; H) \text{ на } W_2^1(R_+; H).$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1) и 2) причем

$$\alpha(\varepsilon) = c_1(\varepsilon) \max(\|A_1\|_{H_1 \rightarrow H}, \|A_1\|_{H_2 \rightarrow H_1}) + c_0(\varepsilon) \max(\|A_2\|_{H_2 \rightarrow H_1}, \|A_1\|_{H_3 \rightarrow H_1}) < 1$$

где $c_0(\varepsilon)$ и $c_1(\varepsilon)$ определены из теоремы 1. Тогда задача (1), (2) корректно разрешима в $W_2^1(R_+; H)$.

Литература

1. Лионс Ж.Л., Манженес Э. Неоднородные краевые задачи и их приложения, Москва, Мир, 1971, 371 с.
2. Gamidov E.G. On a boundary value problem for second order operator –differential equations in space of smooth vector – functions // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2013, v. XXXIII, N 4, pp. 73-84
3. Mirzoev S.S., Gamidov E.G. On Smooth Solutions of Operator – Differential Equation in Hilbert Space //Applied Mathematical Sciences, v. 8, 2014, N 63, pp. 3109-3115

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Гараева. Э.А.

Институт Систем Управления НАН Азербайджана.

esmira.qarayeva@mail.ru

Пусть требуется минимизировать функционал терминального типа

$$S(u, v) = \varphi_1(y(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2(x, z(t, x)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= f(t, x, z(t, x), u(t)), \\ t &= t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; \end{aligned} \quad (2)$$

$$x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1,$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (3)$$

$$y(x+1) = g(x, y(x), v(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (4)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad (6)$$

$$v(x) \in V(x) \subset R^r, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1,$$

$$z(t, x) \in Z(t, x) \subset R^n, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1;$$

$$x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1,$$

$$y(x) \in Y(x) \subset R^n, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1. \quad (7)$$

Здесь $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$ – заданные n -мерные вектор

функции непрерывные по совокупности переменных, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем $t_1 - t_0, x_1 - x_0$ есть натуральные числа, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x, z)$ заданные непрерывные скалярные функции, $u(t)$ ($v(x)$) – дискретный $r(q)$ -мерный вектор управляющих воздействий $U(t), V(x)$, $Z(t, x)$, $Y(x)$ – заданные непустые ограниченные множества.

Набор $(u(t), v(x), y(x), z(t, x))$, удовлетворяющий соотношениям (2)-(7), назовем допустимым процессом. Множество всех допустимых наборов обозначим через W .

Допустимый набор, доставляющий минимум функционалу (1), назовем оптимальным процессом.

В работе используя формализм Беллмана-Кронова [1-3], доказано глобальное достаточное условие оптимальности.

Пусть $K_1(x, z)$, $K_2(x, y)$ некоторые скалярные функции непрерывно-дифференцируемые по z, y соответственно, при всех t, x соответственно.

Введем функции $K_1(t, x, z, u)$, $K_2(x, y, v)$ и функционал $\Phi(z, y)$ следующим образом

$$\begin{aligned} K_1(t, x, z, u) &= K_1(t+1, x, f(t, x, z, u)) - K_1(t, x, z), \\ K_2(x, y, v) &= K_2(x+1, g(x, y, v)) - K_2(x, y) + K_1(t_0, x, y), \\ \Phi(z, y) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2(x, z(t_1, x)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1(t, x, z) + \varphi_1(y) + K_2(x, y). \end{aligned}$$

Через $(u^0(t), v^0(x), y^0(x), z^0(t, x))$ обозначим фиксированный допустимый процесс.

Определение. Если для допустимого процесса $(u^0(t), v^0(x), y^0(x), z^0(t, x))$ существует функция Кронова (K_1, K_2) такое, что для произвольного допустимого процесса $(u(t), v(x), y(x), z(t, x))$

$$K_1(t, x, z^0, u^0) \geq K_1(t, x, z, u),$$

$$K_2(x, y^0, v^0) \geq K_2(x, y, v),$$

то будем говорить, что допустимый процесс $(u^0(t), v^0(x), y^0(x), z^0(t, x))$ удовлетворяет расширенному усло-

вию максимума.

Теорема. Если допустимый процесс $(u^0(t), v^0(x), y^0(x), z^0(t, x))$ удовлетворяет расширенному условию максимума и минимизирует функционал $\Phi(z, y)$, то этот допустимый процесс является оптимальным.

Далее при некоторых ограничениях, из этого достаточного условия максимума получены необходимые условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина.

Литература

1. Кронов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления // М.; Наука, 1973, 448с.
2. Кронов В.Ф. и др. Основы теории оптимального управления // М. Высшая школа. 1990, 429с.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами // М. Наука, 1965. 536с.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гасанов К.К., Гасанова Л.К.

Бакинский Государственный Университет

В работе доказывается существование и единственность оптимального управления для задачи оптимального управления в линейном параболическом уравнении с интегральным квадратичным критерием качества. Введено характеризующее соотношение оптимального управления.

Пусть объект управления состоит в отыскании решения уравнения

$$y_t = \frac{\partial}{\partial x}(a(x, t)y_x) - a_0(x, t)y + u(x, t) \quad (1)$$

при граничных условиях

$$y(0, t) = y(l, t), \quad y_x(0, t) = y_x(l, t), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

и при начальном условии

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

где $a(x, t) \geq \alpha > 0$, $a_0(x, t) \geq \alpha > 0$, $(x, t) \in \bar{D} \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, $u(x, t)$ - интенсивность источника тепла, $y(x, t)$ - температура точки x в момент времени t .

Обобщенным решением задачи назовем функцию $y(x, t)$, которая принадлежит $W_2^{1,0}(D)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^l y(x, t) \eta(x, t) dx - \int_0^t \int_0^l [y(x, \tau) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - a(x, \tau) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ - a_0(x, \tau) y(x, \tau) \eta(x, \tau) + u(x, \tau) \eta(x, \tau)] dx d\tau - \\ - \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

при $t \in [0, T]$ для любой функции $\eta(x, t) \in W_2^{1,0}(D)$.

Теорема 1. Пусть непрерывные функции $a(x, t)$, $a_0(x, t)$ такие, что $a(0, t) = a(l, t)$, $a(x, t) \geq \alpha > 0$, $a_0(x, t) \geq \alpha > 0$ и $\varphi(x) \in L_2(0, l)$, $u(x, t) \in L_2(D)$.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение.

Теорема доказывается методом Бубнова-Галеркина.

Рассматриваем на множестве решений задачи (1)-(3) минимизацию функционала

$$\begin{aligned} J(u) = \int_0^l \alpha(x) y^2(x, \tau) dx + \iint_D [\gamma(x, t) y^2(x, t) + \\ + \beta(x, t) y_x^2(x, t) + \bar{u}^2(x, t)] dx dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha(x, t), \gamma(x, t), \beta(x, t)$ - заданные неотрицательные непрерывные функции.

Теорема 2. Пусть все условия задачи (1)-(3), (5) выполнены. Тогда задача оптимального управления имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_n(x, t)\}$ является минимизирующей для (5). Тогда последовательности $\{u_n(x, t)\}$ и $\{y_n(x, t)\}$ будут ограничены в $L_2(D)$ и $W_2^{1,0}(D)$, где $y_n(x, t)$ есть решение задачи (1)-(3) при управлении $u_n(x, t)$.

Поэтому из последовательности $\{u_n(x, t)\}$ можно извлечь такую подпоследовательность (снова обозначим через $u_n(x, t)$), что последовательности $\{u_n(x, t)\}$ и $\{y_n(x, t)\}$ слабо сходятся к $u(x, t) \in L_2(D)$ и $y(x, t) \in W_2^{1,0}(D)$. Тогда $y(x, t)$ является решением задачи (1)-(3) при управлении $u(x, t)$.

Функционал $J(u)$ выпуклый и полунепрерывен снизу, и поэтому функционал $J(u)$ будет слабо полунепрерывен снизу. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) \geq J(u).$$

Учитывая последнее неравенство, получим

$$J(u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf J(u), \quad u \in L_2(D).$$

Отсюда следует, что $u(x, t)$ является оптимальным управлением задачи (1)-(3), (5).

Теорема 3. Пусть $u(x, t)$ допустимое управление задачи (1)-(3), (5). $y(x, t)$ решение задачи (1)-(3) при $u(x, t)$. Необходимым и достаточным условием оптимальности $u(x, t)$ является существование решения системы

$$y_t = \frac{\partial}{\partial x}(a(x, t)y_x) - a_0(x, t)y + p(x, t) \quad (6)$$

$$p_t + \frac{\partial}{\partial x}(a(x, t)p_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta(x, t)y_x) + a_0(x, t)p + \gamma(x, t)y,$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0, t) = y(l, t), \quad y_x(0, t) = y_x(l, t), \quad y(x, 0) = \varphi(x),$$

$$p(0, t) = p(l, t), \quad p_x(0, t) = p_x(l, t), \quad p(x, T) = \alpha(x)y(x, T).$$

Тогда единственное оптимальное управление $u(x, t)$ задачи (1)-(3), (5) определено равенством

$$u(x, t) = p(x, t).$$

Литература

1. Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Оптимальное управление нагревом металла. М.: Наука, 1972.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузными процессами. М.: Наука, 1978.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕ- НИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В МНОГОМЕРНОМ СЛОЕ

Гасанов Ф.М.

Бакинский Государственный Университет)

Сулейманов С.Е.

Агджабеди́нский филиал Института Учителей Азерб.

Дадашев Ч.З.

Шемахинский филиал Института Учителей Азербайджана

Рассмотрим слой $\Pi = \{z/z = (z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+k})\}$ где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in R^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) = (z_{n+1}, \dots, z_{n+k}) \in \Omega$, Ω - ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$ в R^k .

В области $\Pi = R^n \times \Omega$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{ij=1}^{n+k} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) = f_0(z) \sum_{i=1}^{n+k} \frac{\partial f_i}{\partial z_i} \quad (1)$$

С красным условием Неймана на $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

где ν -направление внешней конормали к $\partial\Omega$.

Уравнение (1) считается эллиптическими, т.е.

$$m|\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n+k} a_{ij}(z) \xi_i \xi_j \leq M|\xi|^2, \quad z \in \Pi, \quad \xi \in R^{n+k}$$

$$0 < m < M, \quad a_{ij}(z) = a_{ji}(z)$$

В качестве решения задачи (1), (2) рассматривается обобщенные решения. Обобщенным решением уравнения (1) с краевым условием (2) называется функция $u(z)$ такая, что

$u(z) \in W_2'(\Pi_a)$ при любом a , где $\Pi_a = \{z|z \in \Pi, |x| < a\}$ и

$$-\sum_{ij=1}^{n+k} \int_{\Pi} a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz = \int_{\Pi} f_0(z) \psi(z) dz - \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial z_i} dz \quad (3)$$

Каково бы не было $\psi(z)$, $\psi(z) \in W_2^1(\Pi)$, $\psi(z) = 0$ для $|x| > a$ при

некотором a .

Функциональным методом, используя неравенство Харди доказывается следующая теорема существования.

Теорема: Если $n > 2$, $f_i(z) \in L_2(\Pi)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и $\int_{\Pi} (1 + |x|^2) f_0^2(z) dz < \infty$, то существует решение задачи (1), (2) такое, что

$$\int_{\Pi} \frac{u^2(z)}{|x|^2} dz + \int_{\Pi} \left[\sum_{i=1}^{n+k} \left(\frac{\partial u}{\partial z_i} \right)^2 \right] dz \leq C \int_{\Pi} |x|^2 f_0^2(z) dz + C \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} f_i^2(z) dz \quad \text{где } C \text{ от } U(z) \text{ не зависит.}$$

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕПЯТСТВИЙ МАКЕНЗИ

Гасымов В.А., Велиева К.М.

Бакинский Государственный Университет

kavagif@mail.ru

Рассмотрим расслоение L (LAB) со слоем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которая включается в точную последовательность

$$0 \rightarrow Z\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_0 \rightarrow 0.$$

Пусть расслоение L снабжено структурой локально тривиального расслоения со структурной группой $Aut(\mathfrak{g})^\delta$ [1].

Всякая кривая $\varphi(t) \in Aut(\mathfrak{g})^\delta$ удовлетворяет условию

$$\varphi(t) = \varphi(y_0)u(t), \quad u(t) \in Int(\mathfrak{g}).$$

Это значит, что для любого гладкого отображения $\varphi: U \rightarrow Aut(\mathfrak{g})^\delta$ его можно представить в виде $\varphi(x) = \varphi(x_0)u(x)$, для некоторого отображения

$$u: M \rightarrow Int(\mathfrak{g}).$$

Тогда для векторного поля $X \in \Gamma^\infty(TU)$ имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial X} \varphi(x) = \varphi(x)u^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial X} (u(x)).$$

Полагаем $h(x) = u^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial X} (u(x)) \in ad(\mathbf{g}) \subset Der(\mathbf{g})$.

Таким образом

$$\varphi^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial X} (\varphi(x)) = h(X).$$

Допустим, что многообразие M покрыто атласом карт U_α и на каждой карте задано линейная связанность, которая при тривиализации

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{g} \rightarrow L \quad (1)$$

задается формулой

$$\nabla_X^\alpha u(x) = \varphi_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial X} \varphi_\alpha^{-1}(x)(u(x)) \right), \quad (2)$$

для $u(x) \in \Gamma^\infty(L, U_\alpha)$.

Пусть разбиение единицы подчиненное, покрытие $\{U_\alpha\}$. Тогда глобальная связанность ∇ задается формулой $\nabla_X(u(x)) = \sum_\alpha h_\alpha(x) \nabla_X^\alpha(u(x))$. Пусть $v(x) \in C^\infty(U_\alpha \times \mathbf{g})$.

Тогда связанность на карте задается композицией

$$C^\infty(U_\alpha \times \mathbf{g}) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \Gamma^\infty(U_\alpha \times \mathbf{g}) \xrightarrow{\nabla_x} \Gamma^\infty(U_\alpha \times \mathbf{g}) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} C^\infty(U_\alpha \times \mathbf{g})$$

которую обозначим $\nabla_X^{U_\alpha}$.

$$\nabla_X^{U_\alpha}(v(x)) = H_\alpha(X)v(x) + \frac{\partial}{\partial(x)} v(x), \text{ где}$$

$$H_\alpha(X) = \sum_\beta h_\beta(x) h_{\alpha\beta}(X), \quad h_{\alpha\beta}(X) = \varphi_{\beta\alpha}(x) \left(\frac{\partial}{\partial X} (\varphi_{\alpha\beta}(x)) \right).$$

$$\text{Другими словами } \nabla_X^{U_\alpha} = H_\alpha(X) + \frac{\partial}{\partial(X)}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. Ограничение связанности ∇^{U_α} на отдельную карту U_α задается формулой

$$\nabla_x^{U_\alpha} = H_\alpha(X) + \frac{\partial}{\partial(X)} \quad (3)$$

при подходящем выборе гомоморфизма

$$H_\alpha : TU_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{ad}(\mathbf{g})$$

[2],[3].

Вычислим тензор кривизны связности ∇ :

$$R^\nabla(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}, \text{ причем} \\ \nabla_X = \frac{\partial}{\partial(X)} + H_\alpha(X) = \frac{\partial}{\partial(X)} + \mathbf{ad}(u(X)) \quad (4).$$

Значит,

$$R^\nabla(X, Y)(v(x)) = \left[\frac{\partial}{\partial X} \mathbf{ad}(u(X)), \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{ad}(u(Y)) \right] (v(x)) - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial[X, Y]} + \mathbf{ad}(u([X, Y])) \right) (v(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{ad}(u(X)) \right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial Y} + [v(Y), v] \right) - \left(\frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{ad}(Y) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial X} + [u(X), v] \right) - \\ - \left(\frac{\partial v}{\partial[X, Y]} + [u([X, Y]), v] \right). \\ R^\nabla(X, Y)(v(x)) = \left[R''(X, Y) + \frac{\partial u(Y)}{\partial X} - \frac{\partial u(X)}{\partial Y}, v \right].$$

Итак,

$$R^\nabla(X, Y)(v) = \left([H(X), \frac{\partial}{\partial Y}] + [\frac{\partial}{\partial X}, H(Y)] + [H(X), H(Y)]H([X, Y]) \right) (v)$$

Что, то же самое

$$R^\nabla(X, Y) = R''(X, Y) + \frac{\partial H(Y)}{\partial X} - \frac{\partial H(X)}{\partial Y}.$$

Таким образом, полагая

$$\Omega(X, Y) = R''(X, Y) + \frac{\partial u(Y)}{\partial X} - \frac{\partial u(X)}{\partial Y} \quad (5)$$

получаем $R^\nabla = \mathbf{ad}(\Omega)$.

Заметим, что $R^\nabla(X, Y) = \mathbf{ad}(\Omega(X, Y)) \in \Gamma^\infty(\mathbf{Der}(L))$.

Пусть ∇^{Der} -связанность в расслоении $\mathbf{Der}(L)$, которая индуцируется связностью ∇ по формуле

$$\nabla_X^{Der}(\varphi(u)) = \nabla_X(\varphi(u)) - \varphi(\nabla_X(u)), \text{ значит}$$

$$\nabla_X^{Der}(\varphi) = [\nabla_X, \varphi].$$

Если, $\mathbf{ad}: L \rightarrow \mathbf{Der}(L)$ присоединенный гомоморфизм и

$$u \in \Gamma^\infty(L), \text{ то } \mathbf{ad}(\nabla_X(u)) \in \nabla^{Der}(\mathbf{ad}(u)).$$

Дифференциал формы $R^\nabla(X, Y)$ вычисляется по формуле

$$d^{\nabla^{Der}}(R^{Der})(X_1, X_2, X_3) = ((\nabla_{X_1}^{Der}(R^\nabla(X_2, X_3)) - R^\nabla([X_1, X_2], X_3)) \cdot \cdot$$

где знак $\cdot \cdot$ означает сумму циклических перестановок по переменным (X_1, X_2, X_3) .

$$d^{\nabla^{Der}}(R^{Der})(X_1, X_2, X_3) = ((\nabla_{X_1}^{Der}(R^\nabla(X_2, X_3)) - (\nabla_{X_2}^{Der}(R^\nabla(X_3, X_1)) - R^\nabla([X_2, X_3], X_1)) + ((\nabla_{X_3}^{Der}(R^\nabla(X_1, X_2)) - R^\nabla([X_3, X_1], X_2)).$$

Тогда получим что,

$$\begin{aligned} d^{\nabla^{Der}}(R^{Der})(X_1, X_2, X_3) &= [\nabla_{X_1}^{Der}, R^\nabla(X_2, X_3)] - R^\nabla([X_1, X_2], X_3) + \\ &+ [\nabla_{X_2}^{Der}, R^\nabla(X_3, X_1)] - R^\nabla([X_2, X_3], X_1) + \\ &+ [\nabla_{X_3}^{Der}, R^\nabla(X_1, X_2)] - R^\nabla([X_3, X_1], X_2) = 0. \end{aligned}$$

Итак, для любой связности имеет место дифференциальное тождество Бьянки

$$d^{\nabla^{Der}}(R^{Der})(X_1, X_2, X_3) = 0.$$

Пусть связность ∇ задается на одной карте U_α по формуле (4) и пусть форма Ω задается по формуле (5).

$$d^\nabla \Omega(X_1, X_2, X_3) = 0. \quad (5)$$

Итак, мы можем вычислить препятствие Макензи : дифференциал формы трехмерная форма, которая порождает трехмерный класс когомологий.

Литература

1. K. C. H. MACKENZIE, *GENERAL THEORY OF LIE GROUPOIDS AND LIE ALGEBROIDS* (CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2005).
2. V. GASIMOV, XIAOYU LI, AND A. S. MISHCHENKO, *MACKENZIE OBSTRUCTION FOR EXISTING OF TRANSITIVE LIE ALGEBROID*

(ABSTRACT OF THE SHORT COMMUNICATIONS OF THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, SEOUL ICM 2014).

3. L. X.YU, A. S. MISHCHENKO, V. GASIMOV MACKENZIE OBSTRUCTION FOR THE EXISTENCE OF A TRANSITIVE LIE ALGEBROID., RUSSIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS, VOL. 21, № 4, 2014, PP 544-548.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ О ФОРМУЛЕ РАЗЛОЖЕНИЙ

Гасымов Э.А., Гусейнова А.О., Курназ А.С.

Бакинский Государственный Университет

При решении некоторых нерегулярных смешанных задач для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных нам понадобится сходимость некоторых функциональных рядов, которой посвящена настоящая работа.

Положим

$$g_{m0} \equiv -4 \sum_{k=1}^m \int_0^1 g(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi ;$$

$$g_{m1}(x) \equiv 4 \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 g(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \right) \cdot \cos \lambda_k x ;$$

$$g_{m2}(x) \equiv 4 \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 g(\xi) \sin \lambda_k \xi d\xi \right) \cdot \sin \lambda_k x ,$$

где $\lambda_k = 2k\pi$.

1⁰. Пусть функция $y = g(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[0,1]$.

2⁰. Пусть функция $y = g(x)$ монотонно возрастает (или убывает), оставаясь ограниченной в промежутках $[0, h]$ и $[1-h, 1]$, где $0 < h < 1$.

3⁰. Пусть $g(+0)$, $g(1-0)$ и интегралы

$$\int_0^h \frac{1}{\xi} |g(\xi) - g(+0)| d\xi ; \int_0^h \frac{1}{\xi} |g(1-\xi) - g(1-0)| d\xi$$

существуют.

4⁰. Пусть функция $y = g(x)$ монотонно возрастает (или убывает), оставаясь ограниченной в промежутках $[x_0 - h, x_0 + h]$ и $[1 - x_0 - h, 1 - x_0 + h]$, где $0 < x_0 < 1, x_0 - h \geq 0, 1 - x_0 + h \leq 1, 0 < h < 1$.

5⁰. Пусть $g(x_0 \pm 0), g(1 - x_0 \pm 0)$ и интеграл

$$\int_0^h \frac{1}{t} |g(x_0 - t) + g(x_0 + t) + g(1 - x_0 - t) + g(1 - x_0 + t) - \\ - g(x_0 - 0) - g(x_0 + 0) - g(1 - x_0 - 0) - g(1 - x_0 + 0)| dt$$

существует.

6⁰. Пусть $g(x_0 \pm 0), g(1 - x_0 \pm 0)$ и интеграл

$$\int_0^h \frac{1}{t} |g(x_0 - t) + g(x_0 + t) - g(1 - x_0 - t) - g(1 - x_0 + t) - \\ - g(x_0 - 0) - g(x_0 + 0) + g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)| dt$$

существует.

Имеют место

Лемма 1. Пусть выполняются ограничения 1⁰ и или 2⁰ или

3⁰. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_{m0} = -g(+0) - g(1 - 0) + 2 \int_0^1 g(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Лемма 2. При ограничениях 1⁰ и или 4⁰ или 5⁰, имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_{m1}(x_0) = \frac{1}{2} [g(x_0 - 0) + g(x_0 + 0)] + \\ + \frac{1}{2} [g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)] - 2 \int_0^1 g(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Лемма 3. При ограничениях 1⁰ и или 4⁰ или 6⁰, имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_{m2}(x_0) = \frac{1}{2} [g(x_0 - 0) + g(x_0 + 0)] - \\ - \frac{1}{2} [g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)]. \quad (3)$$

7⁰. Пусть $f(x) \in C([0, 1])$ и $f(0) = 0$.

8⁰. Пусть функция $f(x)$ кусочно-монотонна в промежутке $[0,1]$.

9⁰. Пусть интегралы

$$\int_0^h \frac{1}{t} |f(t) - f(0)| dt; \int_0^h \frac{1}{t} |f(1-t) - f(1)| dt$$

и при $0 < x_0 < 1$ интегралы

$$\int_0^h \frac{1}{t} |f(x_0 - t) + f(x_0 + t) + f(1 - x_0 - t) + \\ + f(1 - x_0 + t) - 2f(x_0) - 2f(1 - x_0)| dt;$$

$$\int_0^h \frac{1}{t} |f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - f(1 - x_0 - t) - \\ - f(1 - x_0 + t) - 2f(x_0) + 2f(1 - x_0)| dt$$

существуют, где $h \equiv h(x_0)$ - некоторые малые положительные числа.

Пользуясь леммами 1-3, легко доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняются ограничения 7⁰, 8⁰ и 9⁰. Тогда, при $0 < x_0 < 1$ имеет место следующая формула разложения

$$f(x_0) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 (1 - \xi) f(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi + \\ + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (1 - \xi) f(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \right) \cos \lambda_k x_0 + \\ + 4 x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(\xi) \sin \lambda_k \xi d\xi \right) \sin \lambda_k x_0. \quad (4)$$

Литература

1. Гасымов Э.А. Применение метода конечного интегрального преобразования к решению смешанной задачи с интегродифференциальными условиями для одного неклассического уравнения // Дифференц.уравнения, 2011, т.47, №3, с.322-334.

2. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования и его приложения. Баку: Элм, 2009, 432 с.

**ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НЕЧЕТНЫМИ
ПОРЯДКАМИ**

Гасымов Э.А., Гусейнова А.О.

Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе, с применением электронно-вычислительной машины (ЭВМ), предлагается алгоритм и программа (на языке Паскаль) для нахождения одного вещественного решения (с произвольно фиксированной точностью) алгебраического уравнения любого нечетного порядка с вещественными коэффициентам. Указаны достаточные условия (см. теорему 1), обеспечивающие единственность вещественного решения некоторых алгебраических уравнений нечетного порядка $2n+1$ где $n=1,2,\dots$. А так же указаны необходимые и достаточные условия (см. теорему 3), обеспечивающие единственность вещественного решения кубического уравнения с вещественными коэффициентами.

Пусть

$$y = p_{2n+1}(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n} x, \quad (1)$$

здесь $a_0 (a_0 \neq 0)$, $a_1, \dots, a_{2n}$ - вещественные числа, n - натуральное число.

Исходя из того, что область значений функции $y = p_{2n+1}(x)$ есть $(-\infty, +\infty)$, то согласно теореме о промежуточном значении (стр.171 из [1]) теоретически получаем, что алгебраическое уравнение

$$p_{2n+1}(x) = -a_{2n+1}, \quad (2)$$

где a_{2n+1} - произвольно заданное вещественное число, имеет хотя бы одно вещественное решение x_1 .

Возникает вопрос: практически как найти это вещественное решение?

Ввиду того, что ЭВМ широко и успешно используется во

всей отрасли жизни (в науке, в учебе, в технике и т.д.) одно частное вещественное решение алгебраического уравнения нечетного порядка с вещественными коэффициентами можно найти с помощью ЭВМ.

Ниже предлагается алгоритм и программа ELM, написанная на языке Паскаль, для нахождения приближенного значения этого вещественного решения с произвольно фиксированной точностью для любого алгебраического уравнения нечетного порядка с вещественными коэффициентами. Ради простоты записи, мы этот способ будем излагать для алгебраического уравнения 5-го порядка ($2n + 1 = 5$);

$$x^5 + A1x^4 + A2x^3 + A3x^2 + A4x + A5 = 0, \quad (3)$$

где $A1, A2, A3, A4, A5$ - некоторые вещественные числа.

```
PROGRAM ELM;
LABEL 10,11,12,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79;
VAR D,A1,A2,A3,A4,A5,F,F1,E,A,B,C,X1:REAL;
J,I,M,N,K,L:INTEGER;
BEGIN
A1:=1; A2:=1; A3:=1; A4:=4*SQR(2)-6; A5:=2; N:=4; A:=0;
M:=1;
X1:=0; C:=A5*A5;
IF C>0 THEN GOTO 76;
10:WRITELN('X1=',X1:10:5);
GOTO 75;
76:IF A5<0 THEN GOTO 11;
77:A:=A-1; GOTO 72;
11:M:=2;
12:A:=A+1; GOTO 72;
78:K:=1;L:=1;M:=3;I:=1000000;
70:E:=1/I;
IF A5<0 THEN GOTO 73;
71:D:=A; A:=A+(L-2)*E;
72:F:=SQR(A)*SQR(A)*A+A1*SQR(A)*SRQ(A)+A2*SQR(A)*A
+A3*SQR(A)+A4*A+A5;
X1:=A;
IF F=0 THEN GOTO 10; IF M=3 THEN GOTO 79;
```

```

IF (M=1) AND (F>0) THEN GOTO 77;
B:=A; IF M=1 THEN A:=B+1;
IF (M=1) AND (F<0) THEN GOTO 78;
IF (M=2) AND (F<0) THEN GOTO 12;
IF M=2 THEN A:=B-1;
IF (M=2) AND (F>0) THEN GOTO 78;
79:F1:=(2-L)*F;
IF F1>0 THEN GOTO 71;
X1:=(A+D)/2; GOTO 74;
73:L:=3; GOTO 71;
74:J:=K+2; WRITELN ('E=',E:J:K,'X1:10:K);
K:=K+1; I:=I*10;
IF K<=N THEN GOTO 70;
75:END.

```

В этой программе мы взяли

$$A1 = 1; A2 = 1; A3 = 1; A4 = 4\sqrt{2} - 6; A5 = 2, \quad (3_3)$$

и при $k = 1$ имеем $x1 = -1,4$; при $k = 2$ имеем $x1 = -1,41$; при $k = 3$ имеем $x1 = -1,414$; и наконец при $k = 4$ получим $x1 = -1,4142$.

Далее, принимая во внимание равенство

$$\sqrt{2} = 1,4142... \quad (3_4)$$

и вышеуказанные приближенные значения $x1$ делаем вывод о том, что при ограничениях (3_3) одно частное решение уравнения (3) может быть $x1 = -\sqrt{2}$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что при ограничениях (3_3) одно частное решение уравнения (3) на самом деле есть $x1 = -\sqrt{2}$.

Возникает естественный вопрос: когда уравнение (2) имеет единственное вещественное решение? Легко доказываются следующие теоремы и лемма.

Теорема 1. Пусть $a_{2n} \neq 0$; $a_{2k-1} = 0, k = 1, \dots, n$; $a_{2n}a_0 > 0$; $a_{2n}a_{2k} \geq 0, k = 1, \dots, n-1$, где $a_0, \dots, a_{2n}$ - некие вещественные числа. Тогда для произвольного числа a_{2n+1} алгебраическое уравнение (2) имеет единственное вещественное решение.

Теорема 2. Пусть вещественнозначная функция $y = f(t)$

непрерывна в промежутке (a, b) . Тогда для того, чтобы это функция была обратима в этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы она была строго монотонна в интервале (a, b) .

Пусть

$$y = p(x) = ax^3 + bx^2 + cx, \quad (4)$$

где $a(a \neq 0), b, c$ - вещественные числа.

Теорема 3. Пусть $a(a \neq 0), b, c$ - вещественные числа. Тогда для произвольного вещественного числа d , чтобы уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx = d \quad (5)$$

имело единственное вещественное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$b^2 < 3ac. \quad (6)$$

Лемма. Пусть $a(a \neq 0), b, c$ - вещественные числа. Тогда для того, чтобы функция $y = p(x)$, определяемая формулой (4), было строго монотонна в интервале $(-\infty, +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (6).

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального интегрального исчисления. Москва: Наука, 1969, 799 с.
2. Qasimov E.A. Məktəb riyaziyyat kursunun bəzi məsələlərinin ənənəvi olmayan üsullarla həlli. Bakı: Təhsil, 2010, 122 s.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ $c\delta'$ – ПОТЕНЦИАЛОМ

Гейдаров А.Г., Махмудов П.Б.

Бакинский Государственный Университет

arif_heydarov@mail.ru

В работе рассматривается задача на собственные значения для уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y''(x) + \beta \delta'(x - x_0)y(x) = \lambda y(x)$$

в пространстве $L_2(0,1)$ с условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad (\beta - 2)y(x_0 + 0) + (\beta + 2)y(x_0 - 0) = 0, \\ (\beta + 2)y'(x_0 + 0) + (\beta - 2)y'(x_0 - 0) = 0.$$

Доказана, что рассматриваемая задача имеет две серии бесконечное число собственных значений.

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$-y''(x) + \beta \delta'(x - x_0) \cdot y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad (2)$$

$$(\beta - 2)y(x_0 + 0) + (\beta + 2)y(x_0 - 0) = 0, \quad (3)$$

$$(\beta + 2)y'(x_0 + 0) + (\beta - 2)y'(x_0 - 0) = 0, \quad (4)$$

где $\delta'(x - x_0)$ – производная функции Дирака $\delta(x - x_0)$, $x_0 \in (0,1)$ – фиксированная точка, $0 \neq \beta \in (-\infty, +\infty)$, λ – спектральный параметр.

Пусть $D(A)$ – множество функций $y(x) \in W_2^2((0,1) \setminus \{x_0\})$ удовлетворяющих условиям (2) – (4). Определим в пространстве $L_2(0,1)$ оператор $\hat{A}$ равенством

$$Ay = -y''(x) + \beta \delta'(x - x_0) \cdot y(x), \quad y(x) \in D(A),$$

где $y''(x)$ – обобщенная производная второго порядка функции $y(x) \in D(A)$. Произведение $\delta'(x - x_0) \cdot y(x)$ определяется по формуле

$$\delta'(x - x_0) \cdot y(x) = -\frac{1}{2}[y'(x_0 + 0) + y'(x_0 - 0)]\delta(x - x_0) + \\ + \frac{1}{2}[y(x_0 + 0) + y(x_0 - 0)] \cdot \delta'(x - x_0).$$

Спектральный анализ оператора $\hat{A}$ имеет важное значение для задач квантовой механики [1], а также для стационарных задач диффузии [2]. Общая спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля с обобщенными потенциалами приведена в работе [3].

Задача (1)–(4) эквивалентна задаче $Ay = \lambda y$, $y \in D(A)$. A – самосопряженный оператор в пространстве $L_2(0,1)$, и следовательно, собственные значения этого оператора вещественны.

Найдем собственные значения оператора A . Пусть

$Ay = \lambda y$, ($\lambda \neq 0$). Функция $y(x)$ при $x \in (0, x_0)$ удовлетворяет уравнению $-y'' = \lambda y$. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Далее, функция $y(x)$ при $x \in (x_0, 1)$ удовлетворяет также уравнению $-y'' = \lambda y$, общее решение которого имеет вид:

$$y(x) = C_3 \sin \sqrt{\lambda} x + C_4 \cos \sqrt{\lambda} x,$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

В силу граничных условий (2) имеем

$$C_2 = 0, \quad C_3 \cos \sqrt{\lambda} - C_4 \sin \sqrt{\lambda} = 0.$$

Из условий (3) и (4) следуют равенства:

$$C_1 (\beta + 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 + C_3 (\beta - 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 + C_4 (\beta - 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 = 0,$$

$$C_1 (\beta - 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 + C_3 (\beta + 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 - C_4 (\beta + 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 = 0.$$

В результате для определения постоянных C_1 , C_3 и C_4 получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_3 \cos \sqrt{\lambda} - C_4 \sin \sqrt{\lambda} = 0, \\ C_1 (\beta + 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 + C_3 (\beta - 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 + C_4 (\beta - 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 = 0, \\ C_1 (\beta - 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 + C_3 (\beta + 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 - C_4 (\beta + 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \cos \sqrt{\lambda} & -\sin \sqrt{\lambda} \\ (\beta + 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 & (\beta - 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 & (\beta - 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 \\ (\beta - 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 & (\beta + 2) \cos \sqrt{\lambda} x_0 & -(\beta + 2) \sin \sqrt{\lambda} x_0 \end{vmatrix}.$$

Однородная система уравнений (5) имеет нетривиальное решение, если $\Delta(\lambda) = 0$. Следовательно, собственные значения оператора A являются решениями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Для определения собственных значений получаем уравнение

$$\begin{aligned} & (\beta + 2)^2 \sin \sqrt{\lambda} x_0 \cdot \sin \sqrt{\lambda} (x_0 - 1) + \\ & + (\beta - 2)^2 \cos \sqrt{\lambda} x_0 \cdot \cos \sqrt{\lambda} (1 - x_0) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение запишем в следующем виде

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} x_0 \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (1 - x_0) = \left(\frac{\beta - 2}{\beta + 2} \right)^2, \quad (\beta \neq \pm 2). \quad (6)$$

Обозначим $f(\lambda) = \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} x_0 \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (1 - x_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\lambda} x_0} \cdot \frac{x_0}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (1 - x_0) + \\ &+ \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} x_0 \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\lambda} (1 - x_0)} \cdot \frac{1 - x_0}{2\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Уравнение (6) имеет решение, если выполнено одно из следующих условий:

- I. $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} x_0 > 0$ и $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (1 - x_0) > 0$,
- II. $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} x_0 < 0$ и $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (1 - x_0) < 0$.

В первом случае функция $f(\lambda)$ строго возрастает, а во втором случае строго убывает в соответствующих интервалах. Используя это свойство функции $f(\lambda)$ и решая тригонометрические неравенства, приходим к следующему результату.

Теорема. Пусть $\beta \neq \pm 2$. Тогда, если $0 < x_0 < \frac{1}{2}$, то оператор

A имеет единственное простое собственное значение на каждом из интервалов

$$\left(\left(\frac{\pi k}{x_0} \right)^2, \left(\frac{\pi(2k+1)}{2(1-x_0)} \right)^2 \right), \quad \left(\left(\frac{\pi(2k+1)}{2x_0} \right)^2, \left(\frac{\pi(k+1)}{1-x_0} \right)^2 \right),$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

В случае $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ оператор A имеет единственное простое собственное значение на каждом из интервалов

$$\left(\left(\frac{\pi k}{1-x_0} \right)^2, \left(\frac{\pi(2k+1)}{2x_0} \right)^2 \right), \quad \left(\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(1-x_0)} \right)^2, \left(\frac{\pi(k+1)}{x_0} \right)^2 \right),$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Если $x_0 = \frac{1}{2}$, то собственные значения имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\pm \arccos \frac{4\beta}{\beta^2 + 4} + 2\pi k \right)^2, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пусть $\beta = 2$. Тогда

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{x_0} \right)^2, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \mu_m = \left(\frac{\pi m}{1 - x_0} \right)^2, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

В случае $\beta = -2$ собственные значения имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k+1)}{2x_0} \right)^2, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \mu_m = \left(\frac{\pi(2m+1)}{2(1-x_0)} \right)^2, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Литература

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг – Крон Р., Холден Х. Ре-шаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991, 568 с.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982, 320 с.
3. Савчук А.М., Шкаликков А.А. Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами – распределениями. Труды Московского матем. об-ва, т. 64, 2003, с. 159-212.

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Гейдарова С.Б.

*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,
saedet_heyderova@mail.ru.*

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$u'''(t) - A^3 u(t) + \sum_{j=0}^3 A_{3-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in (0,1) \quad (1)$$

$$u'(0) = u''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2)$$

где $f(t), u(t)$ функции, определенные в интервале $(0,1)$ почти

всюду, со значениями в H , производные понимаются в смысле теории распределений, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1) A положительно определенный самосопряженный оператор;
- 2) $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{0,3}$) ограниченные операторы в H .

Обозначим через $\|f\|_{L_2((0,1);H)}$ гильбертово пространство всех функций, для которых норма

$$\|f\|_{L_2((0,1);H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty$$

конечна.

Следуя монографию [1], определим следующие гильбертовы пространства

$$W_2^3((0,1);H) = \{u : A^3 u \in L_2((0,1);H), u'' \in L_2((0,1);H)\}$$

и

$$\begin{aligned} \overset{0}{W}_2^3((0,1);H) = \{u : u \in W_2^3((0,1);H), u'(0) = u''(0) = 0, \\ u(1) = 0\} \end{aligned}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3((0,1);H)} = \left(\|A^3 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|u'''\|_{L_2((0,1);H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Доказывается следующая теорема о разрешимости задачи (1), (2).

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$q = \sum_{j=0}^3 c_j \|B_{3-j}\| < 1,$$

где $c_0 = 1$, $c_1 = 2^{2/3} 3^{-1/2}$, $c_2 = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$, $c_3 = 1$. Тогда при любом $f(t) \in L_2((0,1);H)$ существует единственная функция $u(t) \in \overset{0}{W}_2^3((0,1);H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду.

Литература

1. Лион Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир, 1971 г., 371 с.

О РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гулиев Н. А.

Бакинский Государственный Университет

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t, u) \quad (1)$$

в области $\Omega_\tau \times E_1 = \{(x, t, u) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, -\infty < u < +\infty\}$

Пусть требуется найти пару $(u(x, t), \tau)$ такую что $u(x, t) \in C^{(2)}(\Omega_\tau)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям:

$$u(x, t) = a(x) \quad (2)$$

$$u(x, t) = b(x) \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (4)$$

$$g(\tau) = \int_0^\tau \int_0^l (gradu)^2 dx dt = v \quad (5)$$

где $a(x), b(x), f(x, t, u)$ - заданные функции; $v > 0$ заданное число.

Рассмотрим вспомогательное линейное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \varphi(x, t) \quad (6)$$

Решение задачи (6), (2)- (5) дается формулой

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{Sh \frac{\pi n}{l} (\tau - t)}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} + b_n \frac{Sh \frac{\pi n}{l} t}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} - \int_0^\tau G_n(t, s, \tau) \rho_n(s) ds \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv (P_{0, \tau} \varphi)(x, t) \quad (7)$$

где

$$G_n(t, s, \tau) = \frac{l}{\pi n Sh \frac{\pi n}{l} \tau} \begin{cases} Sh \frac{\pi n}{l} t Sh \frac{\pi n}{l} (\tau - s), & 0 \leq t \leq s \leq \tau \\ Sh \frac{\pi n}{l} (\tau - t) Sh \frac{\pi n}{l} s & 0 \leq s \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

$a_n, b_n, \varphi_n(t)$ - соответствующие коэффициенты Фурье функций $a(x), b(x), \varphi(x, t)$.

С помощью оператора $P_{0,\tau}$ введем и следующие операторы:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{Sh \frac{\pi n}{l} (\tau - t)}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} + b_n \frac{Sh \frac{\pi n}{l} t}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} - \frac{\pi n}{l} \int_0^{\tau} G_n(t, s, \tau) \varphi_n(s) ds \right) \cos \frac{\pi n}{l} x \equiv P_{1,\tau} \varphi \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{\pi n}{l} \frac{Sh \frac{\pi n}{l} (\tau - t)}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} + b_n \frac{Sh \frac{\pi n}{l} t}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} - \int_0^{\tau} \frac{\partial G_n(t, s, \tau)}{\partial t} \varphi_n(s) ds \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv P_{2,\tau} \varphi \quad (9)$$

Введем также оператор

$$(P_{\tau} \varphi)(x, t) = f(x, t, (P_{0,\tau} \varphi)(x, t)) \quad (10)$$

где $f: [0, l] \times [0, T] \times E_1 \rightarrow E_1$, $P_{0,\tau}$ - определяются формулой (7).

Задача (1) - (5) эквивалентна системе операторных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = (P_{\tau} \varphi)(x, t) \\ g_{\varphi}(\tau) = \int_0^l \int_0^{\tau} [(P_{1,\tau} \varphi)^2(x, t) + (P_{2,\tau} \varphi)^2(x, t)] dx dt = v \end{cases} \quad (11)$$

В следующем смысле.

Если $(u(x, t), \tau)$ - решение задачи (1)-(5), то обозначая $u_{xx} + u_{tt} = \varphi$, получим что (φ, τ) является решением системы (11) где $\tau \in (0, T]$ - решение функционального уравнения $g_{\varphi}(\tau) = v$, входящего в (11). Обратно, если (φ, τ) решение системы (11), то $(u(x, t), \tau)$ где $u(x, t) = (P_{0,\tau} \varphi)(x, t)$ является решением задачи (1)-(5).

В следующей теореме используется обозначение

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\pi n}{l} \frac{Sh \frac{\pi n}{l} (\tau - t)}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} + b_n \frac{Sh \frac{\pi n}{l} t}{Sh \frac{\pi n}{l} \tau} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (12)$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть

- 1) $a(x), b(x)$ дважды непрерывно дифференцируемые на $[0, l]$ функции, обладающие суммируемыми с квадратом третьими производными для которых выполняются условия:

$$a(0) = a(l) = 0 \quad a''(0) = a''(l) = 0$$

$$b(0) = b(l) = 0 \quad b''(0) = b''(l) = 0 \quad a(x) \neq b(x)$$

- 2) $f: [0, l] \times [0, T] \times E_1 \rightarrow E_1$ непрерывная функция, обладающая непрерывными и ограниченными производными вида

$$D^\beta f(x, t, u) = \frac{\partial}{\partial u} D^\alpha f(x, t, u) = \frac{\partial^{|\alpha|+1}}{\partial t^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2} \partial u} f(x, t, u)$$

$$(\beta = (\alpha, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, 1), |\beta| = |\alpha| + 1);$$

- 3) $f(x, t, u)$ удовлетворяет условиям: $f(t, 0, 0) = f(t, l, 0) = 0$ или $f(t, x, 0) = 0$;

- 4) выполняется неравенство

$$\theta_T = \sum_{1 \leq |\beta| \leq 3} \sup |D^\beta f(x, t, u)| \frac{lT}{2\sqrt{6}} < 1;$$

- 5) выполняются также неравенства:

$$5_1) \quad Tl^3 \int_0^l (a''^2(x) + b''^2(x)) dx < \nu;$$

$$5_2) \quad \frac{\|f(x, t, u_0)\|_{C^2(\Omega_T)}}{1 - \theta_T} \leq \sqrt{\frac{\nu - Tl^3 \int_0^l (a''^2(x) + b''^2(x)) dx}{3T^3 l^2 \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{l^2}{6} \right)}};$$

$$5_3) \frac{l}{\pi} \ln \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} \leq T, \text{ где } K = \sqrt{\frac{\nu - 2^{-1} T l^3 \int_0^l (a''(x) + b''(x)) dx}{2^{-1} T l^3 \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{l^2}{6} \right)}}$$

Тогда задача (1)- (5) имеет хотя бы одно решение

$$(u(x, t), \tau): u \in C^{(2)}(\overline{\Omega}_\tau), \tau \in (0, T].$$

О СВОБОДНОМ КОЛЕБАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОГО УПРУГО ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ.

Гусейнов Г.М.

Бакинский Государственный Университет
Мирзоева Б.Д., Шукурова Н.А., Мирзоева Г.Р.
Институт математики и механики НАНА

В инженерной практике часто появляется необходимость решения задачи собственных и вынужденных колебаний цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения с учетом линейно упругого, неоднородного и вязкоупругого сопротивления.

В данной работе будет исследовано задача о собственном колебании ортотропно неоднородной цилиндрической оболочки с учетом вязко- упругого сопротивления, где реакция основания с прогибом связана следующим соотношением [1,2]:

$$q = k_1 W + k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1)$$

Здесь k_1 и k_2 характеристики внешней среды, W - прогиб, t - время.

Неоднородность в оболочке появляется в результате технологии изготовления и сварки, неоднородности состава материала и т.д. В результате указанных факторов упругие характеристики материалов (модуль упругости, Пуассона и плотность) существенным образом зависят от пространственных координат. Учет неоднородности и сопротивления внешней среды осложняют математическое решение и анализ результатов, не учет может привести к существенным погреш-

ностям.

Рассмотрим собственное колебание однородно изотропной оболочки с учетом однородного вязкоупругого сопротивления [1]. Уравнения для круговой цилиндрической оболочки с учетом (1) имеют следующий вид:

$$D \nabla^4 W + R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k_1 W + k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi - R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (2)$$

Здесь ∇ - бигармонический оператор, R - радиус кривизны оболочки. Уравнения (2) записаны в безразмерной системе координат $\alpha = zR^{-1}$ и $\beta = \xi R^{-1}$, φ - функция напряжений, γ - объемный вес материальной оболочки, h - толщина.

Предполагается, что свободные опирания имеют следующий вид:

$$W = V = M_\alpha = N_\alpha = 0 \text{ при } \beta = 0, \beta = \beta_0 \quad (3)$$

Выражения, удовлетворяющие условиям (3) принимаются в виде:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_n \alpha \sin \mu_m \beta \sin \omega t$$

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \lambda_n \alpha \sin \mu_m \beta \sin \omega t \quad (4)$$

$$\text{Здесь } \lambda_n = \frac{n\pi R}{l}; \mu_m = \frac{m\pi}{\beta_0}$$

Подставляя (4) в (3) получаем:

$$\frac{A_{mn}}{Eh} (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 + B_{mn} R \lambda_n^2 = 0$$

$$- A_{mn} \lambda_n^2 + D B_{mn} (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 = 0 \quad (5)$$

$$- B_{mn} \frac{\gamma h}{g} R^4 \omega^2 + k_1 B_{mn} - B_{mn} k_2 \omega^2 = 0$$

Учитывая (3) из (5) можно определить ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{1}{\frac{\gamma h}{g} R^4 + k_2} \left[\frac{EhR\lambda_n^4}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + D(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 + k_1 \right]$$

Здесь при $k_1 = 0, k_2 = 0$ получим решение аналогичной задачи без учета внешнего сопротивления:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\frac{\gamma h}{g} R^4} \left[\frac{EhR\lambda_n^4}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + D(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \right]$$

При $k_1 = 0$ получим решение для чисто вязкого сопротивления:

$$\omega_6^2 = \frac{1}{\frac{\gamma h}{g} R^4 + k_2} \left[\frac{EhR\lambda_n^4}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + D(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \right] \quad (7)$$

А при $k_2 = 0$ получим решение для чисто упругого сопротивления:

$$\omega_y^2 = \frac{1}{\frac{\gamma h}{g} R^4} \left[\frac{EhR\lambda_n^4}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + D(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 + k_1 \right] \quad (8)$$

Литература

1. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1963, 376с.
2. Ржаницын А.Р. Строительная механика. М.: Гостехиздат, 1955, 476с.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА

Гусейнов И.М.

Бакинский Государственный Университет

Достуев Ф.З.

Институт Математики и Механики НАНА

hmhuseynov@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

с условиями разрыва в точке $a \in (0, \pi)$.

$$y(a+0) = \alpha y(a-0), \quad y'(a+0) = \alpha^{-1} y'(a-0), \quad (2)$$

и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0. \quad (3)$$

Здесь λ - комплексный параметр, $q(x)$, α - вещественные; $q(x) \in L_2(0, \pi)$, $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$.

Пусть $S(x, \lambda)$ является решением уравнения (1) с условиями разрыва (2) и начальными условиями $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$.

Собственные значения λ_n задачи (1)-(3) являются нулями функции $S(\pi, \lambda)$ и в [1] найдены для них асимптотическая формула. Обозначим

$$\alpha_n = \int_0^\pi S^2(x, \lambda_n) dx.$$

Числа $\{\alpha_n\}$ называются нормировочными числами, а числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ называются спектральными данными задачи (1)-(3). В случае $q(x) \equiv 0$ спектральные данные обозначим через $\{\lambda_n^0, \alpha_n^0\}$. Нас интересует следующая обратная задача: определить функцию $q(x)$ в уравнении (1) по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ задачи (1)-(3).

Для решения $S(x, \lambda)$ имеет место интегральное представление

$$S(x, \lambda) = S_0(x, \lambda) + \int_0^x A(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt, \quad (4)$$

где $A(x, t)$ - вещественная, непрерывная при $x \neq a$, $t \neq 2a - x$ функция, причем,

$$A(x, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{2} \alpha^\pm \int_0^x q(s) ds, & a < x < \pi, \quad \alpha^\pm = \frac{1}{2} (\alpha \pm \alpha^{-1}), \end{cases} \quad (5)$$

$$A(x, 2a - x + 0) - A(x, 2a - x - 0) = \frac{1}{2} \alpha^- \left(\int_a^x q(s) ds - \int_0^a q(s) ds \right),$$

и

$$S_0(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, & 0 < x < a, \\ \alpha^+ \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \alpha^- \frac{\sin \sqrt{\lambda} (2a - x)}{\sqrt{\lambda}}, & a < x < \pi. \end{cases}$$

Представление (4) можно написать в виде оператора преобразования

$$S(x, \lambda) = S_0(x, \lambda) + \int_0^x \bar{A}(x, t) S_0(t, \lambda) dt, \quad (6)$$

где

$$\bar{A}(x, t) = \begin{cases} A(x, t), & 0 < x < a, \quad 0 < t < x, \\ A(x, t), & a < x < \pi, \quad 0 < t < 2a - x, \\ A(x, t) + \frac{\alpha^-}{\alpha^+} A(x, 2a - t), & a < x < \pi, \quad 2a - x < t < a, \\ \frac{1}{\alpha^+} A(x, t), & a < x < \pi, \quad a < t < x. \end{cases} \quad (7)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ ядро $\bar{A}(x, t)$ из представления (6) удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$F(x, t) + \bar{A}(x, t) + \int_0^x \bar{A}(x, \xi) F(\xi, t) d\xi, \quad t < x, \quad (8)$$

где

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{S_0(x, \lambda_n) S_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{S_0(x, \lambda_n^0) S_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right). \quad (9)$$

Теорема 2. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ основное уравнение обратной задачи (8) имеет единственное решение $\bar{A}(x, t)$ из $L_2(0, \pi)$.

Следствие. Коэффициент $q(x)$ уравнения (1) однозначно определяется по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ задачи (1)-(3).

Коэффициент $q(x)$ строится по следующему алгоритму:

- 1) по заданным числам $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ строим функцию $F(x, t)$ по формуле (9);
- 2) находим функцию $\bar{A}(x, t)$ из уравнения (8);
- 3) находим функцию $A(x, t)$ из формулы (7);
- 4) вычислим $q(x)$ по формуле (5).

Литература

1. H.M. Huseynov, F.Z. Dostuyev. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2014, vol. XXXIV, No1, pp 57-66.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ОСОБЕННОСТЯМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО- ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гусейнов Т.Г. , Гусейнова А.Т.

Бакинский Государственный Университет

I. С начала рассмотрим некоторые свойства простейшей вариационной задачи

Пусть нам задана следующая простейшая задача вариационная исчисления. Решением $x_\varepsilon(t)$ исследуем зависимость решения от малого параметра ε .

$$I(x) = \int_0^1 (\varepsilon x^2 + x^2 + t^2) dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 0, x(1) = 1$$

$$1) \varepsilon > 0, \quad 2) \varepsilon < 0, \quad 3) \varepsilon = 0$$

$$1) \quad \varepsilon > 0, \quad x_\varepsilon(t) = \frac{sh \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}{sh \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}. \text{ сильно } \downarrow$$

- 2) $\varepsilon < 0, |\varepsilon| > \frac{1}{n^2}; x_\varepsilon(t) = \frac{\sin \frac{t}{\sqrt{|\varepsilon|}}}{\sin \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}}$. сильно $\uparrow$
- 3) $\varepsilon = 0$, нету экстремума

II Регулярные и сингулярные возмущения. Дадим теперь формальное определение. Рассмотрим два уравнения:

уравнения $A_0: \mathfrak{C}_0 u = f_0$;

уравнения $A_\varepsilon: \mathfrak{C}_0 u + \varepsilon \mathfrak{C}_1 u = f_0 + \varepsilon f_1$.

Здесь $\mathfrak{C}_0$ и $\mathfrak{C}_1$ – заданные операторы , f_0 и f_1 – заданные функции , ε – малый числовой параметр (в дальнейшем будем считать $\varepsilon > 0$) , u – искомая функция , зависящая от x (x может быть одномерной и многомерной переменной) Уравнение A_0 можно трактовать как упрощенную модель некоторого процесса, а уравнение A_ε – как расширенную модель. Члены $\varepsilon \mathfrak{C}_1$ и εf_1 представляют собой возмущение. Если уравнения A_0 и A_ε являются дифференциальными уравнениями, то добавим необходимые начальные или граничные условия (они также могут содержать малый параметр ε). Имея ввиду уравнение и соответствующие дополнительные условия, будем говорить о задачах A_0 и A_ε . Пусть эти задачи рассматриваются в области D т.е. $u = u(x), x \in D$. Решение задачи A_0 обозначим через $u_x(x)$, а задачи A_ε через $u_\varepsilon(x)$.

Основной вопрос теории возмущений состоит в следующем: будет ли разность $u_\varepsilon(x) - u_0(x)$ стремиться к нулю (в некоторой норме) при $\varepsilon \rightarrow 0$? В определенной степени ответ на этот вопрос зависит от нормы. В дальнейшем под нормой вектора $u(x) = col(u_1(x), \dots, u_k(x))$ в каждой точке x будем понимать евклидову норму $\|u(x)\| = \sqrt{u_1^2(x) + \dots + u_k^2(x)}$; в частности , если u

Сформируем теперь определение регулярно возмущенной и сингулярно возмущенной задач.

Определение. Задача A_ε называется регулярно возмущенной , если

$$\sup_D \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В противном случае задача A_ε называется сингулярно

возмущенной.

Здесь $\sup_D f(x)$ означает точную верхнюю грань функции $f(x)$ в области D . Из определения следует, что в случае регулярно возмущенной задачи решение $u_0(x)$ задачи A_0 во всей области D . Если же задача A_ε сингулярно возмущенная, то $u_0(x)$ при малых ε не будет близко к $u_\varepsilon(x)$ по крайней мере в какой-то части области D .

III. Асимптотические решение задачи с особенностями.

Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения выступают в качестве математических моделей во многих прикладных задачах механики, физики, техники, теории движения гироскопов и других областей науки.

Систематическое исследование таких уравнений началось после появления основополагающих работ А.Н.Тихонова [17-19], в которых доказаны широко известные теоремы о предельном переходе для системы линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной для начальных и граничных задач [1-24].

Значительный вклад в развитие теории сингулярно возмущенных начальных и граничных задач внесли работы М.И.Вишика, Л.А.Люстерник, А.Б.Васильевой, Б.Ф.Бутузова, М.Г.Дмитриева, Н.Багировой, Н.Н.Боголюбова, В.П.Маслова, Л.С.Понтрягина, Н.Х.Розова, Е.Ф.Мищенко, А.Н.Филатова, В.И.Рожкова, М.И.Иманалиева, С.А.Ломова, В.А.Треногина, В.А.Тупчиева, М.М.Хапаева, К.А.Касимова, К.Т.Ахмедова, К.Г.Гасанова, М.А.Ягубова, Т.Г.Гусейнова, А.Т.Гусейновой, М.А.Наджафова, М.Г.Джавадова и др.

Отметим, что при выполнении условия устойчивости асимптотическое поведение решения задачи с начальными условиями для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений полностью аналогично асимптотическому поведению решения начальной задачи для чисто дифференциальных уравнений, рассмотренной в [13-15]. Асимптотические разложения решений этих двух задач имеют одинаковый вид, и различие состоит лишь в том, что уравнения для коэффициентов асимптотического разложения в случае

интегро-дифференциальных уравнений является несколько более сложным, чем в случае дифференциальных уравнений

Таким образом, можно сказать, что добавление в дифференциальное уравнение интегрального члена привело лишь к некоторому усложнению алгоритма построения асимптотического разложения, а качественное поведение решения не изменилось.

В предлагаемой работе рассмотрена задача иного типа, когда добавление в дифференциальное уравнение интегрального члена приводит к качественному изменению поведения решения. Для простоты рассмотрим сначала одно скалярное линейное уравнение, исследуемое явление имеет место и для более сложных уравнений, что детально разобран в работах В.Ф.Бутузова [13-15], Т.Г.Гусейнова[1-8], А.Т.Гусейновой [11].

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\mu \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \quad (1)$$

На сегменте $0 \leq t \leq T$. Предположим, что $a(t)$, $b(t)$ непрерывные функции и $a(t) < 0$, $\mu > 0$.

Зададим дополнительное условие для $x(t, \mu)$ в точке $t=T$.

$$x(T, \mu) = x_0 \quad (2)$$

Очевидно, что решение $x(t, \mu)$ задачи Коши (1), (2) при $\mu \rightarrow 0$ стремится к бесконечности при $0 \leq t \leq T$.

Добавим в уравнение (1) интегральный член $\int_0^t K(t, s)x(s, \mu)ds$, где $K(t, s)$ – непрерывное ядро, в дальнейшем будем считать $a(t)$, $b(t)$, $K(t, s)$ – достаточно гладкими.

Получим уравнение

$$\mu \frac{dx}{dt} = a(t)x + \int_0^t K(t, s)x(s, \mu)ds + b(t) \quad (3)$$

Оказывается, что решению (t, μ) задачи (3), (2) при $\mu \rightarrow 0$ ведет себя совершенно иначе, нежели решение задачи (1), (2), а именно, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t), \quad (0 < t \leq T).$$

Однако $\bar{x}(t)$ не является решением соответствующего вырожденного интегрального уравнения, а определяется из некоторого интегрального уравнения (4)

$$0 = a(t) \bar{x}(t) + \int_0^t K(t, s)\bar{x}(s)ds + \bar{b}(t), \quad (4)$$

в котором свободный член $\bar{b}(t)$ отличается $b(t)$.

Отметим, что в данной работе авторами исследованы аналогичные явления для граничных задач, получены асимптотические разложения решений по малому параметру.

Литература

1. Гусейнов Т.Г. О сингулярно возмущенной задаче оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений. «Ученые записки» МВ и ССО, Аз.ССР, серия физ.-мат. наук, №3 1978.
2. Гусейнов Т.Г. Об одной сингулярно возмущенной задаче оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений. Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. Алма-Ата, 1979г., часть I, стр.61-62.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТЕЙ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Гусейнова А.

Бакинский Государственный Университет

Рассматривается следующая разностная схема для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u(0, t) = 0, \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t),$$

где $\gamma \in (0, 1]$ - числовой параметр. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ вводится равномерная сетка ω_h с шагом h , составленная из узлов $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$, причем $hN = 1$. Обозначим $y_i = y(x_i)$,

$$y_{\bar{x}, i} = (y_i - y_{i-1})/h, \quad y_{x, i} = (y_{i+1} - y_i)/h, \quad y_{\bar{x}\bar{x}, i} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2.$$

Вводим равномерную сетку по времени ω_l с шагом $l > 0$ состоящую из узлов $t_n = nl, n = 0, 1, \dots$ и обозначим

$$y_i^n = y(x_i, t_n), \quad y_n = (y_1^n, y_2^n, \dots, y_N^n)^T.$$

Заменяем исходную задачу разностной схемой с весами

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{l} = \sigma y_{\bar{x},i}^{n+1} + (1-\sigma)y_{\bar{x},i}^n, \quad i=1,2,\dots,N-1,$$

$$\frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{l} = \frac{2}{h} \left[\sigma (\gamma y_{x,0}^{n+1} - y_{\bar{x},N}^{n+1}) + (1-\sigma)(\gamma y_{x,0}^n - y_{\bar{x},N}^n) \right],$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i=0,1,\dots,N, \quad y_0^{n+1} = 0, \quad n=0,1,\dots$$

Исследуется и доказывається устойчивость данной разностной схемы.

ОБ АЛГОРИТМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФУЗИИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М.

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

$$(\alpha\lambda + \beta)y(0) + y'(0) + \omega y(\pi) = 0, \quad (2)$$

$$-\omega y(0) + \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0,$$

где $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ – вещественные функции, λ – спектральный параметр, $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ – произвольные вещественные числа. Легко убедиться, что характеристической функцией этой задачи будет

$$\delta(\lambda) = 2\omega - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\lambda), \quad (3)$$

где $\eta(\lambda) = c'(\pi, \lambda) + \gamma c(\pi, \lambda)$,

$$\sigma(\lambda) = s'(\pi, \lambda) + \gamma s(\pi, \lambda),$$

$c(x, \lambda)$, $s(x, \lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения (1), определяемая начальными условиями $c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0$. Нули γ_k ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) этой функции являются собственными значениями задачи (1), (2). Для них при $|k| \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\gamma_k = k + a - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha + \frac{(-1)^{k+1} b \omega - B}{k \pi} + \frac{\tau_k}{k}, \quad (4)$$

где
$$B = \frac{\beta + \alpha p(0)}{1 + \alpha^2} - \gamma - \pi a_1, \quad a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx,$$
$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [q(x) + p^2(x)] dx, \quad b = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \{\tau_k\} \in l_2.$$

Легко заметить, что нули v_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) функции $\sigma(\lambda)$ являются собственными значениями краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями $y(0) = y'(\pi) + \gamma y(\pi) = 0$. Они подчиняются следующей асимптотике:

$$v_k = k - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k + a + \frac{a_1 \pi + \gamma}{k \pi} + \frac{\xi_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2 < \infty. \quad (5)$$

Обозначим $\sigma_k = \operatorname{sign} [1 - |\omega s(\pi, v_k)|]$. Предположим, что $p(0) = 0$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача А. Даны $\{\gamma_k\}$, $\{v_k\}$, $\{\sigma_k\}$, построить коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ уравнения (1) и параметры $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ граничных условий (2).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. Задание величин $\{\gamma_k\}$, $\{v_k\}$, $\{\sigma_k\}$ однозначно определяет функции $p(x)$, $q(x)$ и параметры $\alpha, \beta, \gamma, \omega$. Решение обратной задачи А может быть получено по следующему алгоритму.

Алгоритм. 1) Находим a из (5) по формуле

$$a = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(v_k - k + \frac{1}{2} \right).$$

2) С помощью соотношения (4) определим параметры α и ω по формулам $\alpha = -\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \pi (\gamma_k - k - a)$ и

$$\omega = \frac{\pi}{b} \lim_{k \rightarrow \infty} k (\gamma_{2k+1} - \gamma_{2k} - 1), \quad \text{где } b = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

3) По последовательности $\{\gamma_k\}$ и параметру α построим функцию $\delta(\lambda)$, а по $\{v_k\}$ — функцию $\sigma(\lambda)$ в виде бесконечного

произведения.

4) Определим (в силу (4) и (5)) параметр β по формуле

$$\beta = (1 + \alpha^2) \lim_{k \rightarrow \infty} \left[b\omega - 2k\pi \left(\gamma_{2k+1} - v_{2k+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \alpha \right) \right].$$

5) Восстановим функцию

$$h_+(\lambda) = (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\lambda) - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda)$$

по соотношению $h_+(\lambda) = \delta(\lambda) - 2\omega$ (см. (3)).

6) Находим значение функции

$$h_-(\lambda) = (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\lambda) - \eta(\lambda) - \omega^2 s(\pi, \lambda)$$

в точках v_k следующим образом:

$$h_-(v_k) = (-1)^k \sigma_k \sqrt{h_+^2(v_k) - 4\omega^2}.$$

7) С помощью $\sigma(\lambda)$ и $h_+(v_k)$ восстановим функцию

$$g(\lambda) = h_+(\lambda) - h_-(\lambda) - 2\omega^2 \frac{\sin(\lambda - a)\pi}{\lambda} \quad (6)$$

по интерполяционной формуле

$$g(\lambda) = \sigma(\lambda) \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{g(v_k)}{(\lambda - v_k) \dot{\sigma}(v_k)},$$

$$\text{где } g(v_k) = h_+(v_k) - (-1)^k \sigma_k \sqrt{h_+^2(v_k) - 4\omega^2} - 2\omega^2 \frac{\sin(v_k - a)\pi}{v_k}$$

8) Определим $h_-(\lambda)$ из (6).

9) Характеристическую функцию $s(\pi, \lambda)$ краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$ определим по формуле

$$s(\pi, \lambda) = \frac{1}{2\omega^2} [h_+(\lambda) - h_-(\lambda)].$$

10) По последовательностям нулей функций $s(\pi, \lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ построим функции $p(x)$, $q(x)$ и параметр γ по известной процедуре (см., например, [1]).

Литература

1. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Матем. сборник, 2007, т. 198, № 11, с. 47-66.

ОБ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Исмаилов М.И.

Бакинский Государственный Университет

miqdadismailov1@rambler.ru

В работе рассматривается следующая одномерная смешанная задача

$$u_{tt}(t, x) - \alpha u_{xxx}(t, x) = F(u(t, x)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u(t, \ell) = u(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $0 < T < \infty$, $0 < \ell < \infty$, $0 < \alpha$ - фиксированное число, F - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, φ , ψ - заданные функции, а $u(t, x)$ - искомая функция.

Через $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}$, где $p \geq 2$ и $q = \frac{p}{p-1}$, обозначается

банахово пространство функций $u(t, x)$ вида

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{рассматриваемых на множестве}$$

$D_T = [0; T] \times [0, \ell]$, для которых $u_n(t) \in C^{(1)}([0; T])$, с конечной нормой

$$\|u\|_{B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1+\frac{2}{q}} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{2}{q}} \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим через $L_{p,p-2}^s(0, \ell)$, $L_{p,p-2}^c(0, \ell)$ банаховы пространства функций $f(x) \in L_1(0, \ell)$, для которых

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |f_n|^p < +\infty$, f_n - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по

системе $\left\{ \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{ \cos \frac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно, с нормой

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |f_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается функция $u(t, x) \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}$ удовлетворяющая условию (2) и интегральным тождествам:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^T \int_0^{\ell} u_t(t, x) v_t(t, x) dx dt + \int_0^T \left(\int_0^{\ell} \{F(u(t, x)) v(t, x) - \alpha u_{xx}(t, x) v_t(t, x)\} dx \right) dt \\ - \alpha \int_0^{\ell} \varphi''(x) v(0, x) dx + \int_0^{\ell} \psi(x) v(0, x) dx = 0, \end{aligned}$$

для любого $v(t, x): v(x, t), v_t(x, t) \in L_q(D_T)$, $v(T, x) = 0$, п.в. на $[0, \ell]$, $v(0, x) \in L_q(0, \ell)$;

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^T \int_0^{\ell} u_t(t, x) v_t(t, x) dx dt + \int_0^T \left(\int_0^{\ell} \{F(u(t, x)) v(t, x) - \alpha u_{tx}(t, x) v_x(t, x)\} dx \right) dt \\ + \int_0^{\ell} \psi(x) v(0, x) dx = 0, \end{aligned}$$

для любого $v(t, x): v_t(x, t), v_x(x, t), v(t, x) \in L_q(D_T)$, $v(T, x) = 0$ п.в. на $[0, \ell]$, $v(t, \ell) = v(t, 0) = 0$, $t \in [0, T]$, $v(0, x) \in L_q(0, \ell)$.

Лемма. Предположим, что $\varphi(x) \in C^{(1)}([0, \ell])$, $\varphi''(x) \in L_{p,p-2}^s(0, \ell)$, $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, $\psi(x) \in C([0, \ell])$, $\psi'(x) \in L_{p,p-2}^s(0, \ell)$, $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$. Пусть φ_n , ψ_n -

коэффициенты Фурье по системе $\left\{ \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^{\infty}$ функций $\varphi(x)$ и

$\psi(x)$ соответственно. Тогда $w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}$,

$$\text{где } w_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \right) \psi_n.$$

Справедлива теорема о существовании обобщенного решения задачи (1)-(3).

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \varphi(x) \in C^{(1)}([0, \ell]), \varphi''(x) \in L_{p,p-2}^s(0, \ell), \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0,$$

$$\psi(x) \in C([0, \ell]), \psi'(x) \in L_{p,p-2}^c(0, \ell), \psi(0) = \psi(\ell) = 0;$$

$$2) F : B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}} \rightarrow L_p([0, T], L_{p,p-2}(0, \ell)), \forall u \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}} \text{ и } t \in [0, T]:$$

$$\|F(u(t, \cdot))\|_{L_{p,p-2}(0, \ell)} \leq a(t) + b(t) \|u\|_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}},$$

где $a(t), b(t) \in L_p(0, T)$;

$$3) \forall u(t, x), v(t, x) \in K \left(\|u\|_{B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}} \leq R \right) \text{ и } t \in [0, T]:$$

$$\|F(u(t, \cdot)) - F(v(t, \cdot))\|_{L_{p,p-2}(0, \ell)} \leq c(t) \|u - v\|_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}},$$

где $c(t) \in L_p(0, T)$, $R^p = A \exp \int_0^T B^p(t) dt$,

$$A = 2^{p-1} \|w\|_{B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}}^p + L_0^p \|a\|_{L_p(0,T)}^p, \quad B(t) = L_0 b(t),$$

$$L_0 = 2^{\frac{2}{q}} \cdot \frac{\ell^2 q^{\frac{1}{q}} T^{\frac{1}{q}} + \ell^{\frac{2}{q}} \alpha^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{2}{p}}}{\alpha \pi^2 q^{\frac{1}{q}}}.$$

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение.

Литература

1. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвертого порядка// Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2007. № 1. С. 5–14.

2. Ismailov M.I. On the solution for a class of third order pseudohyperbolic equations// Journal of Contemporary Appl. Math., v.1, 2011, № 1, 43-53.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $B_{p,\alpha}^{\bar{l}}$

Кочарли А.Ф.

Бакинский Государственный Университет

Через Ω будем обозначать область n – мерного евклидова пространства E^n вида

$$\Omega = \{x; x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}, \varphi(x') < x_n < \infty\},$$

где функция $\varphi(x')$, описывающая уравнение границы, удовлетворяет условию Гельдера

$$|\varphi(x') - \varphi(y')|^{l_n} \leq M \left(\sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^{l_i} \right),$$

(l_i – неотрицательные, $i = 1, 2, \dots, n$) и будем рассматривать эквивалентные нормировки изучаемых функциональных пространств (в силу леммы 2 из [1]), когда вместо $\rho(x, \partial, \Omega)$ взято $\pi(x)$.

При этих предположениях доказывается

Теорема 1. Пусть $f(x) \in B_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)$, $1 < p < q < \infty$,

$$\mathfrak{x} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{l_i} - \frac{1}{l_n} \quad (\alpha - \beta) \geq 0,$$

$$\alpha \geq \beta > -\frac{1}{q}, \quad \alpha \neq k - \frac{1}{p} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда $D^\nu f(x) \in L_{q,\beta}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|D^\nu f\|_{L_{q,\beta}(\Omega)} \leq C \|f\|_{B_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)},$$

где C – константа, независимая от $f(x)$.

Доказательство этой теоремы сперва проводится для предельного случая $\mathfrak{x}=0$, затем для случая $\mathfrak{x}>0$. Отметим, что в этом случае доказательство ведется по той же схеме, что и для

предельного случая. С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. Пусть $f(x) \in B_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)$, $1 < p < q < -\infty$,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} - \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{l_i} - \frac{1}{l_n} (\alpha - \beta) > 0 \\ \alpha &\geq \beta > -\frac{1}{q}, \quad \alpha \neq k - \frac{1}{p} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ r_i &= l_i \quad (r_i - \text{целые}, \quad i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Тогда $D^v f(x) \in W_{q,\beta}^r(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|D^v f\|_{W_{q,\beta}^r} \leq C \|f\|_{B_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)},$$

где C не зависит от $f(x)$.

Теорема 2 доказывается в непердельном случае при $\alpha > 0$. Заметим, что при $\alpha = 0$ эта теорема не верна даже в невесовом случае при $p > 2$. При $\alpha = 0$ эта теорема имеет место для $\alpha - \beta = k + \mu$ ($k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \mu < 1$), т.е. при $\mu \neq 0$. Доказательство теоремы в этом случае ($\alpha = 0$, $\mu \neq 0$) по существу содержится в доказательстве теоремы 2 для случая $\alpha - \beta = k + \mu$, $0 < \mu < 1$.

Теорема 3. Пусть $f(x) \in W_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)$, $1 < p < q < \infty$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} - \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{l_i} - \frac{1}{l_n} (\alpha - \beta) > 0, \\ v &= (v_1, \dots, v_n), \quad v_i - \text{целые}, \quad r_i = l_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ \alpha &\geq \beta > -\frac{1}{q}, \quad \alpha \neq k - \frac{1}{p} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Тогда $D^v f(x) \equiv f^{(v)}(x) \in b_{q,\beta}^{\bar{l}}(\Omega)$ и имеет место неравенство

$$\|D^v f\|_{b_{q,\beta}^{\bar{l}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)},$$

причем C не зависит от $f(x)$.

При выполнении всех условий теоремы 3 верна оценка

$$\|D^v f\|_{B_{q,\beta}^{\bar{l}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_{p,\alpha}^{\bar{l}}(\Omega)} \quad (*)$$

При $\Omega = E_+^n$, $\alpha \geq \beta \geq 0$ неравенство (*) доказана А.Ф.Джабраиловым в неопределённом случае [2]. Отметим также работу [3] Р.Д.Кулова, в которой аналогичное неравенство установлено для $\Omega = E_+^n$, но в левой части норма не весовая.

Литература

1. А.Ф.Кочарли. Некоторые весовые теоремы вложения в области с негладкой границей. –ДАН СССР. 1974, 131, 128-146.
2. А.Д.Джабраилов. К прямым и обратным теоремам вложения весовым пространств. –ДАН СССР, 1965, 164, 1, 24-27.
3. Р.Д.Кулов. О теоремах вложениях для пространств Бесова со смешанной нормой. –ДАН СССР, 1970. 194, 2, 265-267.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Кулиев Г.Ф., Рамазанова А.Т.

Бакинский Государственный Университет
ramazanova-aysel@mail.ru

В работе рассматривается задача определения правой части уравнения поперечных колебаний стержня. Эта задача приводится к задаче оптимального управления. Доказывается необходимое и достаточное условие оптимальности.

Известно, что ряд задач математической физики, техники, механики и т.д. описываются уравнениями с частными производными четвертого порядка [1–3]. Поэтому исследование задач оптимального управления в процессах, описываемых такими уравнениями является актуальным.

Ключевые слова: стержень, поперечные колебания, задача оптимального управления.

Постановка задачи: Рассмотрим краевую задачу для уравнения поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = v(x, t), \quad (x, t) \in Q = \{0 < x < l, \quad 0 < t < T\}, \quad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x), u_t(x,0)=\varphi_1(x), \quad (2)$$

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0, u_x(0,t)=0, u_x(l,t)=0, \quad (3)$$

где $\varphi_0 \in W_2^{(0)}(0,l)$, $\varphi_1 \in L_2(0,l)$ - заданные функции, а функция $v(x,t) \in L_2(Q)$ подлежит определению.

Отметим, что при каждой фиксированной функции $v(x,t) \in L_2(Q)$ краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение из пространства $W_2^{2,1}(Q)$.

Чтобы определить $v(x,t)$, зададим дополнительное условие

$$u(x_0,t)=\varphi(t), \quad (4)$$

где $x_0 \in (0,l)$, а $\varphi(t) \in L_2(0,T)$ - заданная функция.

Эту задачу приводим к следующей задаче оптимального управления:

требуется определить такую функцию $v(x,t) \in L_2(Q)$, которая минимизирует функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T (u(x_0,t;v) - \varphi(t))^2 dt \quad (5)$$

вместе с решением краевой задачи (1)–(3). Функцию $v(x,t)$ назовем управлением.

Если мы найдем такое управление $v(x,t)$, что оно доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется.

Функционал (5) дифференцируем в $L_2(Q)$.

Введем следующую сопряженную задачу к задаче (1)–(3), (5).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = -[u(x,t;v) - \varphi(t)] \delta(x - x_0), \quad (6)$$

$$\psi(x,T)=0, \psi_t(x,T)=0 \quad (7)$$

$$\psi(0,t)=0, \psi(l,t)=0, \psi_x(0,t)=0, \psi_x(l,t)=0. \quad (8)$$

Берем два управления: $v(x,t)$, $v(x,t) + \delta v(x,t) \in L_2(Q)$.

Найдем приращения функционала (5)

$$\delta J(v) = J(v + \delta v) - J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \{ [u(x_0, t; v + \delta v) - \varphi(t)]^2 - [u(x, t; v) - \varphi(t)]^2 \} dt,$$

где

$$u(x, t; v + \delta v) = u(x, t; v) + \delta u(x, t)$$

отсюда следует, что

$$\delta J(v) = \int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)] \delta u(x_0, t) dt + R, \quad (9)$$

где

$$R = \frac{1}{2} \int_0^T (\delta u(x_0, t))^2 dt,$$

а $\delta u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ является обобщенным решением следующей краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 \delta u}{\partial x^4} = \delta v, \quad (10)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \delta u_t(x, 0) = 0, \quad (11)$$

$$\delta u(0, t) = 0, \quad \delta u(l, t) = 0, \quad \delta u_x(0, t) = 0, \quad \delta u_x(l, t) = 0, \quad (12)$$

т.е. для любой функций $\forall \eta \in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta(x, T) = 0$, $\eta(0, t) = 0$,

$$\eta(l, t) = 0, \quad \eta_x(0, t) = 0, \quad \eta_x(l, t) = 0,$$

выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T \int_0^l \left(-\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dx dt - \iint_Q \delta v \eta dx dt = 0. \quad (13)$$

Поскольку функция $\psi(x, t)$ является обобщенным решением задачи (6)–(8) для любой функции $g \in W_2^{2,1}(Q)$, $g(x, 0) = 0$, $g(0, t) = 0$, $g(l, t) = 0$, $g_x(0, t) = 0$, $g_x(l, t) = 0$, выполняется интегральные тождества

$$\int_0^T \int_0^l \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dx dt + \int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)] g(x_0, t) dt = 0. \quad (14)$$

В тождества (13) в место $\eta(x, t)$ берем $\psi(x, t)$, а в тождества (14) в место $g(x, t)$ берем $\delta u(x, t)$. Из полученного первого

тождества вычтем второе тождество.

Тогда имеем

$$-\iint_Q \delta v \cdot \psi dx dt - \int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)] \delta u(x_0, t) dt = 0. \quad (15)$$

Поэтому (9) и (15) следует, что

$$\delta J(v) = \iint_Q -\psi(x, t) \delta v(x, t) dx dt + R. \quad (16)$$

Отсюда следует, что градиент функционала (5) имеет вид;

$$J'(v) = -\psi(x, t)$$

Теорема: Для того чтобы управление $v_0(x, t)$ было оптимальным управлением в задаче (1)–(4), (5) необходимо и достаточно, что $\psi(x, t) = 0$, $(x, t) \in Q$.

Доказательство: Пусть $v_0(x, t)$ оптимальное управление в задаче (1)–(4), (5), тогда в силу известной теоремы из [3]

$$\langle J'(v), v - v_0 \rangle \geq 0, \quad \forall v \in L_2(Q),$$

т.е.

$$\iint_Q (-\psi(x, t))(v(x, t) - v_0(x, t)) dx dt \geq 0, \quad \forall v \in L_2(Q).$$

отсюда следует, что

$$J'(v_0) = \psi(x, t) = 0.$$

Из последнего равенства получаем необходимость теоремы. Так как задача (1)–(4), (5) является линейно-квадратичной задачей, полученное условие являются и достаточным для оптимальности управления $v_0(x, t)$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.:1976, 736с.
2. Комков В. Теория оптимального управления демпфиро-

- нием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 158 с.
3. Васильев Ф.П., Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ НЕЧЕТКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Курбанов Ф.И., Алиев З.Т.

Бакинский Государственный Университет

Искусственные нейронные сети в последнее время приобрели широкую популярность благодаря способностям сравнительно легко адаптироваться к требованиям различных практических приложений [1]. Каждая разновидность нейронных сетей имеет свои особенности, например, по возможностям обучения, методам обобщения и выработки требуемых выводов. Эти особенности делают ее наиболее пригодной для решения одного класса задач и менее пригодной для другого [3]- [4].

Для улучшения устойчивости, чувствительности и других качеств нейронных сетей в последнее время широко применяются идеи теории нечетких множеств [2].

Нечеткая нейронная сеть определяется заменой операций сложения и умножения нечеткими операциями t -нормы и t -конормы [3]- [4].

Рассмотрим простую нейронную сеть, имеющую два входа и только один нейрон. Входные сигналы x_i взаимодействуют с весами w_i образуя произведения

$$p_i = w_i x_i, \quad i = 1, 2$$

Эти произведения объединяются с использованием операции суммирования, образуя вход net нейрона:

$$net = p_1 + p_2 = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

Выход нейрона образуется в результате преобразования входа net некоторой активационной функцией :

$$y = f(net) = f(w_1 x_1 + w_2 x_2) \quad (1)$$

например сигмоидального типа

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Приведенную однейронную сеть, в которой используются операции умножения, суммирования и сигмоидная функция активации будем называть стандартной нейронной сетью.

Нечеткой нейронной сетью называется нейронная сеть с четкими сигналами, весами и активационной функцией, но с объединениями x_i и w_i , p_1 и p_2 с использованием t -нормы, t – конормы или некоторых других непрерывных операций.

Нечеткий нейрон "И" получается следующим образом. Сигналы x_i и w_i в данном случае объединяются с помощью t -конормы:

$$p_i = S(w_i, x_i), \quad i=1,2$$

а выход образуется с применением треугольной нормы

$$y = T(p_1, p_2) = T(S(w_1, x_1), S(w_2, x_2)) \quad (2)$$

если принять

$$T = \min, \quad S = \max$$

тогда нечеткий нейрон "И" реализует композицию *min-max*:

$$y = \min(w_1 \vee x_1, w_2 \vee x_2)$$

Нечеткий нейрон "ИЛИ" получается следующим образом.

Сигналы x_i и веса w_i здесь объединяются с помощью t -нормы:

$$p_i = T(w_i, x_i), \quad i=1,2$$

а выход образуется с применением треугольной конормы

$$y = s(p_1, p_2) = S(T(w_1, x_1), T(w_2, x_2)) \quad (3)$$

Если принять

$$T = \min, \quad S = \max$$

тогда нечеткий нейрон "ИЛИ" реализует композицию *max-min*:

$$y = \max(w_1 \wedge x_1, w_2 \wedge x_2).$$

При практическом использовании нечетких нейронных сетей производится обучение на основе обучающего множества [4]

$$\{(x^1, y^1), (x^2, y^2), \dots, (x^N, y^N)\}$$

Допустим, что у нас имеется 3 нейронных сетей, в каждом из которых реализуется N нейронов. Первая сеть состоит только из стандартных нейронов (1), вторая только из "И" нейронов (2), а третья только из "ИЛИ" нейронов (3). После обучения этих сетей, допустим получили следующие множества весов для соответствующих сетей $\{w_i^1\}_{i=1}^n$, $\{w_i^2\}_{i=1}^n$ и $\{w_i^3\}_{i=1}^n$.

После тестирования этих сетей с помощью примеров, допустим получим следующие проценты достоверности для соответствующих сетей

$$k_1, k_2, k_3, \text{ где } 0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq 100$$

Рассмотрим следующую нейронную сеть с весами $\{\alpha_1 w_i^1 + \alpha_2 w_i^2 + \alpha_3 w_i^3\}_{i=1}^n$

Здесь, коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выбраны по следующей методике:

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3}, \quad \alpha_3 = \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Они обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Полученный сеть будем называть гибридной нечеткой сетью. С помощью нового обучения и варьирования коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно оптимизировать гибридную сеть и повысить процент достоверности.

Литература

1. М.С.Тарков *Нейрокомпьютерные системы*. Москва -2006
2. Г.Э.Яхьяева *Нечеткие множества и нейронные сети*. Москва-2006
3. В.В.Круглов, В.В.Борисов *Искусственные нейронные сети. Теория и практика*, Москва-2001
4. В.В.Круглов, М.И. Длин *Интеллектуальные информационные системы*, Москва -2002

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С НЕЧЕТКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Курбанов Ф.И., Мамедова Н.Г.

Распространение поперечно-магнитных волн идеально проводящего полого волновода с кусочно гладким поперечным сечением приводит [1] к первой краевой задаче для двумерного

уравнения Гельмгольца. Проблема построения эффективных вычислительных алгоритмов расчета собственных значений и собственных функций этого уравнения является актуальной задачей.

Устойчивость задачи в зависимости от начальных условий тесно связано с нечеткостью начальных условий. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad (x, y) \in D \\ u|_{\Gamma} &= \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Γ является границей прямоугольной области $D\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$

θ является нечетким нулем треугольного вида:

$$\theta = (-h, 0, h), [2]$$

где, носителем является отрезок $[-h, h]$

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{x+h}{n}, & -h \leq x \leq 0 \\ \frac{x-h}{-h}, & 0 < x \leq h \\ 0, & x < -h, x > h \end{cases}$$

Пусть множество чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ разбивает отрезок $[0,1]$ на n частей:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1$$

Будем рассматривать α уровни нечеткого числа θ :

$$\theta^\alpha = \{x \mid \theta(x) \geq \alpha\}.$$

Для каждого α_i можем поставить две краевые задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u} + \lambda \bar{u} &= 0 \\ \bar{u}|_{\Gamma_1} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\bar{u}} + \lambda \bar{\bar{u}} &= 0 \\ \bar{\bar{u}}|_{\Gamma_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Задача (2) рассматривается во внутреннем прямоугольнике D_1 , задача (3) на внешнем прямоугольнике D_2 относительно прямоугольника D , где $D_1 \subset D \subset D_2$.

Для решения задач (2)-(3) предлагается следующий итерационный метод.

Пусть известны n – собственных функций и соответствующих собственных значений

$$k_1^2, k_2^2, \dots, k_{n-1}^2$$

$$u^{(1)}(x, y), u^{(2)}(x, y), \dots, u^{(n-1)}(x, y).$$

Для вычисления n -го собственного значения и собственной функции начиная с функции начального приближения $u_0^{(n)}$ определим последовательность

$$k_{n,1}^2, k_{n,2}^2, \dots, k_{n,p}^2, \dots$$

и последовательность функций

$$u_1^{(n)}(x, y), u_2^{(n)}(x, y), \dots, u_p^{(n)}(x, y) \dots$$

с помощью следующих соотношений:

$$\Delta \bar{u}_{p+1}^{(n)} = -k_{n,p}^2 u_p^{(n)}, \bar{u}_{p+1} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

$$U_{p+1}^{(n)} = \bar{u}_{p+1}^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} c_j^{p+1} u_j^{(j)} \quad (5)$$

$$u_{p+1}^{(n)} = U_{p+1}^{(n)} \left\{ \int_P [U_{p+1}^{(n)}]^2 dx dy \right\}^{-1/2} \quad (6)$$

Как известно [3], указанный итерационный последовательность сходится равномерно.

После применения итерационного метода (4)-(6) к задачам (2)-(3) мы получим два набора приближенных K собственных значений оператора Лапласа для каждого α_i уровня:

$$\{\bar{\lambda}_m^{\alpha_i}\}_{i=1}^n, \{\overline{\bar{\lambda}}_m^{\alpha_i}\}_{i=1}^n, \text{ где } 1 \leq m \leq k \quad (7)$$

Добавим к собственным значениям (7) K собственных значений оператора Лапласа вычисленный для прямоугольника D для обычного нулевого краевого условия:

$$\begin{aligned}\Delta u + \lambda u &= 0 \\ u|_{\Gamma} &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

Пусть $\{\lambda_m\}_{m=1}^k$ приближенные собственные значения задачи (8), вычисленные итерационным методом (4)-(5).

Таким образом, объединяя множества (7) с значениями $\{\lambda_m\}_{m=1}^k$ мы получим множество нечетких собственных значений задачи

$$\{\lambda_m\}_{m=1}^k = \bigcup_{i=1}^n \{\bar{\lambda}_m^{\alpha_i}, \lambda_m, \overline{\bar{\lambda}_m^{\alpha_i}}\}.$$

Литература

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва, Наука 1973 с. 265-321.
2. Г.Э.Яхьяева Нечеткие множества и нейронные сети. Москва-2006.
3. Ф.И.Курбанов Численный метод расчета собственных функций оператора Лапласа Вест. Москв. Ун-та СЕР 15 Вычислительная математика и кибернетика, 1982, №4, с. 16-21.

О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОДНОМЕРНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА ПОЛУОСИ с δ' – ПОТЕНЦИАЛОМ

Мамедов М.Н.

Бакинский Государственный Университет

В данной работе доказана самосопряженность оператора $\frac{d^4}{dx^4} + \beta \delta'(x - x_0)$ в пространстве $L_2(0, +\infty)$, где $\delta'(x - x_0)$ – обобщенная производная функции Дирака $\delta(x - x_0)$, $x_0 \in (0, +\infty)$ – фиксированная точка, $0 \neq \beta \in (-\infty, +\infty)$. Кроме того, показана, что резольвента этого оператора является интегральным оператором и найдено представление для интегрального ядра.

Обозначим через $D(A)$ множество функций

$$f(x) = \int_0^{+\infty} G(x, y; -\lambda^4) g(y) dy + \beta f'(x_0) G(x, x_0; -\lambda^4) +$$

удовлетворяющих условиям

$$f(0)=0, \quad f'(0)=0, \quad f''(x_0-0)-f''(x_0+0)=\beta f(x_0), \quad (1)$$

$$f'''(x_0+0)-f'''(x_0-0)=\beta f'(x_0). \quad (2)$$

Определим в пространстве $L_2(0,+\infty)$ оператор A :

$$Af = \frac{d^4 f}{dx^4} + \beta \delta'(x-x_0) \cdot f, \quad f \in D(A),$$

где произведение $\delta'(x-x_0) \cdot f$ определяется равенством:

$$\delta'(x-x_0) \cdot f = -f''(x_0)\delta(x-x_0) + f(x_0)\delta'(x-x_0). \quad (3)$$

Некоторые спектральные свойства бигармонического оператора с потенциалом Дирака изучены в работах [1-3].

Теорема. Оператор A самосопряжен в пространстве $L_2(0,+\infty)$. Резольвента оператора A является интегральным оператором в пространстве $L_2(0,+\infty)$.

Доказательство. Поскольку A -замкнутый симметрический оператор, то для доказательства его самосопряженности достаточно показать, что резольwentное множество этого оператора содержит вещественные числа ([4], следствие теоремы $X \cdot 1$).

Найдем резольвенту оператора A . Решаем в пространстве $L_2(0,+\infty)$ уравнение:

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + \beta \delta'(x-x_0) \cdot f + \lambda^4 f = g, \quad (g \in L_2(0,+\infty), \lambda > 0).$$

В силу формулы (3) это уравнение запишем в следующем виде

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} + \lambda^4 \right) f = g + \beta f'(x_0)\delta(x+x_0) - \beta f(x_0)\delta'(x-x_0) \quad (4)$$

Известно [3], что резольвента оператора $A_0 = \frac{d^4}{dx^4}$ с областью определения

$$D(A_0) = \{f \in W_2^4(0,+\infty): f(0)=0, \quad f'(0)=0\}$$

в пространстве $L_2(0,+\infty)$ является интегральным оператором и интегральное ядро $G(x, y; -\lambda^4)$ имеет вид

$$G(x, y; -\lambda^4) = \frac{1}{2\lambda^3} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y|} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y| + \frac{\pi}{4}\right) - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda^3} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|(x+y)|} \left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Применяя обратный оператор $(A_0 + \lambda^4)^{-1}$ к обеим частям уравнения (4), получаем

$$f(x) = \int_0^{+\infty} G(x, y; -\lambda^4) g(y) dy + \beta f'(x_0) G(x, x_0; -\lambda^4) + \\ + \beta f'(x_0) G'_y(x, x_0; -\lambda^4). \quad (5)$$

Отсюда и из условий (1), (2) для определения величины $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \beta G'_y(x_0, x_0; -\lambda^4)) f(x_0) - \beta G(x_0, x_0; -\lambda^4) f'(x_0) = \\ = \int_0^{+\infty} G(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy, \\ -\beta G''_{yx}(x_0, x_0; -\lambda^4) f(x_0) + (1 - \beta G'_x(x_0, x_0; -\lambda^4)) f'(x_0) = \\ = \int_0^{+\infty} G'_x(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy. \end{array} \right.$$

Очевидно, что $G'_y(x_0, x_0; -\lambda^4) = G'_x(x_0, x_0; -\lambda^4)$. Обозначим

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \beta G'_x(x_0, x_0; -\lambda^4) & -\beta G(x_0, x_0; -\lambda^4) \\ -\beta G''_{yx}(x_0, x_0; -\lambda^4) & 1 - \beta G'_x(x_0, x_0; -\lambda^4) \end{vmatrix}, \\ \Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \int_0^{+\infty} G(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy & -\beta G(x_0, x_0; -\lambda^4) \\ \int_0^{+\infty} G'_x(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy & 1 - \beta G'_x(x_0, x_0; -\lambda^4) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \beta G'_x(x_0, x_0; -\lambda^4) & \int_0^{+\infty} G(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy \\ -\beta G''_{xx}(x_0, x_0; -\lambda^4) & \int_0^{+\infty} G'_x(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то $f(x_0) = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, $f'(x_0) = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$.

Отсюда и из (5) находим

$$f(x) = \int_0^{+\infty} K(x, y; -\lambda^4) g(y) dy,$$

где $K(x, y; -\lambda^4)$ – интегральное ядро.

Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} 8\lambda^4 - e^{-\sqrt{2}\lambda x_0} [8\beta\lambda^2(1 - \cos \sqrt{2}\lambda x_0) - 2\beta^2(2 - \cos \sqrt{2}\lambda x_0)] - \\ - \beta(1 + e^{-2\sqrt{2}\lambda x_0}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказывается, что уравнение (6) имеет единственное положительное решение $\lambda_0 > 0$. Следовательно, существуют числа $\lambda > 0$ такие, что $\Delta(\lambda) \neq 0$. Эти числа принадлежат резольвентному множеству оператора A .

Кроме того, справедливо равенство:

$$R_{-\lambda^4}(A)g(x) = (A + \lambda^4)^{-1} g(x) = \int_0^{+\infty} K(x, y; -\lambda^4) g(y) dy. \quad (7)$$

Таким образом, резольвентное множество оператора A содержит вещественные числа. Следовательно, оператор A самосопряжен в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Далее, равенство (7) означает, что резольвента $R_z(A) = (A - zE)^{-1}$ оператора A является интегральным оператором в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Теорема доказана.

Литература

1. Голощапова Н.И., Оридорога Л.Л. Дифференциальный оператор четвертого порядка с локальными точечными взаимодействиями. Укр. матем. вісник. 2007, т.4, №3, с. 355 – 369.
2. Manko S.S. On spectral properties of the fourth order differential

operator with singular coefficients. Mat. Stud. 2010, v.33, №2, p.173-191.

3. Гейдаров А.Г., Мамедов М.Н. Спектральный анализ одномерного бигармонического оператора на полуоси с потенциалом Дирака. Вестник Бакинского ун-та, 2014, №1, с.50-57.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИН

Мамедова П.И.

Бакинский Государственный Университет.

mparvana1994@mail.ru

Рассмотрим уравнение (1) :

$$u_{ttt}(x, t) + 2\alpha u_{ttxx}(x, t) + \alpha^2 u_{xxxx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим для него в области

$$D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

краевую задачу с граничными условиями

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x),$$

$$u_{tt}(x, T) = \varphi_3(x), \quad u_{ttt}(x, 0) = \varphi_4(x) \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, 1) = u_{xx}(0, 1) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

где $\varphi_i(x) i = (\overline{1, 4})$ - заданные функции, а $u(x, t)$ - искомая функция.

Определение. Под классическим решением задачи (1) - (3) понимем функцию $u(x, t)$, непрерывную в замкнутой области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), условиям (2), (3) в обычном смысле.

С помощью метода Фурье искомая задача эквивалентным образом редуцируется к разрешимости интегрального уравнения, существование и единственность которого доказывается с использованием принципа сжатых отображений.

Литература

1.Курдюмов А.А. Строительная механика корабля и теории упругость. М.: Судостроение, 1968. С.419.

РАСШИРЕНИЯ ОДНОГО ОПЕРАТОРА ТОЧЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Мустафаев Э.М., Мухтарова А.А.

Бакинский Государственный Университет

Рассмотрим непрерывный оператор

$$-\Delta + \sum_{k=1}^n \delta(x - \xi_k)$$

из $C(E_3)$ в $[C_0^\infty(E_3)]'$. Здесь $\delta(x)$ - функция Дирака, $\xi_k \in E_3$, $\xi_k \neq \xi_m$ при $k \neq m$. Обозначим через A_0 сужение этого оператора, порожденное выражением $-\Delta$ с областью определения

$$D(A_0) = \{\psi \in L_2 \cap C(E_3) \mid -\Delta\psi \in L_2, \psi(\xi_k) = 0, k = \overline{1, n}\}.$$

Определение. Оператор V называется допустимым, если $V\psi - \psi \in D(A_0)$ лишь при $\psi = 0$.

Положим $M_\lambda = (A_0 - \lambda I)D(A_0)$, $N_\lambda = L_2 \setminus M_\lambda$, $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Доказывается, что

$$N_\lambda = L(\{f_k\}_{k=1}^n), \quad N_{\bar{\lambda}} = L(\{f_k\}_{k=1}^n),$$

где

$$f_k = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-\xi_k|}}{4\pi|x-\xi_k|}, \quad \varphi_k = \frac{e^{i\sqrt{\bar{\lambda}}|x-\xi_k|}}{4\pi|x-\xi_k|},$$

L является линейной оболочкой системы функций в скобках. Обозначим через S_λ при $\text{Im } \lambda \neq 0$ класс всех линейных нестягивающих операторов $V: N_\lambda \rightarrow N_{\bar{\lambda}}$, необязательно заданных на всем N_λ .

Доказана

Теорема. При любом линейном нестягивающем операторе $V \in S_\lambda$ все диссипативные расширения оператора A_0 задаются в виде

$$\psi = \psi_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k, \quad \alpha_k, \beta_k \in R,$$

$$A_V(\psi) = -\Delta\psi + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) \delta(x - \xi_k) + (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \sum_{k=1}^n (\beta_k \varphi_k + \alpha_k f_k).$$

Литература

1. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметричного оператора // Изв. АН СССР, серия матем., 1968, т.32, №1.

ФЛАТТЕР КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ ОБТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Наджафов М.А.

Азербайджанский Госуд. Педагогич. Университет

Представим себе пологую оболочку с главными кривизнами в недеформированном состоянии, k_x, k_y ; на опорной поверхности введем ортогональную систему координат x, y , совпадающую с проекциями линий главных кривизн. Напряженно-деформированное состояние оболочки характеризуется функцией нормальных прогибов $w(x, y, t)$ и функцией напряжений $\Phi(x, y, t)$, так что напряжения в средней поверхности определяются по формулам:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Система уравнений движения оболочки имеет вид

$$D \Delta^2 w = h L(w, \Phi) + h \left(k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = q(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$\Delta^2 \Phi = -\frac{E}{2} L(w, w) - E \left(k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$
$$L(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Здесь $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$, E, ν, ρ - модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, h - ее толщина.

Избыточное аэродинамическое давление $q = q(x, y, t)$, как будет показано ниже, в общем случае состоит из двух частей -

квазистатической $q_0 = (x, y)$ и динамической $q_1 = (x, y, t)$, соответственно этому выделим основное состояние оболочки $w_0 = (x, y), \Phi_0 = (x, y)$ и возмущенное $w_1 = (x, y, t), \Phi_1 = (x, y, t)$. Примем

$$w = (x, y, t) = w_0(x, y) + w_1(x, y, t)$$

$$\Phi = (x, y, t) = \Phi_0(x, y) + \Phi_1(x, y, t)$$

Подставим это в (1) и линеаризуем по малым возмущениям; в результате получим:

Уравнения основного (квазистатического) состояния

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w_0 &= hL(w_0, \Phi_0) + h \left(k_x \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \right) + q_0(x, y) \\ \Delta^2 \Phi_0 &= -\frac{1}{2} L(w_0, w_0) - E \left(k_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Систему этих уравнений следует дополнить граничными условиями

$$x, y \in \Gamma : w_0 = 0, M_1(w_0) = 0, M_2(\Phi_0) = 0, M_3(\Phi_0) = 0 \quad (3)$$

дифференциальные операторы M_i в каждом отдельном случае будут выписаны.

Уравнения возмущенного (динамического) состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w_1 &= hL(w_1, \Phi_0) + hL(w_0, \Phi_1) + h \left(k_x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \right) + \\ &+ q_1(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta^2 \Phi_1 = -\frac{E}{2} L(w_0, w_1) - E \left(k_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right).$$

Функции w_1, Φ_1 следует подчинить начальным условиям и тем же краевым (3).

Возможные упрощения системы (2)-(4) состоят в следующем. Если квазистатические изменения кривизны $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$ малы по сравнению с начальными, то в уравнениях (2) отбрасываются слагаемые $L(w_0, \Phi_0), L(w_0, w_0)$ и эта система стано-

вится линейной. Соответственно в уравнениях (4) отбрасываются слагаемые $L(w_0, \Phi_1), L(w_0, w_0)$. Если заранее известно, что квазистатические прогиб и напряжения малы (например, как в случае обтекания без угла атаки конуса малого угла раствора), то можно ограничиться исследованием линейной системы для возмущений

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w_1 &= h \left(k_x \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \right) + q_1(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}; \\ \Delta^2 \Phi_1 + E \left(k_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача, как видно, станет замкнутой в математическом отношении, если будут известны выражения для давления аэродинамического взаимодействия — квазистатической и динамической. В дальнейшем будет показано, что динамическая часть давления пропорциональна прогибу w_1 и его производным по координатам и времени; это позволяет решение задачи представить в классе функций:

$$w_1 = W(x, y) \exp(\omega t), \Phi_1 = F(x, y) \exp(\omega t).$$

Соответственно этому получим. $q_1 = p_1(x, y) \exp(\omega t)$.

Если подставить это в систему (4) и учесть граничные условия, мы придем к задаче на собственные значения для системы несамосопряженных линейных дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} D\Delta^2 W &= hL(W, \Phi_0) + hL(w_0, F) + h \left(k_x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \\ &+ \rho_1(x, y, \omega) - gh\omega^2 W; \\ \Delta^2 F &= -\frac{E}{2} L(w_0, W) - E \left(k_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$x, y \in \Gamma : W = 0, M_1(W) = 0, M_2(F) = 0, M_3(F) = 0$$

Задача (6) имеет комплексный спектр. По определению принимаем, что колебания устойчивы, если $\text{Re } \omega < 0$, неустойчивы, если $\text{Re } \omega > 0$; границы областей устойчивости и неустойчивости соответствует условие $\text{Re } \omega = 0$, из него же находится критическая комбинация параметров.

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ $x \in E_n$

Наджафова С.М.

Азербайджанский Госуд. Педагогич. Университет

Пусть

$$f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G;s),, \quad (1)$$

где $1 < p \leq \theta < \infty$, а вектор

$$r = (r_1; \dots; r_r),$$

с координатами-векторами

$$r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n}) \quad k = (1, 2, \dots, s)$$

предполагается «положительным», т.е.

$$r_{k,j} > 0 \quad j = (1, 2, \dots, n_k)$$

при всех $k = 1, 2, \dots, s \quad (1 \leq s \leq n)$.

Функцию $f = f(x)$ можно предполагать достаточно гладкой в точке $x \in E_n$.

Интегральное представление этой функции и их производных записываем в следующей форме

$$D^\vee f(x) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_s) \in Q} A_{i,\sigma} f(x), \quad (2)$$

где интегральные операторы, стоящие в правой части равенства (3.2), определяются равенствами

$$\begin{aligned} A_{i,\delta} f(x) = & c_i \left(\prod_{k \in e_s^i} h_k^{-\beta_{k,0}} \right) \int \prod_{k \in e^i v_k} \frac{dv_k}{1 + \beta_{k,i_k}} \times \\ & \times \int_{E_{|\omega^i|}} dz \int_{E_n} \left\{ \Delta^{2\omega^i} \left(\frac{z}{2\omega^i} \right) D^{r^{-i}} f(x+y) \right\} \Phi_{i,\delta}(\dots) dy \end{aligned} \quad (3)$$

при этом

$$\begin{aligned} \vec{0} = (0, \dots, 0), \vec{h} = (h_1, \dots, h_s), \\ 0 < h_k \leq H_k (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

В равенствах (3.2), вектор

$$v = (v_1, \dots, v_s), \quad (4)$$

с координатами-векторами

$$v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,n}), (k = 1, 2, \dots, s),$$

является «целочисленным и неотрицательным», т.е.

$$v_{k,j} \geq 0, (j = 1, 2, \dots, n_k) \text{ -целые}$$

при всех, $(k = 1, 2, \dots, s)$ при этом

$$0 \leq v_{k,j} \bar{r}_{k,j}, (i_k = 1, 2, \dots, n_k) \quad (5)$$

при всех, $(k = 1, 2, \dots, s)$ где $\bar{r}_{k,j}$ является наибольшим целым числом меньшим чем

$$r_{k,j} (i_k = 1, 2, \dots, n_k) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

Заметим, что

$$\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_s) \quad (6)$$

является целочисленным неотрицательным вектором с координатами-векторами

$$\bar{r} = (\bar{r}_{k,1}, \dots, \bar{r}_{k,n}) \quad (k = 1, 2, \dots, s) \quad (7)$$

а набор векторов (в равенствах (I.3.3))

$$\bar{r}^i = (\bar{r}_1^i, \dots, \bar{r}_s^i) \quad (i = (i_1, \dots, i_s) \in Q) \quad (8)$$

имеют координат-векторов

$$\bar{r}_s^{i_k} = (0, \dots, 0, \bar{r}_{k,j}, 0, \dots, 0) \quad (9)$$

при $i_k \neq 0$

$$r_k^{-0} = (0, \dots, 0) \quad (10)$$

при $i_k = 0$ при всех $(k = 1, 2, \dots, s)$.

Заметим, что

$$\omega^i = \omega_r \quad (\text{при } i = (i_1, \dots, i_s) \in Q) \quad (11)$$

В интегральных операторах (3.3) числа $\beta_{k,i_k} (i_k = 0, 1, \dots, n_k)$ определяются равенствами

$$\beta_{k,0} = |\sigma_k| + (v_k, \sigma_k) \quad \text{при } i_k = 0 \quad (12)$$

$$\beta_{k,i_k} = |\sigma_k| + (v_k, \sigma_k) - \bar{r}_{k,j_k} \sigma_{k,j_k} + \sigma_{k,j_k} \quad (13)$$

при, $i_k \neq 0$ где

$$\begin{cases} |\sigma_k| = \sigma_{k,1} + \dots + \sigma_{k,n_k} \\ (v_k, \sigma_k) = \sum_{j=1}^{n_k} v_{k,j} \sigma_{k,j} \end{cases} \quad (14)$$

при всех $(k = 1, 2, \dots, s)$

Заметим, что

$$e^i = \sup p_i \quad (15)$$

является носителем вектора

$$(i = (i_1, \dots, i_s) \in Q) \quad (16)$$

т.е. это множество индексов, отличных от нуля координат вектора,

$$(i = (i_1, \dots, i_s) \in Q),$$

следовательно

$$e^i \subset e_s = \{1, 2, \dots, s\}. \quad (17)$$

Ядра, определенные равенствами

$$\Phi_{i, \delta}(\dots) = \prod_{k \in e^i} \Phi_{k, \delta_k} \left(\frac{y_k}{v_k^{\sigma_k}}, \frac{z_{k, i_k}}{v_k^{\sigma_{k, j}}} \right) \cdot \prod_{k \in e_s \setminus e^i} \Phi_{k, \delta_k} \left(\frac{y_k}{h_k^{\delta_k}} \right), \quad (18)$$

являются достаточно гладкими, финитными в $E_n \times E_{|\omega|}$

при каждом $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$, при этом каждая функция

$$\Phi_{k, \delta_k} = \Phi_{k, \delta_k}(y_k; z_{k, j_k}) \quad (k \in e^i) \quad (19)$$

является достаточной гладкой и финитной в

$$E_{n_k} \times E_1 \quad (20)$$

с носителем

$$\sup p \Phi_{k, \delta_k}(y_k; z_{k, j_k}) \quad (21)$$

из $(n_k + 1)$ -мерного прямоугольника

$$\left\{ \begin{aligned} & \{(y_k; z_{k, j}); 0 < y_{k, j} \delta_{k, j} \leq 1 (j = 1, 2, \dots, n_k)\} \\ & \{0 < z_{k, j} \delta_{k, j} \leq 1 \} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

а каждая функция

$$\Phi_{k, j_k} = \Phi_{k, j_k}(y_k) (k \in e_s \setminus e^i) \quad (23)$$

является достаточной гладкой и финитной в, E_{n_k} с носителем

$$\sup p\Phi_{k,j_k}(y_k) \quad (24)$$

из n_k -мерного прямоугольника

$$\{y_k \in E_{n_k}; 0 < y_k \delta_k \leq 1\}. \quad (25)$$

Носителем интегрального представления (3.2), (3.3) в области $G \subset E_n$ является « σ -полурог»

$$x + R_\delta(\sigma; H), \quad (26)$$

с вершиной в точке $x \in G$.

О ПОГРЕШНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА НА СТРУКТУРАХ ЖОРДАНА-ДЕДЕКИНДА

Рамазанов А.Б.

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается задача максимизации порядково-выпуклой функции на структурах Жордана-Дедекинда. Для этой задачи получена апостериорная гарантированная оценка точности градиентного алгоритма, которая уточняет и дополняет ранее известные оценки.

Исследование дискретных экстремальных задач на структурах Жордана-Дедекинда является актуальным, как для общего развития теории дискретных экстремальных задач, так и для получения более точных оценок точности градиентных (локальных) алгоритмов [1]. Хорошо известно, что градиентный алгоритм не всегда гарантирует получение оптимального решения в соответствующей задаче дискретной оптимизации. Поэтому, естественно, возникает проблема оценки точности градиентного алгоритма. В данной работе рассматривается задача максимизации порядково-выпуклой функции на конечных структурах Жордана-Дедекинда. Используя крутизны целевой функции, получена апостериорная гарантированная оценка точности градиентного алгоритма, которая уточняет и дополняет ранее известные оценки (см., например, [1]).

Пусть $H = (H, \prec)$ - множество, на котором задано отношение частичного порядка $\prec$. Через $\mathfrak{R}_\rho = \mathfrak{R}_\rho(H)$ обозначим класс

всех ρ -порядково-выпуклых функций, заданных на множестве H [1].

Будем предполагать, что частично упорядоченное множество H удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда [2]: все максимальные цепи между произвольными сравнимыми элементами x и y имеют одинаковую длину, которая обозначается через $h(x, y)$. Кроме того, предполагаем, что множество H обладает единственным минимальным элементом (нулем), который будем обозначать через θ . Таким образом, $\theta \prec x \quad \forall x \in H, x \neq \theta$. Будем также пользоваться обозначением $h(x) = h(\theta, x)$.

Крутизной функции $f(x)$ будем называть величину $c = c(f)$ [3]:

$$c = c(f) = \min \{ (\Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(y)) / \Delta^+ f(y), \text{ если } I \neq \emptyset \text{ и} \\ c = c(f) = 0, \text{ если } I = \emptyset, \quad$$

где $I = \{(x, y) \mid \Delta^+ f(x) > \Delta^+ f(y) \geq 0, x \prec y, x, y \in H\}$,

$$\Delta^+ f(x) = \max \{ f(y) - f(x) \mid x \prec y, x, y \in H \}.$$

Рассматривается следующая задача A : найти

$$\max \{ f(x) \mid x \in H \},$$

где $f(x)$ - неубывающая функция из класса $\mathfrak{R}_\rho = \mathfrak{R}_\rho(H)$.

Через $x^*(x^g)$ - обозначим оптимальное (градиент-ное) решение задачи A .

Под гарантированной (относительной) оценкой погрешности градиентного алгоритма решения задачи A , как обычно, понимают такое число $\varepsilon \geq 0$, что

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \leq \varepsilon.$$

Теорема. Для задачи A справедлива следующая гарантированная оценка точности градиентного алгоритма

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \leq \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - c)(h - 1)} \right)^r = B_1,$$

где $c = c(f)$, $h = h(H) = \max \{ h(x) \mid x \in H \}$, $r = \min \{ h(x) \mid x \in H^{\max} \}$, $H^{\max}$ - множество максимальных элементов в H .

Литература

1. V.A.Emelichev, M.M.Kovalev, A.B. Ramazanov Errors of gradient extrema of strictly convex function of discrete argument // J. Discrete Math. and Appl. 1992. v.2, N2. P. 119-131.
2. М. Айгнер. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982 - 558 с.
3. A.B. Ramazanov // On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimisation problems and related questions // Discrete Mathematics and Applications, 2011, volume 21, Issue 4, Pages 465-476.

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Султанова Э.Б.

Бакинский государственный университет

elnare-sultanova@mail.ru

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторный пучок третьего порядка

$$L(\lambda) = \lambda^3 E - C^3 + \sum_{j=0}^2 \lambda^j (A_{3-j} + B_{3-j}),$$

где λ -спектральный параметр, E -единичный оператор в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют условия:

1) C -нормальный оператор с вполне непрерывным обратным, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \pi/3\};$$

2) $A_j C_j (j = \overline{1,3})$ ограничены в H ;

3) $B_j C^{-j} (j = \overline{1,3})$ вполне непрерывные операторы в H .

В данной работе указана теорема о трехкратной полноте системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполняются условия 1)-3), $C^{-1} \in \sigma_{3/2}$ и имеет место неравенство

$$\alpha = \sum_{j=0}^2 K_j(\varepsilon) \|A_j C^{-j}\| < 1,$$

где

$$K_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/3 \\ \frac{1}{\sin 3\varepsilon}, & \pi/6 \leq \varepsilon \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$K_1(\varepsilon) = K_2(\varepsilon) = \frac{1}{\cos 3\varepsilon/2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ трехкратно полна в H .

Литература

1. М.В.Келдыш. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН, 1971, т.26, №4 (160)с.15-41

ОБЛЕГЧЕННАЯ ДИФFUЗИЯ ВО ВНУТРИКЛЕТОЧНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ЯВЛЕНИЯХ ПРИВОДЯЩАЯ ИЗМЕНЕНИЮ ДОМИНИРУЮЩИХ ФАЗ СЕТЕЙ НЕРВНЫХ КЛЕТОК

Тахиров М.

Введение. Имея достаточно широкое сведение о фазовых переходах в веществах и случайных явлениях счел необходимым обратит особое внимание к нечеткости границ изменения доминирующих фазовых состояний нервных клеток которые происходят не непрерывно, а скачкообразно, что и допускает их моделирование случайными процессами $\xi(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$ дискретными и во времени и в пространстве.

Здесь мы особое внимание уделяем облегченной диффузия во внутриклеточных переходных явлениях с нечеткими границами приводящая изменению доминирующих фаз сетей нервных клеток а также и к тому, что изменение доминирующих фаз

нервных клеток сопровождается установкой которая управляет переносом необходимой энергии для изменения этих фаз.

Теперь о некоторых основных причинах, т.е. о внутриклеточных переходных явлениях с нечеткой границей приводящих изменению доминирующих фазовых состояний сетей нервных клеток головного мозга.

1.Облегченная диффузия как причина приводящая изменению доминирующих фаз нервных клеток. Одним из важных аспектов диффузии играющий важную роль в физиологических процессах связан с внутриклеточным транспортом. Здесь особое место уделяется облегченному диффузионному транспорту субстратов через мембраны, происходящим благодаря взаимодействию субстратов с некоторыми компонентами мембран. Уделения такого особого внимания к этой проблеме объясняется тем, что мембрана содержит макромолекулы которые принято принимать как носители, облегчающие прохождение субстрата через нее. В связи с реализацией этого достаточно сложного явления существуют несколько механизмов. В настоящее время общепринятым механизмом считается механизм состоящий из того, что субстрат соединяясь с носителем образует комплекс субстрат-носитель который осуществляет диффузию субстрата через мембрану которую и принято называть облегченной диффузией. Отметим, что вместе с этим термином используется также и термин индуцированный транспорт. Об облегченной диффузии подробную информации можно получить из книги Лайтфута, а о модели транспорта кислорода из книги “Методы математической биологии”. Часто, а именно в статье Матулевичюса и Ли облегченная диффузия представляется как искусственный химико-технологический процесс который используется для разделения некоторых веществ с применением специальных носителей и жидких пленок-мембран. В работе Строва, Смита и Колтона посредством облегченной диффузии рассматривается перенос кислорода в гетерогенной среде состоящей из плазмы крови и красных кровяных телец. Уиттенберг и Шоландер одновременно исследовали облегченную диффузию кислорода через растворы, содержащие гемоглабин и белок обратно соединяющийся с кислородом.

Через некоторое время тот же самый Уиттенберг для выяснения молекулярного механизма этого явления проводит эксперименты в которых “Облегченная диффузия” оценивается количественно путем измерения избыточного паточка кислорода через раствор при наличии гемоглобина по сравнению с потоком кислорода при его отсутствии. На начальной стадии исследований цель состоял в установлении функциональной роли миоглобина мышечных волокнах. Миоглобин это белок, присутствующий в красных мышцах и обратимо соединяющийся с кислородом.

2.Изменение уровня аденинмонофосфата цАМФ. Согласно теории Сазерленда общий усредненный темп реакций окисления глюкозы определяется уровнем циклического аденинмонофосфата-цАМФ в тканях.

Что касается уровне самого цАМФ оно регулируется простагландинами представляющих собой внутриклеточные гормоны уровень которых задается активностью гипоталамуса.

В настоящее время старение, а также и все патологические процессы считаются эволюционно зависящими от экологических ситуаций и допускают характеризацию одной и той же интегральной реакцией приводящей снижению уровня внутриклеточных гормонов, а вместе с этим повышению уровня цАМФ. Вместе с этим цАМФ считается универсальным катализатором биохимических превращений том числе с участием сахара. Повышение скоростей биохимических превращений и, следовательно, к наблюдаемому накоплению легкого изотопа углерода объясняется повышением уровня цАМФ. Оказалось уменьшение содержания более тяжелых изотопов в месте с тем увеличение содержания легких указывают на возрастание скоростей химических и биохимических реакций. Такой вывод дает понять природы вариаций биологического изотопного фракционирования как в онтогенезе, также и при развитии патологических процессов.

При попытке раскрытия механизмов лежащих в основе наблюдаемых изменений предполагается, что одним из таких механизмов является увеличения содержания цАМФ в клетках как при старении так и при развитии склероза. Установлено, что цАМФ является одним из основных гормонов при активизации

биохимических процессов в клетках. В месте с этим повышение уровня содержания цАМФ в клетках представляет собой одну из тех происходящих реакций приводящих к снижению активности внутриклеточных гормонов таких как и простагландины.

3. Обмен и роль ГАМК в функционировании нервных клеток. Гамма-аминомасляная кислота -ГАМК тесно связана с морфологическим созреванием нервных клеток и с проявлением их биоэлектрической активности. Эта система являясь нормальным продуктом обмена веществ нервной ткани, обладает свойствами, соответствующими основным критериям медиатора центральной нервной системы. Постоянство уровня этого вещества в ткани головного мозга свидетельствует об ее значении в регулировании соотношения процессов возбуждения и торможения и о высокой пластичности обмена веществ в ЦНС. ГАМК считается одним из возможных медиаторов торможения. Установлено также ее связь с энергетическими процессами происходящими в организме.

Литература

- 1.Tahirov M. F. Sinir impulsunun dinamikası ,sinir sistemində unikursal trayektoriyalar . Təhsil Problemləri İnstitutu .Elmi Əsərlər Jurnalı .2006 –cı il. N 6.s. 210-216.
- 3.Tahsirov M. F., Tahirov M.M. Baş beyn qabığı neyronlarında doğrulan impulsar arası intervalların ehtimalı paylanma qanunları . BDU. Mexanika riyaziyyat fakültəsi. Elmi konfransın materialları . s. 97- 99.2009 –cu il.
- 4.Таиров М.Ф. Переходные явления приводящие изменению доминирующих фазовых состояний нервных клеток. Известия Педагогического Университета.Баку, 2013.N2.стр.331-338.
- 5.Таиров М.Ф.Sinir sistemində stoxastik neyron şəbəkələri və onların trasplantasiyası.BDU-nun 95 illiyinə həsr olunmuş Elmi konfransın materialları.2014-cü il.s.141-143.
- 6.Сафаров М.И. Обмен гамма-аминомасляной кислоты в постнатальной развитии мозга при экстремальных состояниях организма. Баку, Азернешр,2008.
- 7.Нагаев С.В., Мухамедханова Р. Переходные явления в ветвящихся случайных процессах с дискретным временем. Журнал Академии Наук Узбекской ССР Институт математики им. В.И.Романовского Ташкент ,1966.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ УПРУГОГО КОЛЬЦА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ НАПРЯЖЕНИИ

Фатуллаева Л.Ф., Киясбейли Э.Т.

Бакинский Государственный Университет

Целью настоящей работы является исследование потери устойчивости многослойного упругого кольца, составленного из различных материалов, когда окружное напряжение меняется по толщине по нелинейному закону. Решение поставленной задачи осуществляется посредством вариационного метода смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца. Численно выявлено влияние геометрического, физического параметров пакета и коэффициента нелинейности напряжения на критическую силу выпучивания.

Зададим полярную систему координат (z, φ) и введем в рассмотрение кольцо радиуса R и толщины $2h$. Предположим, что оно составлено из s чередующихся, соединенных между собой по всем окружностям, разных по толщине концентрических слоев с разными значениями модуля упругости E_{k+1} $[k = 0, 1, \dots, (s-1)]$. Толщину каждого слоя обозначим через δ_k . Таким образом,

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_s = 2h$$

есть полная толщина кольца.

В процессе деформирования учитывается одновременно нелинейность и по прогибу w и по касательному перемещению v (полная нелинейность). Условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении, из чего следует равенство на них перемещений и отсутствие взаимного давления слоев.

При принятых предположениях, выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства [1]

$$\varepsilon^\Phi = \frac{\sigma}{E_{k+1}}, \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (1)$$

где

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^s \delta_i \quad (\delta_0 = 0). \quad (2)$$

Рассмотрим теперь выпучивание выбранного кольца под действием равномерно распределенной по поверхности сжимающей нагрузки q . Вследствие гипотезы плоских сечений запишем [2]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kz.$$

Учитывая полную нелинейности, ε_0 и кривизну k определим по формулам нелинейной теории тонких оболочек [2]

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right\}, \quad (3)$$

$$k = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right). \quad (4)$$

Решение задачи проведем посредством вариационного принципа [1], при котором значение функционала для данного случая принимает следующее выражение:

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} - \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \dot{w} \right)^2 \right] \right\} d\varphi dz - \\ - \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} dz d\varphi + R \int_0^{2\pi} \dot{w} d\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по q ($\dot{q} = 1$).

Допустим, что окружное напряжение σ меняется по толщине по нелинейному закону:

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} + b(q)z \cos l\varphi + \mu \frac{5}{2h^5} \left[m(q) - \frac{2}{3} h^3 b(q) \right] z^3 \cos l\varphi, \quad (6)$$

здесь μ - коэффициент нелинейности напряжения, а l - число волн.

При использовании вариационного метода решения, с целью последующего применения метода Релея-Ритца, одним из центральных вопросов является выбор интерполяционных функций для задания форм прогиба и касательного перемещения. Тогда для w и v имеем:

$$w = w_0(q) + w_1(q) \cos l\varphi, \quad v = v_0(q) \sin l\varphi. \quad (7)$$

Последующий ход вычислений заключается в том, что

соотношения (3), (4), (6), (7) и их производные подставляются в выражение функционала (5) и после интегрирования полученной формулы по z и φ находим его как функцию w_0 , w_1 , v_0 , m , b и их производных по q .

Условие стационарности построенного функционала, соответствующее равенству нулю выражений -

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{w}_0} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{w}_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{v}_0} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{m}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{b}} = 0,$$

приводит к системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений. Комбинируя эти уравнение, окончательно приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно $\dot{w}_1$. Для определения критической силы надо использовать следующее условие

$$\frac{dq}{dw_1} = 0.$$

После ряда математических преобразований получаем уравнение для критической силы.

Для численного эксперимента, приведенные выше теоретические разработки перенесем на случай трехслойного кольца ($s=3$) с периодической структурой $E_1 = E_3$, $\delta_1 = \delta_3$ и проведем влияние коэффициента нелинейности напряжения (μ) на критическую силу выпучивания.

Проведенные вычисления позволяют сделать следующий вывод, что когда напряжение σ меняется по толщине по нелинейному закону величина критической силы больше, чем когда σ меняется по линейному закону. Таким образом, при прочих равных условиях это приводит к возможности более рационально использовать несущую способность кольца.

Литература

1. Амензаде, Р.Ю., Гурбанов Р.А., Гусиев Х.Т. Применение вариационного принципа к задаче выпучивания неоднородного по толщине нелинейно-упругого кольца // Журнал «Механика композитных материалов». - 1995.- № 2.-С. 262-268.
2. Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние вязко-упругого кольца под действием неравномерно распределенного внешнего давления // Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. № 2, 2012, səh. 63-69.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Ханкишиев З.Ф., Салманлы Ф.Г.

Бакинский Государственный Университет

hankishiyev.zf@yandex.com

1. Постановка задачи. Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + d u(x, \bar{t}) + f(x, t),$$
$$0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь a, b, d - действительные числа, $\bar{t} \in (0, T]$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$ - непрерывные функции своих аргументов. Следует отметить, что большое число задач естествознания, например, некоторые задачи математической физики и биологии, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод и т. д. приводят к подобным задачам [1].

Задачам для нагруженных дифференциальных уравнений посвящались многие работы. Например, в работе [2] подобные задачи решались методом прямых. Эта работа посвящена применению метода конечных разностей к решению задачи (1.1)-(1.3).

2. Разностная задача и решение этой задачи. Разделим отрезок $[0, l]$ оси Ox точками $x_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $h = l / N$, на N равных частей, а отрезок $[0, T]$ оси Ot точками $t_j = j\tau$,

$j = 0, 1, 2, \dots, j_0$, $\tau = T / j_0$, на j_0 равных частей. Определим в области $\bar{D}$ сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$.

Пусть $\bar{t} = t_s$, $0 < s \leq j_0$. В сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$ задаче (1.1)-

(1.3) сопоставим следующую разностную задачу:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) +$$

$$+ b \frac{y_n^{j+1} + y_n^j}{2} + d y_n^s + f_n^j, n = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (2.1)$$

$$y_0^j = 0, \quad y_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \quad (2.2)$$

$$y_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Здесь $f_n^j = f\left(x_n, \frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)$.

Легко можно показать, что, если w_n^j - решение разностной задачи

$$\frac{w_n^{j+1} - w_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{w_{n-1}^{j+1} - 2w_n^{j+1} + w_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{w_{n-1}^j - 2w_n^j + w_{n+1}^j}{h^2} \right) +$$

$$+ b \frac{w_n^{j+1} + w_n^j}{2} + f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (2.4)$$

$$w_0^j = 0, \quad w_N^j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (2.5)$$

$$w_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.6)$$

а v_n^j - решение разностной задачи

$$\frac{v_n^{j+1} - v_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{v_{n-1}^{j+1} - 2v_n^{j+1} + v_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{n-1}^j - 2v_n^j + v_{n+1}^j}{h^2} \right) +$$

$$+ b \frac{v_n^{j+1} + v_n^j}{2} + d y_n^s, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (2.7)$$

$$v_0^j = 0, \quad v_N^j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (2.8)$$

$$v_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.9)$$

то функция y_n^j , определяемая равенством

$$y_n^j = v_n^j + w_n^j, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (2.10)$$

будет решением задачи (2.1)-(2.3).

Для каждого значения j , начиная с $j = 0$, решение задачи (2.4)-(2.6) можно найти методом прогонки [3]. Пусть найдено решение этой задачи. Перейдем к нахождению решения

задачи (2.7)-(2.9). С этой целью перепишем эту задачу в следующем виде

$$-v_{n-1}^{j+1} + p_1 v_n^{j+1} - v_{n+1}^{j+1} = v_{n-1}^j + p_2 v_n^j + v_{n+1}^j + \frac{2dh^2}{a^2} y_n^s, \\ n = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (2.11)$$

$$v_0^{j+1} = 0, \quad v_N^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (2.12)$$

$$v_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

При $j = 0$ эта задача принимает вид:

$$c_1 v_1^1 - b_1 v_2^1 = g_1^0, \\ -a_n v_{n-1}^1 + c_n v_n^1 - b_n v_{n+1}^1 = g_n^0, \quad n = 2, 3, \dots, N-2, \quad (2.14)$$

$$-a_{N-1} v_{N-2}^1 + c_{N-1} v_{N-1}^1 = g_{N-1}^0, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1,$$

где коэффициенты $a_n, n = 2, 3, \dots, N-1, b_n, n = 1, 2, \dots, N-2,$

$$c_n, n = 1, 2, \dots, N-1, \text{ постоянные, а } g_n^0 = \frac{2dh^2}{a^2} y_n^s, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Алгоритм метода прогонки решения задачи (2.14) заключается в следующем:

сначала определяются коэффициенты α_{n+1} равенствами

$$\alpha_{n+1} = \frac{b_n}{c_n - a_n \alpha_n}, \quad n = 2, 3, \dots, N-2, \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1},$$

затем коэффициенты β_{n+1}^0 равенствами

$$\beta_{n+1}^0 = \frac{g_n^0 + a_n \beta_n^0}{c_n - a_n \alpha_n}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad \beta_2^0 = \frac{g_1^0}{c_1},$$

а решение задачи определяется равенствами

$$v_n^1 = \alpha_{n+1} v_{n+1}^1 + \beta_{n+1}^0, \quad n = N-2, N-3, \dots, 2, 1, \quad v_{N-1}^1 = \beta_{N-1}^0.$$

С учетом этих равенств, имеем:

$$\beta_2^0 = e \cdot \alpha_2 y_1^s, \\ \beta_3^0 = e \cdot (\alpha_3 y_2^s + \alpha_3 \alpha_2 y_1^s), \\ \beta_4^0 = e \cdot (\alpha_4 y_3^s + \alpha_4 \alpha_3 y_2^s + \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 y_1^s), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \beta_N^0 = e \cdot (\alpha_N y_{N-1}^s + \alpha_N \alpha_{N-1} y_{N-2}^s + \dots + \alpha_N \alpha_{N-1} \dots \alpha_2 y_1^s),$$

$$\begin{aligned}
v_{N-1}^1 &= \beta_N^0, \\
v_{N-2}^1 &= e \cdot [\alpha_{N-1} \alpha_N y_{N-1}^s + \alpha_{N-1} (\alpha_N \alpha_{N-1} + 1) y_{N-2}^s + \\
&+ \alpha_{N-1} (\alpha_N \alpha_{N-1} + 1) \alpha_{N-2} y_{N-3}^s + \dots + \\
&+ \alpha_{N-1} (\alpha_N \alpha_{N-1} + 1) \alpha_{N-2} \alpha_{N-3} \dots \alpha_2 y_1^s], \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$

где $e = 2h^2 / a^2$.

Пусть найдены все v_n^1 , $n = 1, 2, \dots, N-1$. Тогда используя равенства

$$y_n^1 = v_n^1 + w_n^1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

получим $N-1$ соотношение между $y_1^1, y_2^1, \dots, y_{N-1}^1$ и $y_1^s, y_2^s, \dots, y_{N-1}^s$.

При $j=1$, в силу (2.11)-(2.13), относительно $v_1^2, v_2^2, \dots, v_{N-1}^2$, получим следующую разностную задачу:

$$\begin{aligned}
-v_{n-1}^2 + p_1 v_n^2 - v_{n+1}^2 &= v_{n-1}^1 + p_2 v_n^1 + v_{n+1}^1 + \frac{2dh^2}{a^2} y_n^s, \\
n &= 1, 2, \dots, N-1, v_0^2 = 0, v_N^2 = 0.
\end{aligned}$$

Подставляя в этой задаче вместо v_n^1 , $n = 1, 2, \dots, N-1$, выше найденные выражения и решая полученную задачу методом прогонки, в силу равенств $y_n^2 = v_n^2 + w_n^2$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, получим снова $N-1$ соотношение между $y_1^2, y_2^2, \dots, y_{N-1}^2$ и $y_1^s, y_2^s, \dots, y_{N-1}^s$.

Продолжив этот процесс для $j = 2, 3, \dots, s-1$, и используя равенства

$y_n^j = v_n^j + w_n^j$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, $j = 3, 4, \dots, s$, находим соответствующие соотношения между $y_1^j, y_2^j, \dots, y_{N-1}^j$ и $y_1^s, y_2^s, \dots, y_{N-1}^s$, $j = 3, 4, \dots, s$.

При $j=s$, из равенств $y_n^s = v_n^s + w_n^s$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, получим линейную систему из $N-1$ алгебраических уравнений относительно $y_1^s, y_2^s, \dots, y_{N-1}^s$. Пусть найдено решение этой системы. Тогда используя равенства

$$y_n^j = v_n^j + w_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, s-1,$$

можем найти все значения y_n^j , $n=1,2,\dots,N-1$, $j=1,2,\dots,s-1$. После завершения этого процесса, для каждого значения j , начиная с $j=s$, решив методом прогонки разностную задачу (2.1)-(2.3), можем найти значения $y_1^j, y_2^j, \dots, y_{N-1}^j$, $j=s+1, s+2, \dots, j_0$.

Литература

1. А. М. Нахушев. Уравнения математической биологии. М., «Высшая школа», 1995, 301с.
2. З.Ф. Ханкишиев. Применение метода прямых к решениям задач для нагруженных уравнений. Методы решения и исследования сходимости. Deutschland, Saarbrücken, 2013, 152 с.
3. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М., «Наука», 1978, 592с.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ханкишиев З.Ф., Салманлы Ф.Г.

Бакинский Государственный Университет

hankishiyev.zf@yandex.com

1. Постановка задачи

Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + du(x, \bar{t}) + f(x, t),$$

$$0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

граничным условиям

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь a, b, d - действительные числа, $\bar{t} \in (0, T]$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$ - непрерывные функции своих аргументов. Следует отметить, что

большое число задач естествознания, например, некоторые задачи математической физики и биологии, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод и т. д. приводят к подобным задачам [1].

2. Разностная задача

Разделим отрезок $[0, l]$ оси Ox точками $x_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $h = l/N$, на N равных частей, а отрезок $[0, T]$ оси Ot точками $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, j_0$, $\tau = T/j_0$, на j_0 равных частей. Определим в области $\bar{D}$ сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$. Пусть $\bar{t} = t_s$, $0 < s \leq j_0$. В сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$ задаче (1.1)-(1.3) сопоставим следующую разностную задачу:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) + b \frac{y_n^{j+1} + y_n^j}{2} + dy_n^s + f_n^j, n = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (2.1)$$

$$y_0^j = 0, \quad y_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \quad (2.2)$$

$$y_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Здесь $f_n^j = f\left(x_n, \frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)$.

3. Принцип максимума и следствия, полученные из этого принципа

Рассмотрим разностные уравнения (2.1) и перепишем их в виде

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{y_n^{j+1} + y_n^j}{2} - dy_n^s = f_n^j, n = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (3.1)$$

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть сеточная функция y_n^j , $n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, удовлетворяет уравнениям (3.1). Пусть выполняются условия $f_n^j \leq 0$ ($f_n^j \geq 0$),

$n = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$. Если

$$d > 0, b + d \leq 0, \tau \leq \frac{2h^2}{2a^2 - bh^2}, \quad (3.2)$$

то решение y_n^j уравнений (3.1), отличное от постоянного, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения при $n = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, j_0$.

Теорема 2. Пусть правые части разностных уравнений (3.1) удовлетворяют условиям

$$f_n^j \geq 0 \ (f_n^j \leq 0), \ n = 1, 2, \dots, N-1, \ j = 0, 1, \dots, j_0 - 1.$$

Если $y_0^j \geq 0, y_N^j \geq 0 (y_0^j \leq 0, y_N^j \leq 0), \ j = 0, 1, \dots, j_0, y_n^0 \geq 0 (y_n^0 \leq 0), y_n^0 \geq 0 (y_n^0 \leq 0), \ n = 0, 1, \dots, N,$ и выполняются условия (3.2), то $y_n^j \geq 0 \ (y_n^j \leq 0), \ n = 0, 1, \dots, N, \ j = 0, 1, \dots, j_0$.

Следствие. Пусть выполняются условия (3.2). Тогда однородная разностная задача, соответствующая задаче (2.1)-(2.3) имеет только тривиальное решение $y_n^j = 0, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$.

Теорема 3 (Теорема сравнения). Пусть $y_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$ - решение разностной задачи (2.1)-(2.3), а $\tilde{y}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$ - решение разностной задачи, полученной при замене в (2.1)-(2.3) функций $f_n^j, n = 1, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ и $\varphi(x_n), n = 0, 1, \dots, N$, соответственно, на $\tilde{f}_n^j, n = 1, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ и $\tilde{\varphi}(x_n), n = 0, 1, \dots, N$. Тогда, если выполняются условия $|f_n^j| \leq \tilde{f}_n^j, n = 1, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1,$ и $|\varphi(x_n)| \leq \tilde{\varphi}(x_n), n = 0, 1, \dots, N,$ то при выполнении условий (3.2) имеют место неравенства $|y_n^j| \leq \tilde{y}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$.

4. Сходимость

Пусть $u(x_n, t_j)$ - значение точного решения задачи (1.1)-(1.3) в узле (x_n, t_j) сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$, y_n^j - решение разностной задачи

(2.1)-(2.3). Введем вспомогательную функцию

$$z_n^j = y_n^j - u(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \quad (4.1)$$

Определив из этого равенства y_n^j и подставив полученное выражение в (2.1)-(2.3), относительно функции z_n^j получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{z_n^{j+1} - z_n^j}{\tau} &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{z_{n-1}^{j+1} - 2z_n^{j+1} + z_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{z_{n-1}^j - 2z_n^j + z_{n+1}^j}{h^2} \right) + \\ &+ b \frac{z_n^{j+1} + z_n^j}{2} + dz_n^s + (h^2 + \tau^2) \psi_n^j, \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$z_0^j = 0, \quad z_N^j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (4.3)$$

$$z_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

Используя формулу Тейлора легко можно показать, что

$$|\psi_n^j| \leq L, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (4.5)$$

где

$$L = \frac{1}{6} \sup_D \left(a^2 \left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} \right|, \left| b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right| \right),$$

если решение уравнения (1.1) имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные по переменной x до четвертого, а по переменной t до третьего порядка, включительно.

Пусть

$$\tilde{z}_n^j = L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (4.6)$$

где $\xi > 0$ - постоянное. Очевидно, что функция $\tilde{z}_n^j$ есть неотрицательная функция. Для этой функции после элементарных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - \\ - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} - d\tilde{z}_n^s = -L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n)(b + d). \end{aligned}$$

Пусть выполняется условие $b + d \leq -\varepsilon < 0$. Тогда для правой части последнего равенства имеем:

$$-L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n)(b + d) \geq L(h^2 + \tau^2),$$

если $\xi \geq 1/(l\varepsilon)$.

Итак, при выполнении условий

$$b + d \leq -\varepsilon < 0, \quad \xi \geq 1/(l\varepsilon) \quad (4.7)$$

для сеточной функции $\tilde{z}_n^j$ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - \\ & - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} - d \tilde{z}_n^s \geq L(h^2 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (4.8)$$

$$\tilde{z}_0^j = L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot 2l, \quad \tilde{z}_N^j = L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot l, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (4.9)$$

$$\tilde{z}_n^0 = L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.10)$$

Сравнивая задачу (4.2)-(4.4) с задачей (4.8)-(4.10), в силу теоремы сравнения имеем:

$$|z_n^j| \leq \tilde{z}_n^j, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0,$$

или

$$\begin{aligned} & |y_n^j - u(x_n, t_j)| \leq L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot 2l, \\ & n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть решение уравнения (1.1)-функция $u(x, t)$ имеет в области D ограниченные частные производные по переменной x до четвертого, а по переменной t до третьего порядка, включительно. Если выполняются условия

$$d > 0, \quad b + d \leq -\varepsilon < 0, \quad \tau \leq \frac{2h^2}{2a^2 - bh^2}, \quad \xi \geq \frac{1}{l\varepsilon}, \quad (4.12)$$

то решение задачи (2.1)-(2.3) сходится к решению задачи (1.1)-(1.3). При этом имеет место оценка (4.11).

Литература

1. А. М. Нахушев. Уравнения математической биологии. М., «Высшая школа», 1995, 301с.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ИЗНАШИВАНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКИХ ТЕЛ С ТОНКИМИ УПРУГИМИ ПОКРЫТИЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Шарифов Я.А.

Бакинский Государственный Университет

Рассмотрим управляемую начально-краевую задачу для системы Гурса-Дарбу:

$$z_{tx} = f(t, x, z, z_t, z_x, u), \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, l), \quad (1)$$

$$z_t(t, 0) = \varphi(t, z(t, 0), v(t)), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$z_x(0, x) = \psi(x, z(0, x), \omega(x)), \quad x \in (0, l), \quad (3)$$

$$D_1 z(T, 0) = \alpha, \quad (4)$$

$$D_2 z(0, l) = \beta.$$

Будем считать, что класс допустимых управлений состоит из функций $w = (v, \omega, u) \in V \times \Omega \times U$, где

$$w = (v(\cdot), \omega(\cdot), u(\cdot)) \in V \times \Omega \times U \subset L_2^q([0, T]) \times L_2^p(0, l) \times L_2^r(Q)$$

Под решением задачи (1)-(4), соответствующей выбранному допустимому управлению $w = (v, \omega, u) \in V \times \Omega \times U$, понимается функция $z(t, x) \in L_2^n(Q)$, имеющая обобщенные производные по Соболеву $z_t(t, x), y_x(t, x)$ и $z_{tx}(t, x)$, принадлежащие $L_2^n(Q)$ и удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в Q , а условиям (2), (3) - в смысле равенства соответствующих следов.

На решениях начально-краевой задачи (1)-(4) и на множестве допустимых управлений определим функционал

$$J(W) = \Phi(z(0, 0), z(T, l)). \quad (5)$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал (5) при ограничениях (2.1)-(2.5).

Предполагается, что $z \in R^n$ - состояние;

$u \in R^r, v \in R^q, \omega \in R^p$ - управления; t, x - скалярные независимые переменные; T, l - заданные положительные числа; $f, F, \Phi, \varphi, \psi$ - заданные функции, D_1, D_2 - постоянные матрицы порядка $n \times n$, U, V, Ω - заданные множества.

На функции, входящие в описание задачи (1)-(5), накладываются следующие условия:

1. Пусть функция $f(t, s, y, p, q, u)$ из правой части (2.1) для почти всех $(t, s) \in Q$ непрерывна по $(y, p, q, u) \in R^{3n} \times R^r$, а при фиксированных $(x, p, q, u) \in R^{3n} \times R^r$ измерима по $(t, s) \in Q$.

2. Пусть функция $\varphi(t, y, v)$ из (2.2) для почти всех $t \in [0, T]$ непрерывна по $y \in R^n$, измерима по $t \in [0, T]$ при каждом фиксированном $y \in R^n, v \in R^q$

3. Пусть функция $\psi(x, y, \omega)$ из (2.2) для почти всех $x \in [0, l]$ непрерывна по $y \in R^n$, измерима по $x \in [0, l]$ при каждом фиксированном $y \in R^n, \omega \in R^p$.

4. $\det(D_1 + D_2) \neq 0$.

5. $V \times \Omega \times U \subset L_2^q([0, T]) \times L_2^p([0, l]) \times L_2^r(Q)$ выпуклое замкнутое множество.

6. Функция $\Phi(y, z), (y, z) \in R^n \times R^n$ обладает непрерывными частными производными $\Phi_y(y, z), \Phi_z(y, z)$ при всех $(y, z) \in R^n \times R^n$.

7. Пусть существуют неотрицательные константы K_1 и K_2 такие, что

$$|\varphi(t, 0, 0)| \leq K_1 \text{ для почти всех } t \in [0, T].$$

$$|\varphi_y(t, y, v)| \leq K_2 \text{ для почти всех } t \in [0, T], y \in R^n, v \in R^q.$$

8. Пусть функция $f(t, s, y, p, q, u)$ и частные производные f_y, f_p, f_q, f_u , удовлетворяют условию Липшица по

$$(x, p, q, u) \in R^{3n} \times R^r.$$

9. Пусть функция $\varphi(t, y, v)$ и частные производные $\varphi_y(t, y, v)$ удовлетворяют условию Липшица по $y \in R^n$.

Основные результаты

Теорема. Пусть выполняются условия 1-9. Тогда функционал (5) при ограничениях (1)-(4) непрерывен и дифференцируем по $w \in V \times \Omega \times U$ в норме $L_2^q([0, T]) \times L_2^p([0, l]) L_2'(Q)$, причем ее градиент $J'(w) \in L_2^q([0, T]) \times L_2^p([0, T]) L_2'(Q)$ в точке $w = (v(t), \omega(x), u(t, x))$ представим в виде

$$J'(w) = \{ H'_v(t, z(t, 0), \eta(t), v(t)); H_\omega^2(x, z(0, x), \eta(x), \omega(x)); \\ H_u(t, x, z(t, x), z_x(t, x), z_x(t, x), u(t, x)) \}$$

где $z(t, s) = z(t, s; w)$, $(t, s) \in Q$ - решение начальной краевой задачи (1)-(4), а $(\psi(t, x), \eta(t), \mu(x), l_1, l_2)$ является решением сопряженной системы:

$$\begin{aligned} & \Phi_{z(0,0)}(z(0,0), z(T, l)) + \Phi_{z(T,l)}(z(0,0), z(T, l)) + \int_0^T \int_0^l \tilde{H}_z dt dx + \\ & + \int_0^T \tilde{H}'_z(t) dt + \int_0^l H_z^2(x) dx + l_1 D_1^* + l_2 D_2^* = 0 \\ & \Phi_{z(T,l)}(z(0,0), z(T, l)) + \int_0^T \int_x^l \tilde{H}_z(t, r) dt dr + \int_0^T H_{z_x}(t, x) dt + \\ & + \int_x^l H_z^2(s) ds + l_2 D_2^* = \mu(x) \\ & \Phi_{z(T,l)}(z(0,0), z(T, l)) + \int_t^T \int_0^l H_z(t, x) dt dx + \int_0^l H_{z_t}(t, x) dx + \\ & + \int_t^T H'_z(t) dt + l_1 D_1^* = \eta(t) \end{aligned}$$

$$\psi(t,x)=\Phi_{z(T,l)}(z(0,0),z(T,l))+\int_t^T\int_x^lH_z(t,s)dt ds+\int_t^TH_{z_x}(t,s)dt+\int_x^lH_{z_t}(t,s)ds$$

ОДНА НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Юсубов Ш.Ш.

Бакинский Государственный Университет

yusubov_sh@mail.ru

В области

$$G = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_i \in G_i = (x_i^0, x_i^1), i = 1, 2, 3\}$$

рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка с сингулярными коэффициентами

$$\begin{aligned} (l_{111}u)(x) &\equiv D_1 D_2 D_3 u(x) + \frac{a_{110}(x)}{(x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}} D_1 D_2 u(x) + \\ &\frac{a_{101}(x)}{(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}} D_1 D_3 u(x) + \frac{a_{011}(x)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}} D_2 D_3 u(x) + \\ &\frac{a_{100}(x)}{(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} (x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}} D_1 u(x) + \frac{a_{010}(x)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}} D_2 u(x) + \\ &\frac{a_{001}(x)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}} D_3 u(x) + \\ &\frac{a_{000}(x)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} (x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}} = \\ &= \frac{\varphi_{111}(x)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} (x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение (1) рассматривается при следующих краевых условиях

$$\begin{aligned} (l_{110}u)(x_1, x_2) &\equiv D_1 D_2 u(x_1, x_2, x_3^0) + \int_{x_3^0}^{x_3^1} \beta(x_3) D_1 D_2 u(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \\ &= \frac{\varphi_{110}(x_1, x_2)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}}, \quad (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2, \\ (l_{101}u)(x_1, x_3) &\equiv D_1 D_3 u(x_1, x_2^0, x_3) = \\ &= \frac{\varphi_{101}(x_1, x_3)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}}, \quad (x_1, x_3) \in G_1 \times G_3, \\ (l_{011}u)(x_1, x_3) &\equiv D_2 D_3 u(x_1^0, x_2, x_3) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\varphi_{011}(x_2, x_3)}{(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} (x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}}, \quad (x_2, x_3) \in G_2 \times G_3, \quad (2)$$

$$(l_{100}u)(x_1) \equiv D_1 u(x_1, x_2^0, x_3^0) = \frac{\varphi_{100}(x_1)}{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}}, \quad x_1 \in G_1,$$

$$(l_{010}u)(x_2) \equiv D_2 u(x_1^0, x_2, x_3^0) = \frac{\varphi_{010}(x_2)}{(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}}, \quad x_2 \in G_2,$$

$$(l_{001}u)(x_3) \equiv D_3 u(x_1^0, x_2^0, x_3) = \frac{\varphi_{001}(x_3)}{(x_3 - x_3^0)^{\alpha_3}}, \quad x_3 \in G_3,$$

$$l_{000}(u) \equiv u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \varphi_{000}.$$

Здесь $u(x)$ - искомая функция, $D_s^k = \frac{\partial^k}{\partial x_s^k}$ - оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л. Соболева, $a_{i_1 i_2 i_3}(x)$, $i_k = 0, 1$, $k = 1, 2, 3$ - заданные измеримые на G функции, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} a_{000}(x) &\in L_p(G), \quad a_{100}(x) \in L_{\infty, p, p}^{x_1, x_2, x_3}(G), \\ a_{010}(x) &\in L_{p, \infty, p}^{x_1, x_2, x_3}(G), \quad a_{001}(x) \in L_{p, p, \infty}^{x_1, x_2, x_3}(G), \\ a_{110}(x) &\in L_{\infty, \infty, p}^{x_1, x_2, x_3}(G), \quad a_{011}(x) \in L_{p, \infty, \infty}^{x_1, x_2, x_3}(G), \\ a_{101}(x) &\in L_{\infty, p, \infty}^{x_1, x_2, x_3}(G), \end{aligned}$$

а функции $\varphi_{i_1 i_2 i_3}(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_{111}(x) &\in L_p(G), \quad \varphi_{110}(x_1, x_2) \in L_p(G_1 \times G_2), \\ \varphi_{101}(x_1, x_3) &\in L_p(G_1 \times G_3), \quad \varphi_{011}(x_2, x_3) \in L_p(G_2 \times G_3), \\ \varphi_{100}(x_1) &\in L_p(G_1), \quad \varphi_{010}(x_2) \in L_p(G_2), \quad \varphi_{001}(x_3) \in L_p(G_3), \\ \varphi_{000} &\in R, \quad \beta(x_3) \in L(G_3), \quad \alpha_i \in \left[0, 1 - \frac{1}{p}\right], \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

$1 < p < \infty$ - заданные числа.

Для задачи (1), (2) найдены достаточные условия, при которых оператор этой задачи вместе со своим сопряженным оператором осуществляет изоморфизм. С помощью сопряженного оператора введено понятие фундаментального решения и с ее помощью найдено интегральное представление решения задачи (1), (2).

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ

ГУРСА-ДАРБУ

Ягубов М.А., Ягубов А.А.

Бакинский Государственный Университет

Национальная Авиационная Академия

yaqubov_tamed@mail.ru

В работе рассматривается задача минимума

$$J(z, u) = z^1(T, X) \quad (1)$$

определенного на решениях системы Гурса-Дарбу

$$z_{tx} = f(t, x, z, z_t, z_x, u), (t, x) \in \Pi = \{0 < t < T, 0 < x < X\}, \quad (2)$$

$$z(t, 0) = \varphi(t), t \in [0, T], z(0, x) = \psi(x), x \in [0, X], \varphi(0) = \psi(0), \quad (3)$$

Здесь

$z(t, x) = (z^1(t, x), \dots, z^n(t, x))$ -вектор функция состояния,

$u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^r(t, x))$ измеримая на Π вектор -функция управления со значениями из заданного ограниченного множества $U \in R^r$, $z^1(T, X)$ значение первой компоненты вектор - функции состояния $z(t, x)$ в точке (T, X) .

Введем множества

$$G(t, x, z, p, q) = \{g : g = f(t, x, z, p, q, u), \text{ при } u \in U\},$$

$$F_x(t, x, z, p, q) = \overline{\text{co}G(t, x, z, p, q)}$$

и в пространстве $W_\infty^*(\Pi)$ рассмотрим дифференциальные включения

$$z_{tx} \in G(t, x, z, z_t, z_x), \quad (4)$$

$$z_{tx} \in F(t, x, z, z_t, z_x), \quad (5)$$

с граничными условиями (3). Вектор –функцию $z(t, x)$ удовлетворяющую (4), (3) назовем начальным допустимым состоянием, а вектор –функцию $z(t, x)$ удовлетворяющую (5), (3)-ослабленным допустимым состоянием.

Допустимое состояние, доставляющее минимум

функционалу (1) назовем минимизирующим состоянием.

В работе вводится понятие прравильного представления множества $F(t, x, z, p, q)$ и доказывается, что в случае $f(t, x, z, z_t, z_x, u) \equiv f^0(t, x, z, u)$ представление Янга

$$h(t, x, z, \sigma) = \int_{R^r} f^0(t, x, z, u) \sigma_{(t,x)}(du)$$

является правильным представлением множества $F(t, x, z)$, где $\sigma_{(t,x)} \in S$, S - множество вероятностных мер сосредоточенных на U , а U - метрический компакт.

Элелменты множества S назовем ослабленными или обобщенными управлениями. Пусть $z^0(t, x)$ ослабленное минимизирующее состояние, $\sigma_{(t,x)}^0 \in S$ соответствующее ослабленное управление, $h(t, x, z, z_t, z_x, \sigma)$ правильное представление множества $F(t, x, z, z_t, z_x)$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \xi_{tx}(t, x) = & \frac{\partial h(t, x)}{\partial z} \xi(t, x) + \frac{\partial h(t, x)}{\partial z_t} \xi_t(t, x) + \frac{\partial h(t, x)}{\partial z_x} \xi_x(t, x) + \\ & + \sum_{j=1}^m \eta_j(t, x) [h(t, x, z^0(t, x), z_t^0(t, x), z_x^0(t, x), \sigma_j) - h(t, x)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\xi(t, 0) = 0, 0 \leq t \leq T; \quad \xi(0, x) = 0, 0 \leq x \leq X \quad (7)$$

где $h(t, x)$ и производные означают значения $h(t, x, z, z_t, z_x, \sigma)$ в точке $(t, x, z^0(t, x), z_t^0(t, x), z_x^0(t, x), \sigma_{(t,x)}^0)$, $\eta_i(t, x)$ неотрицательные

функции, удовлетворяющие условию $\sum_{j=1}^m \eta_j(t, x) \leq 1$, $\sigma_i \in S$

произвольные элементы. Устанавливаются свойства множества решений (6), (7) и на основе этих свойств доказывается

Теорема: Пусть $\sigma_{(t,x)}^0$ оптимальное ослабленное управление, а $z^0(t, x)$ оптимальное минимизирующее состояние. Тогда почти при всех $(t, x) \in \Pi$ выполняется условие

$$H(t, x, z^0(t, x), z_t^0(t, x), z_x^0(t, x), \psi(t, x), \sigma_{(t,x)}^0) =$$

$$= \min_{\sigma \in S} H(t, x, z^0(t, x), z_t^0(t, x), z_x^0(t, x), \psi(t, x), \sigma)$$

где

$$H(t, x, z, z_t, z_x, \psi, \sigma) = \psi h(t, x, z, z_t, z_x, \sigma),$$

$\psi(t, x)$ -решение системы

$$\psi(t, x) = \lambda + \int_x^X \frac{\partial}{\partial z_t} H(\tau, s) ds + \int_t^T \frac{\partial}{\partial z_x} H(\tau, x) d\tau + \int_t^T \int_x^X \frac{\partial}{\partial z} H(\tau, s) d\tau ds,$$

а λ определяется на основе теоремы об отделимости множества решений (6), (7).

Литература

1. Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А., Москаленко А.Н., Овсянникова Н.А. Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем. Новосибирск: Наука, 1993.
2. Васильев О.В., Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркутск.ун-та, 1994.
3. Плотников В.И., Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу.- Ж.вычислит.матем.и матем. физики., 1972, №1, с.61-77.
4. Васильев Ф.П., Методы оптимизации. М.:Факториал Пресс, 2002.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Фараджев А.С.

Бакинский Государственный Университет

Пусть Ω - ограниченная область в пространстве R^4 , где $n > 3$, с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу

$$Pu \equiv \sum_{j=1}^r X_j^2 u + X_0 u + cu = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$Yu \equiv \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

где $X_0, X_1, \dots, X_r$ - однородные дифференциальные операторы

первого порядка с гладкими коэффициентами, c, f, γ_i ($i=\overline{1, n}$) вещественные гладкие функции. Отметим, что операторы $X_0, \dots, X_r$ могут быть линейно зависимы в Ω . Заданное на границе гладкое векторное поле Y имеет любое трансверсальное направление к границе Γ . В окрестность каждой граничной точки введем такую локальную систему координата $y_1, \dots, y_n$ с центром начало координат в данной точке, что граница Γ определяется уравнением $y_n=0$, а поле направления Y совпадает с осью oy_n .

В данной работе доказана теорема о существовании обобщенного решения из специального класса $K_s(\Omega)$, которая определяется следующим образом: $K_s(\Omega)$ - пространство обобщенных функций u , где квадрат нормы вводится так:

$$\|u\|_{k_s}^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{i=1}^r \|X_i u\|_{k_s}'^2, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_s$ - норма в пространстве H_s , $\|\cdot\|_s'$ - норма в H_s по касательным переменным $y_1, \dots, y_{n-1}$.

Можно показать, что пространство $K_s(\Omega)$ обладает всеми свойствами пространства $H_s(\Omega)$, так как нормы $\|\cdot\|_{k_s}$ и $\|\cdot\|_s$ эквивалентны.

Будем предполагать, что операторы $X_0, X_1, \dots, X_r, Y$ удовлетворяют следующим условиям:

А) Ранг алгебры Ли, порожденный операторами $X_0, X_1, \dots, X_r$ в области Ω , равен n , т.е. среди операторов

$$X_{i_1}, [X_{i_1}, X_{i_2}], [X_{i_1}, [X_{i_2}, X_{i_3}]], \dots, [X_{i_1}, [X_{i_2}, [X_{i_3}, \dots, X_{i_j}]]], \dots,$$

где $i_j=0, 1, \dots, r$, имеется n , которые линейно независимы в каждой точке области Ω . Здесь $[A, B] = AB - BA$ коммутатор операторов A, B .

Так как среди $X_0, \dots, X_r$ есть поле трансверсальное, в границе которого обозначим X_{j_1} , то в некоторой окрестности

точки $t \in \Gamma$ существуют такие гладкие функции α_k ($k=0, \dots, r; k \neq j_t$), β , что $X'_k = X_k - \alpha_k X_{j_t}$ ($k=0, \dots, r; k \neq j$), $Y' = Y - \beta X_{j_t}$ будет касаться границы в этой окрестности.

В) Ранг алгебры Ли, порожденный операторами X'_k ($k=0, \dots, r; k \neq j$), Y' , равен $n-1$, для $j=0, \dots, r$ выполнено условие

$$C) \quad [X_i, Y] = \sum_{k=1}^r d_{jk} X_k - d_j Y, \quad j = \overline{1, r},$$

где d_{jk}, d_j - гладкие функции.

Теорема. Пусть $f \in H_{s+1}(\Omega)$, где $s > \frac{1}{2}$ и выполнены

следующие условия

а) $c \leq -c_0 < 0$ в Ω , где $c_0 > 0$ достаточно большая постоянная;

б) операторы удовлетворяют условиям (А), (В), (С).

Тогда существует такое конечно-мерное подпространство $N \subset H_{s+1}(\Omega)$, что если f ортогонален N , то задача (1),(2) имеет решение $u \in K_s(\Omega)$.

Доказательство. Если $u(x)$ – решение задачи (1),(2), то

$$\begin{aligned} PY_u &= Yf + [P, Y]u \quad \text{в } U_t, \\ Y_u &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned}$$

где $[P, Y] = \sum_{i=1}^r [X_i^2, Y] + [X_0, Y] + [Y_k]$ - оператор второго порядка.

Отсюда, в силу теоремы 1.9.2 [1], существует оператор R , действующий в $K_s(U_t)$, для которого

$$\begin{aligned} PR(Yf + [PY]u) &= Yf + [P, Y]u \quad \text{в } U_t, \\ R(Yf + [P, Y]u) &= 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned}$$

Так как в мерной системе координат $y_1, \dots, y_n$ поле

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad \text{то находим}$$

$$u = SR(Yf + [P, Y]u), \quad (4)$$

где $Su = \int_0^{y_n} u(y', t) dt$ и $S \in L(K_s, K_s)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} Pv &= [P, Y]u && \text{в } U_t, \\ v &= 0 && \text{на } \Gamma, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\sum_{j=1}^r \|X_j v\|_s'^2 \leq C_1 \sum_{j=1}^r \left\{ \frac{1}{\delta} \|X_j k\|_s'^2 + \delta \|X_j v\|_s'^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} \|X_j v\|_s^2 \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ величины порядка длины диаметра области U_t , $\delta > 0$ - произвольное положительное число, выбирая S так, чтобы $C_1 \delta \leq \frac{1}{4}$, а ε так, что $C_1 \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \frac{1}{4}$ получаем

$$\sum_{j=1}^r \|X_j v\|_s'^2 \leq C_2 \sum_{j=1}^r \|X_j u\|_s'^2, \quad (5)$$

где $C_2 > 0$ - ограниченная постоянная, не зависящая от u .

Далее после некоторых оценок

$$\|v\|_s^2 \leq C_3 \left\{ \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^r \|X_j u\|_s'^2 \right\}. \quad (6)$$

Из неравенств получаем

$$\|v\|_{k_s} \leq C_4 \|u\|_{k_s}. \quad (7)$$

С другой стороны

$$\|u\|_{k_s} \leq \varepsilon C_5 \|v\|_{k_s}. \quad (8)$$

Ввиду условия а) из теоремы 1.9.2 [1], имеем, что существует такой оператор $R: K_s(U_t) + K_s(U_t)$, что

$$\begin{aligned} PR([PY]u) &= [P, Y]u && \text{в } U_t, \\ R([P, Y]u) &= 0 && \text{на } \Gamma. \end{aligned}$$

Из неравенств (7), (8) получаем, что, если выбрать ε так, чтобы

$C_4 \cdot C_5 \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, то оператор $A: u \rightarrow SR([P, Y]u)$, действующий в

K_s , ограничен в этом пространстве и имеет норму в K_s

меньше, чем $\frac{1}{2}$, т.е. $\|A\|_{K_s} \leq \frac{1}{2}$.

Из (4), учитывая оператор A , следует, что

$$(I - A)u = \rho R(Yf) \in K_s(U_t),$$

где I - единичный оператор. Так как $\|A\|_{K_s} \leq \frac{1}{2}$, то оператор

$I - A$ обратим в пространстве $K_s(U_t)$. При этом каждый

элемент вида $z = (I - A)v$, где $z \in K_s$ может иметь конечное число прообразов при отображении $I - A$. Пусть Φz означает тот прообраз, норма которого минимальна. Положим

$$R(f) = \Phi(SR(Yf)) \in K_s(U_t).$$

Пусть $y = R(f)$, тогда

$$(I - A)g = SR(Yf),$$

откуда имеем

$$g = SR(Yf + [P, Y]g).$$

Так, что

$$Yg = R(Yf + [P, Y]g).$$

Из этого равенства по определению оператора R следует, что

$$P(Yg) = Yf + [P, Y]g \quad \text{в } U_t,$$

$$Yg = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

т.е. $Y(Pg - f) = 0$. Отсюда, интегрируя, получаем

$$Pg - f = 0 \quad \text{в } U_t \text{ и}$$

$$Yg = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

а это означает, $g = R(f)$ является искомым решением из пространства $K_s(U)$.

С помощью разбиения единицы результат получается во всей области Ω . Теорема доказана.

Литература

1. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнение второго порядка

- с неотрицательной характеристической формой. Математический анализ. М.: Наука, 1969.
2. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. О задаче с косой производной // Матем. сборник, 1969, т.78, №1, с.148-176.
 3. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные операторы главного типа. М.: Наука, 1984.

RİYAZİ DİLÇİLİYƏ GƏTİRƏN YOLLAR

Şiriyev F.A,

Bakı Dövlət Universiteti

fikrethemkar@mail.ru

Dilçiliyin nisbətən gənc sahəsi olan piyazi dilçiliyə qədərki dövr və ona aparan yollar haqqında yazılmış məqalədə maraqlı məsələlər işıqlandırılır. Antik dövrdən Sössürə qədər dilə yanaşma ilə bağlı mübahisəli məqamlar, Sössürün dilçilik nəzəriyyəsində inqilabi xidmətləri və bu amilin müasir dilçilikdə yeni sahələrin, o cümlədən riyazi dilçiliyin yaranmasındakı rolu göstərilmişdir. Xaotik vəziyyətdə olan təbiəti fərqləndirmək üçün dilin vasitəçiliyi, hər bir obyekt tanıma bilməsi məsələsində dilin rolu və s. hallar, həmçinin müasir riyazi dilçilikdə mətnin avtomatik işlənilməsi metodlarının əslində Sössür nəzəriyyəsinin davamı olması iddia olunur. Məqalədə həm də riyazi dilçiliyin əsas məqsədi olan təbii dillərin strukturunun, anlayışlarının formal baxımdan yanaşma metodu ilə öyrənilməsi barədə fikirlər vardır.

Açar sözlər: loqos, “həqiqi dil”, nitq, “ifadə edənlər”, alqoritmlər, avtomatik tərcümə.

Antik dövr üçün sinkretik düşüncə (*sinkretik*-birləşmə;lat.) səciyyəvi idi. İnsan təbiət və cəmiyyətin bir hissəsi kimi dərk edilirdi. İnsan düşüncəni müəyyən edirdi, düşüncə isə dünyanı. Dünyanı sözlə tanımaq olardı, ona görə nitq də düşüncə ilə müəyyən edilirdi. Düşüncə yalnız şifahi-məntiqi formada qəbul edilirdi. Dil və düşüncənin məzmunu fərqlənmirdi. Dil haqqında antik biliklərin əsas anlayışı allahların insanlarla söhbət etmək vasitəsi olan *Loqos* idi. Loqos deyiləndə onlar həm fikri düzgün ifadə edən sözü, həm də sözlə düzgün ifadə olunan fikri nəzərdə tuturdular. Bu dövrdə belə bir sual mövcud idi- dil üçün ilk olan nədir- insan şüuru, yoxsa xarici obyektiv reallıq? İlk dəfə Aristotel

tərəfindən nitq və dilin öyrənilməsinin məntiqi irəli sürülür, sonra isə Kvintilian incəsənətin qrammatika, məntiq və ritorika üzrə bölgüsünü təqdim edir.

Bir qədər sonralar Roma imperiyasının güclü təsiri nəticəsində mindən çox dil olan Avropada latın dili ümumişlək dilə çevrildi və dil haqqında biliklərin əsas problemi realistlər və nominalistlər arasındakı mübahisə oldu. Realistlər iddia edirdilər ki, universal anlayışlar (insan, at və s.) əslində fiziki reallıqdan qabaq yaranıb və onlardan asılı olmayaraq mövcuddur. Nominalistlər bildirirdilər ki, müxtəlif obyektlər heç bir addan asılı olmayaraq mövcuddurlar və dildə universal anlayışlar ancaq dərk olunan mücərrəd anlayışları əhatə edir.

1453-cü ildə Konstantinopol çökdü. Bununla da, latın dili yalnız İtaliya çərçivəsində məhdudlaşdı. Doğrudur, həmin dövrdə yunan və Roma klassiklərinin əsərlərinə yeni bir maraq oyandı. Lakin Avropa siyasi cəhətdən yeni dövlətlərə bölündü. İdarə etmək üçün ayrı-ayrı hökumətlər yerli dilləri ümummillil dil kimi istifadə etməyə başladı. Latın dilinə ehtiyac azaldı.

Orta əsrlər qrammatika anlayışını yaratdı (Port-Royal qrammatikası və s.), o da morfologiya, sintaksis və pragmatikaya bölünürdü. Lokk təklif etdi ki, Konsept anlayışı (anlayış kimi) və onun ifadəsi ayrılсын. Kondiak nitqi minimum məna vahidlərinə ayırırdı. Dil quruluş və mənacə eyniləşdirildi. Kekston kitab çapı üçün dil standartları hazırladı. Quttenberq tərəfindən kitab çapının ixtirası isə dilin öyrənilməsinin xarakterini dəyişdirdi. Yeni dövrün dil haqqında bilgilərinin əsas problemi “Həqiqi dil” axtarışı idi. Avropa alimləri sanskrit, yaxud Yunan dilindən daha mürəkkəb olan və güclü fleksiya uğramış qədim dilə diqqət yönəldilər. Humboldt qədimlərdə Hind-Avropa dillərinin mövcudluğu haqda fərziyyə irəli sürdü. Darvinizm ibtidai tayfaların dilinin öyrənilməsinə və dilin təkamülü haqda təsəvvürlərə təkan verdi.

Müasir dilçiliyin banisi olan Ferdinand de Sössürə görə, fikir kainat kimidir, heç bir şey müstəqil ola bilməz. Dilin yaranmasına qədər heç bir şey dəqiq (aydın və birmənalı) müəyyən edilə bilməz. İnsan tərəfindən əşyalara və hadisələrə verilən ilkin adlar (xüsusilə səsler və sözlər) ixtiyaridir. Sössürə görə, qədim dilin bərpası yollarının öyrənilməsi əhəmiyyətsizdir. Dilin öyrənilməsi üçün onun quruluşunun öyrənilməsi daha əhəmiyyətlidir. Daha

əhəmiyyətli onun tədrisi üçün dil strukturunu aydınlaşdırmaqdır. Sössür göstərir ki, dil və ətraf mühitin münasibətləri dil haqqında biliklərin əsasını təşkil etmir. Dili (*la langue*) danışmağı bacaranların hamısı üçün “fikri cümləyə çevirmək aləti”, nitqi (*la parole*) isə xüsusi şəxslər üçün konkret qabiliyyət hesab edirdi. Sössürə görə, dilçilik dilin (*la langue*) strukturunu araşdırır.

Sössürə qədər dilə yalnız təbiətdə gördüklərimizi adlandıran vasitə kimi (adlar nəzəriyyəsi) baxılırdı. Sössür isə belə təxmin etdi: xaoslu vəziyyətdə olan təbiəti fərqləndirmək üçün dil vasitəçilik edir ki, hər bir obyekt tanına bilsin. Bu qəbul olunmuş təsəvvürlərdən 180 dərəcə fərqli fikir idi. Başqa sözlə, bu dilin muxtariyyəti demək idi. Dili öyrənmək artıq təbiət hadisələrindən asılı olmayan müstəqil bir elmə çevrildi. Sössürün “dilin muxtariyyəti” tezi “ifadə edilənlər” və “ifadə edilənlər” baxımından inkişaf etdi. Dil işarəsi akustik məzmunundan (“ifadə edilənlər”) və anlayışdan (“ifadə edilənlər”) ibarətdir və iki əsas xüsusiyyəti vardır. Birincisi, “ifadə edilənlər”lə “ifadə edilənlər” arasında birbaşa və təbii əlaqə yoxdur, bu münasibətlər ixtiyaridir. İkincisi, “ifadə edilən”in yalnız bir ölçü meyarı var, o da zamandır. Qalan meyarlara onlar (ifadə edilənə ifadə edilən) müdaxilə edə bilmirlər-sadəcə, buna xarici təsir mümkün deyil, bu – artıq dilə xas olan keyfiyyətdir.

Sössür ifadə edilənə ifadə ediləni birlikdə dilin “özbaşına” xarakteri ilə qarşı-qarşıya qoymaqla Çarlz Sanders Pirs kimi alimləri insanın idrak prosesini tədqiq etməyə sövq etdi.

Pirs dili müəyyən bir kontekstdə idarə etmək üçün “şərh” (interpretasiya) anlayışını təqdim edir. Onun tərəfindən üç struktur (soldan sağa abstraksiya artır) təklif edilmişdir:

Nişan	göstərici	simvol
abduksiya	induksiya	deduksiya
termin	fərziyyə	dəlil
Sössür dilin müstəqilliyi naminə, ümumiyyətlə, bu sütunu öz təlimlərindən çıxarmışdır.	Sössürün "ifadə edilənlər"i	Sössürün "ifadə edilənlər"i

Deduksiya(Lat. *deductio* – nəticə) - sırf əvvəlki düşüncələrin

məntiqi nəticəsində əldə edilən mövqə; burada nəticələrin çıxarılması yalnız məntiq qaydalarına uyğun, halqaları nəticəçıxarma ifadələrindən ibarət olan mühakimə (təhlil) zənciri ilə aparılır. Deduksiya hamı tərəfdən qəbul edilən aksioma və ya sadə bir fərziyyədən başlayır, nəticələrin tədqiqi və xüsusi teoremlərlə bitir. Əgər deduksiyanın “xammalı” doğrudursa, tədqiq mərhələləri də düz gedəcəkdir. Qısaı, induksiyanın əksi olan deduksiya hər hansı bir ümumi fikirdən məntiqi yolla yeni müddəə çıxarma vasitəsidir.

Induksiya (Lat. *inductio* - rəhbər təlimat) - Ayrı-ayrı, xüsusi təsadüflərdən ümumi nəticəçıxarma üsulu. Induktiv mühakimədə məntiq qanunları ilə deyil, yalnız bəzi faktiki psixoloji və ya riyazi təəvvülər vasitəsilə nəticəyə gəlinir.

Abduksiya - fərziyyələr ilə məşğul olan mühakimələr. Real dünya ilə bağlı fərziyyələr qaydalar və əldə olunmuş nəticələr arasında əldə edilir. Məntiqdə abduksiya – sillogizm (Sillogizm elə əqli nəticə formasıdır ki, burada iki hökm orta termin vasitəsilə əlaqələndirilir və yeni bir nəticə hökmü çıxarılır. Sadə qəti sillogizmlər üç hissədən ibarət olur: böyük, kiçik müqəddimələr və nəticə) və reduktiv nəticənin elə növüdür ki, burada bir şərti bəyanatdan ikinci nəticə çıxır. Məsələn: birinci bəyanat: Bütün insanlar fanidir. Nəticə - Sokrat - ölüdür. Abduksiyanın köməyi ilə ikinci nəticə Sokratın insan olması ola bilər.

Dil həm hər kəsin ağılının göstəricisi kimi, həm müəyyən aksiomaların əsası kimi, həm də real dünyanın güzgüsü kimi baxılır. Müasir riyazi dilçilikdə mətnin avtomatik işlənməsi metodları, əslində Sössür nəzəriyyəsinin davamıdır, onun nitq araşdırmaları əlavə etməklə dil öyrənilməsi bilgilərinə əsaslanır. Ümumiyyətlə, elmdə obyektiv aləmin dərk edilməsi, onun qanun mexanizminin insan beynində inikası yollarını araşdırmaq üçün xüsusi metod – dərk edilmə metodundan istifadə edilir. Dərk edilmə metoduna şərti olaraq üç meyarla yanaşılır:

1. Didaktik-materialist metod. Bu metod bütün elmi və dərkətmənin üslubi olub, təbii varlığın öyrənilməsinə yönəlmişdir.
2. Elmi dərkətmənin ümumi metodu. Bu metoda analiz, sintez, induksiya və deduksiya, tarixi və məntiqi ümumiləşdirmələr, hipoteza, təcrübi, analogi, modelləşdirmə, formal yanaşma, aksiomatik və s. daxildir.

3. Dərketmənin xüsusi metodu. Bu metod konkret elmlərdə istifadə olunur. Məsələn, riyaziyyatda riyazi induksiya metodu.

İ.D.Andreyev “Nəzəriyyə-elmi biliklərin təşki forması kimi” adlı əsərində aksiomatik və formalize metodları, modelləşdirmə metodu (bu metodu müəllif riyazi metodlar sırasına daxil etmişdir) haqqında qısa şəkildə məlumat vermişdir. Şərti olaraq bu metodlar müxtəlif elm sahələrində tətbiq olunduğundan (fizika, kimya, biologiya, elektrotexnika, iqtisadiyyat, dilçilik və s.) elmi dərketmənin ümumi metodu hesab olunurlar. Deməli, riyazi metodlara təkcə aksiomatik, formallaşma deyil, riyaziyyatın bütün əsas metodları daxildir. Bu metodların sayı 30-a qədərdir. Bunlardan yalnız dilçilikdə istifadə olunanları verməklə məhdudlaşacağıq. Beləliklə, dilçilikdə geniş tətbiq dairəsi olan aksiomatik, modelləşdirmə, riyazi, məntiq, ehtimal-statistik, nəzəri-kibernetik metodlarından və alqoritmlər, çoxluqlar, avtomatlar nəzəriyyəsindən istifadə olunur. Qeyd etməliyik ki, dilçiliyin bütün səviyyələrində bu metodlardan geniş istifadə olunur.

Məhz bu metodların tətbiqi ilə əlaqədar dilçilikdə yeni bir sahə - riyazi dilçilik yarandı ki, burada əsas məqsəd təbii dillərin strukturunu, anlayışlarını formal baxımdan yanaşma metodu ilə öyrənməkdir. Hələ XX əsrin 50-ci illərində yaranmış praktiki tələblərdən doğan ənənəvi dilçilikdə mövcud olan əsas anlayışların dəqiqləşdirilməsi, mətnlərin avtomatik işlənməsi və emalı, o cümlədən, avtomatik tərcümə kimi məsələləri qarşısında duran riyazi dilçilik yalnız riyazi məntiqə söykənən riyazi metodların tətbiqi ilə həyata keçirilə bilərdi. Riyaziyyatın bir qolu olan bu sahə daim inkişaf edərək dilin müxtəlif səviyyələrinə sirayət etdi. Yeni istiqamətlər: struktur dilçilik, formal qrammatikalar, dilin modelləri, deşifrə məsələləri, törədici qrammatikalar, transformasiya qrammatikaları yarandı. Bundan başqa riyazi dilçiliyə müasir dövrdə semantikanın öyrənilməsində riyazi məntiqin predikat və kvantor kimi anlayışları daxil oldu. Sintaksisə gəlincə isə riyazi metodların köməyi ilə strukturun yeni yönələri meydana çıxdı. Çoxluqlar nəzəriyyəsindən istifadə edərək ənənəvi dilçilikdə mövcud olan

qrammatik kateqoriyalar yeni bucaq altında dəqiqləşdirildi.

Ədəbiyyat

1. Ferdinand de Sössür. Ümumi dilçilik kursu. Bakı: Nurlan, 2003, 408 s.
2. Андреев И.Д. Теория как форма организации *научного знания*. – М.: Наука, 1979
3. Axundov A .A. Ümumi dilçilik (dilçiliyin tarixi, nəzəriyyəsi və metodları). Bakı: Maarif, 1988, 260 səh.
4. Rəcəbli Ə.Ə. Sosiolingvistika. Bakı: Nurlan, 2004, 520 s.
5. Axundov A .A. Riyazi dilçilik. Bakı: ADU-nun nəşriyyatı, 1979, 18 səh

ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ СИСТЕМОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Марданов М.Дж.^{*}, Мансимов К.Б.^{**,***}, Абдуллаева Н.Г.^{***}

^{*}*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*

^{**}*Бакинский Государственный Университет*

^{***}*Институт Систем Управления НАН Азербайджана*

mansimov@front.ru

В работе рассматривается одна задача оптимального управления описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием. При предположении открытости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Рассмотрим управляемый процесс описываемый системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(h(t)), u(t)) + \int_{t_0}^t K(t, \tau, x(\tau), x(h(\tau)), u(\tau)) d\tau, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = a(t), \quad t \in [h(t_0), t_0]. \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, y, u)$ ($K(t, \tau, x, y, u)$) – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная в $T \times R^n \times R^n \times R^r$ ($T \times T \times R^n \times R^n \times R^r$) вместе с частными производными по (x, y, u) до второго порядка включительно, $h(t)$ ($h(t) < t$) – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция, причем $\dot{h}(t) > 0$, $a(t)$, $t \in E_{t_0}$ заданная непрерывная начальная вектор-функция, $u(t)$ – r -мерная кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное решение $x(t)$ (в смысле, например [1-3]) начальной задачи (1)-(2).

На решениях системы (1)-(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим многоточечный функционал

$$S(u) = \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)). \quad (4)$$

Здесь $T_i \in (t_0, t_1]$, $i = \overline{1, k}$ – заданные точки, причем $t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k \leq t_1$, а $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_k)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая в $R^{n \cdot k}$ скалярная функция.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управления $u(t)$, являющееся решением поставленной задачи назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс – $(u(t), x(t))$ оптимальным процессом.

Пусть $(u(t), x(t))$ фиксированный допустимый процесс.

Введем следующие обозначения

$$H(t, x, y, u, \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x, y, u) + \int_t^{t_1} \psi'(\tau) f(\tau, t, x, y, u) d\tau,$$

$$H_x(t) \equiv H_x(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)), \quad H_y(t) \equiv H_y(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)),$$

$$H_{xy}(t) \equiv H_{xy}(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)), \quad H_{xx}(t) \equiv H_{xx}(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))$$

$$H_u(t) \equiv H_u(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)), \quad H_{uu}(t) \equiv H_{uu}(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)).$$

Здесь $\psi = \psi(t)$ – n -мерная вектор-функция сопряженных переменных являющееся решением задачи (сопряженная система)

$$\psi(t) = \int_t^{t_1} H_x(\tau, x(\tau), u(\tau), \psi(\tau)) d\tau - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi_i(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial a_i} +$$

$$+ \int_t^{t_1} H_y(r(\tau), x(r(\tau)), u(r(\tau))) \dot{r}(\tau) d\tau, \quad \psi(t) \equiv 0, t > t_1$$

где $\alpha_i(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_0, T_i]$, а $r(t)$ функция обратная к $h(t)$.

Теорема 1. (Аналог уравнения Эйлера). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы соотношение

$$H_u(\theta, x(\theta), x(h(\theta)), u(\theta), \psi(\theta)) = 0, \quad (5)$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1]$.

Здесь и в дальнейшем $\theta \in [t_0, t_1]$, $\theta \neq T_i$, $i = \overline{1, k}$ произвольная точка непрерывности управления $u(t)$.

Каждое допустимое управление удовлетворяющее уравнению Эйлера (5) назовем классической экстремалью в задаче (1)-(4). Ясно, что оптимальное управление (если оно существует) находится среди классических экстремалей.

Поэтому возникает необходимость в сужении множество классических экстремалей. А для этого надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка.

В работе исследуя вторую вариацию критерия качества при помощи методики предложенной в работах [4, 5] получены различные интегральные необходимые условия оптимальности второго порядка.

Литература

1. Васильев Ф.П. Условия оптимальности для некоторых классов систем, не разрешенных относительно производной // ДАН СССР, 1969, т. 184, № 6, с. 1011-1013.
2. Марданов М.Дж., Гасанов К.К. Условия оптимальности в системах с запаздыванием // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1983, № 2, с. 21-25.
3. Васильев Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных играх для интегро-дифференциальных систем с запаздыванием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика, 1972, № 2, с. 40-50.
4. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления // Автореферат дисс. на соиск. ученой степени доктора физ.-мат. наук. Баку. 1994, 42 с.
5. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку. Изд-во ЭЛМ. 2013. 363 с.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Алиева С.Т., Ахмедова Ж.Б., Мансимов К.Б.

Бакинский Государственный Университет

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

mansimov@front.ru

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi_1(c(x_1)) + \varphi_2(d(x_2)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} z(t+1, x+1) &= f(t, x, z(t, x)), \quad t \in D = T \times X, \\ &\left(\begin{array}{l} T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad X = \\ \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1\} \end{array} \right), \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_2, \\ z(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$a(x+1) = \begin{cases} c(x+1), & x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \\ d(x+1), & x = x_1 + 1, \dots, x_2 - 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$c(x+1) = F(x, c(x), u(x)), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (4)$$

$$c(x_0) = c_0,$$

$$d(x+1) = g(x, d(x), v(x)), x = x_1, \dots, x_2 - 1, \quad (5)$$

$$d(x_1) = G(c(x_1)),$$

$$u(x) \in U \subset R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1,$$

$$v(x) \in V \subset R^r, x = x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1. \quad (6)$$

Здесь $f(t, x, z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая по z при всех (t, x) n -мерная вектор-функция, $F(x, c, u)$ ($g(x, d, v)$) – заданная дважды непрерывно дифференцируемая по (c, u) ((d, v)) n -мерная вектор-функция при всех x , $b(t)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, $G(c)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая n -мерная вектор-функция, t_0, t_1, x_0, x_1, x_2 – заданные числа, причем, разности $t_1 - t_0$ и $x_2 - x_1$ – есть натуральные числа, $u(x), v(x)$ – управляющие вектор-функции, $U(V)$ – заданное непустое, ограниченное и открытое множество, c_0 – задан, $\varphi_1(c), \varphi_2(d)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Следуя работам [1-2] в рассматриваемой задаче получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Литература

1. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку. Изд-во БГУ, 2013, 161 с.
2. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1991, №2, с. 359-362.
3. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в дискретных двухпараметрических системах // Изв. АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1998, №2, с. 56-60.

Яхья Муэллим. Пусть будет почитаемо имя Его

*И что же придёт Тебе из вазы с розами,
Цветы из моего бери Гулистана!
Едва пару дней цветок живёт разный,
Мой же Гулистан длиться будет свежий
(Саади, Гулистан)*

До сих пор свою актуальность сохраняют мысли поэта Саади (1210-1292), более чем семисотлетней давности. Он писал: *«Кто хочет быть выслушанным собеседником своим, повесть подбирает по вкусу его»*. Он обращал внимание на черты, которые должны характеризовать учёного мужа, ищущего правды, добра, красоты. В свою очередь, Имадеддин Насими (1501-1562) указывал: *«Никто благодаря гипотезам, славным мужем не стал. Кто знает правду, легко поймёт: в гипотезах я не вмещаюсь»*. Относя эти мысли к культурно-цивилизационной деятельности Профессора Яхьи Джафар оглы Мамедова (10.10.1930-26.01.2000) – математика и научного организатора в университете в Баку, с уверенностью следует сказать, что он заслуживает вечной памяти потомков.

Находясь в качестве аспиранта в Азербайджанском Университете (с 4 декабря 1978 года по 29 апреля 1981 года), я повстречал Профессора Яхью Мамедова, который проявлял традиционную азербайджанскую форму вежливости. Он был тогда проректором университета (1971-1987 гг.). В организационных связях он показался мне близким учёным. Это вытекало из некоторых обстоятельств, в частности:

1. Он был дружен с моим научным руководителем, выдающимся ученым Профессором Хасан Исмаил оглы Ширалиевым (1927-1997), чьим академическим преподавателем был Поляк Александр Маковельский (1884-1969) – заслуженный в развитии азербайджанских гуманитарных наук, 2. Он был опекуном аспиранта из Польши Збигнева Залевского (1949 г. р.), подготавливающего докторскую диссертацию (кандидатскую) в области численных методов и дифференциальных уравнений, которую защитил 23 декабря 1980 года, в Грузинской Академии Наук в Тбилиси, 3. В научных исследованиях он занимался

исследованием математической мысли Поляка Стефана Банаха (1892-1945) – соавтора теории функционального анализа, одного из создателей львовской математической школы, 4. Поддерживал научные контакты с математиками из Гданского Университета, исследующими численные методы и дифференциальные уравнения. Принимал участие в конференциях, организованных гданскими математиками, 5. Проявлял интерес к исследованию наследия прошлого, в том числе к изменениям в культурной жизни Азербайджана, в которой участвовали Поляки, среди прочего, как организаторы научной жизни, вовлечённые в создание высших учебных заведений, в том числе университета.

Профессор Яхья Мамедов пользовался большим авторитетом в академическом обществе, в том числе среди молодых кадров. Например, к Нему с уважением относился Рамиз Хасан оглы Ахмедов (1953 г.р.). С гордостью представлял свои научные достижения. Профессор окончил обучение, как отличник. В течение трех лет после окончания института стал доктором (кандидатом) математических наук. Работая в университете, в течение короткого времени, получал все более высокие должности, как должность академического преподавателя. В возрасте 35 лет он был назначен на должность профессора, и Ему была поручена функция руководителя кафедры. В 1980 г. был удостоен звания *заслуженного деятеля науки*. В 53 года был избран членом корреспондентом Азербайджанской Академии Наук. Пользовался уважением, как ученый вовлечённый в воспитание научных кадров. Под Его руководством подготавливали диссертации наряду с местными молодыми исследователями, представители бывших республик Советского Союза, Ближнего Востока и европейских стран. Он был автором базовых учебников в области прикладной математики.

«Уходящее время просеивает песчинки, лишь иногда блещут в нём звёздные алмазы.» Так же и с людьми, которых встречают на своем пути. Многие, очень многие проходят мимо. Только немногие оставляют значительные следы памятные годами.

Такими качествами должен обладать человек, чтобы получить важные достоинства и титулы, такой ум, черты характера и деятельные способности делают его не только

выдающимся ученым, но и учителем для тех, кто пошёл по пути научных поисков. Достижения Профессора Яхьи Мамедова вписываются золотыми буквами в идентичность Азербайджанского Университета в Баку. Он остается бесспорным мастером и специалистом в области исследования прикладной математики и организации науки.

Невероятно приятным, и в то же время большой честью является писать о столь Выдающемся Ученом, широко известном в науке вдохновителе ее современного развития, умело совмещающем научно-исследовательскую работу с организационной и социальной деятельностью. Важные компоненты в его биографии: наука – знание – мудрость. С течением времени я вспоминаю время обучения в университете в Баку, воссоздаю в памяти фамилии известных учёных, и в том числе ректора, Яхью Мамедова и его соратников. Я стараюсь углубить свои знания об Азербайджане и его жителях. В этом году (2015 г.) я опубликовал книгу под названием *«Азербайджан – Польша. Звенья взаимных контактов.»* Я высоко ценю пребывание в Азербайджане с целью образования. Я встретил там великих ученых. Они внесли свой вклад в формирование моего научного пути. Я академик, профессор гуманитарных наук. Говоря языком Саади: «я спасительные советы собирал с большой заботой, времени немало потратив на встречах с наукой в Азербайджане.»

*Проф. Андрей Ходубский,
Польша*