

DIFFERENCE-DIFFERENTIAL SCHEME FOR DELAY PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

Amiraliyev G., Kudu M.

Erzincan University, Faculty of Art and Science

Key Words: Sobolev Equation, Delay Difference Scheme, Error Estimate

1. Introduction

We consider the initial-boundary value problem for pseudo-parabolic differential equation with delay in the domain

$$\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]; \bar{\Omega} = [0, l], \quad Q = \Omega \times (0, T], \quad \Omega = (0, l):$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} &= b(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c(t) \frac{\partial^2 u(x, t-r)}{\partial x^2} \\ &+ d(t) u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [-r, 0], \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1.3)$$

where $a \geq \alpha > 0$, b, c, d, f and φ are sufficiently smooth functions satisfying certain regularity conditions to be specified, $r > 0$ represents the delay parameter. Equations of this type arise in many areas of mechanics and physics. They are used to study heat conduction [11], homogeneous fluid flow in fissured rocks [9], shear in second order fluids [16,23] and other physical models. The important characteristic of these models is that they express the conservation of a certain quantity (mass, momentum, heat, etc.) in any sub-domain. For a discussion of existence and uniqueness results of pseudo-parabolic equations see [10,12,18,23]. An overview of some approximate methods and applications of pseudo-parabolic equations can be found in [2–6,13–15,19,20,24]. The numerical study of pseudo-parabolic equations with delay has been given in [6,19] and references therein. We also note that, various approximate methods for delay parabolic equations were investigated in [1,7,8,17,21, 22]. In this study, we use the method of lines for the discretization in space variable for the problem (1.1)-(1.3). The method of lines is a general technique for solving partial differential equations by typically using finite difference relationships for the spatial derivatives or the time derivative. Our aim is to get a fourth-order accurate difference-

differential scheme and to establish the error estimate for its solution. For the time variable we use the appropriate Runge-Kutta method for the realization of our difference-differential problem. Numerical results are also given at the end to demonstrate the efficiency of the method.

2. The Difference Scheme and Convergence

On the $\bar{\Omega}$, we introduce the uniform mesh

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1, h = l/N\}$$

and denote $g_{\bar{x},i} = (g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1})/h^2$ for any mesh function g_i .

We propose the following difference-differential scheme for approximating (1.1)-(1.3):

$$\begin{aligned} y'_i(t) - (a(t) - h^2/12)y'_{\bar{x},i}(t) &= (b(t) + d(t)h^2/12)y_{\bar{x},i}(t) + c(t)y_{\bar{x},i}(t-r) \\ &+ d(t)y_i(t) + [f_{i+1}(t) + 10f_i(t) + f_{i-1}(t)]/12, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, t \in (0, T], \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$y_i(t) = \varphi_i(t), i = 0, 1, 2, \dots, N, t \in (0, T], \quad (2.2)$$

$$y_0(t) = y_N(t) = 0, t \in (0, T]. \quad (2.3)$$

Theorem 2.1. Let the derivatives $\partial^7 u / \partial t \partial x^6$, $\partial^6 u / \partial x^6$ are bounded on the $\bar{Q}$ and $\alpha - h^2/12 \geq \alpha_* > 0$. Then the error of the problem (2.1)-(2.3) satisfies

$$|y_i(t) - u_i(t)| \leq Ch^4, i = 0, 1, \dots, N, t \in (0, T].$$

3. Numerical Example

Consider the particular problem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + e^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t-1) + u(x, t) = e^{-t} \sinh(x),$$

$$(x, t) \in [0, 1] \times (0, 2],$$

$$u(x, t) = 100e^{-t} (\sinh(x) - x \sinh(1)), (x, t) \in [0, 1] \times [-1, 0],$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, t \in (0, 2].$$

The exact solution of this problem is

$$u(x, t) = 100e^{-t} (\sinh(x) - x \sinh(1)), (x, t) \in [0, 1] \times [-1, 0].$$

To solve this problem numerically, we use the appropriate Runge-Kutta method. The spatial and time steps are both taken to be 0.1. The obtained results are essentially in agreement with the theoretical analysis.

References

- [1] Kaushik, A., Sharma, M.: A robust numerical approach for singularly perturbed time delayed parabolic partial differential equations. *Comput. Math. Model.* 23(1), 96-106 (2012).
- [2] Amiraliyev, G. M.: Difference method for the solution of one problem of the theory of dispersive waves. *USSR Differ. Equat.* 26, 2146-2154 (1990).
- [3] Amiraliyev, G. M., Mamedov, Y.J.: Difference schemes on the uniform mesh for a singularly perturbed pseudo-parabolic equations. *Tr. J. Math.* 19, 207-222 (1995).
- [4] Amiraliyev, G. M., Amiraliyeva, I. G.: Difference schemes for the singularly perturbed Sobolev equations. In Proceedings of the International Conference on Difference Equations, *Special Functions and Applications, Munich*, 23-40 (2005).
- [5] Amiraliyev, G. M., Duru, H., Amiraliyeva, I. G.: A parameter-uniform numerical method for a Sobolev problem with initial layer. *Numer. Algorithms.* 44, 185-203 (2007).
- [6] Amirali, I., Amiraliyev, G. M., Cakir, M., Cimen, E.: Explicit finite difference methods for the delay pseudo-parabolic equations. *Scientific World J. Article ID 497393*, 7 pp (2014).
- [7] Ansari, A. R., Bakr, S. A., Shishkin, G. I.: A parameter-robust finite difference method for singularly perturbed delay parabolic partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 205, 552 – 566 (2007).
- [8] Bashier, E. B. M., Patidar, K. C.: A second-order fitted operator finite difference method for a singularly perturbed delay parabolic partial differential equation. *J. Difference Equat. Appl.* 17(5), 779–794(2011).
- [9] Barenblatt, G., Zheltov, I., Kochina, I.: Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *J. Appl. Math. Mech.* 24, 1286-1303 (1960).
- [10] Bouzani, A.: Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 291, 371-386 (2004).
- [11] Chen, P. J., Gurtin, M. E.: On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Z. Angew. Math. Phys.* 19, 614-627 (1968).

- [12] Davis, P. L.: A quasilinear parabolic and related third order problem. *J. Math. Anal. Appl.* 49, 327-335 (1970).
- [13] Ewing, R. E.: Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 15, 1125-1150 (1978).
- [14] Ford, W. H., Ting, T. W.: Uniform error estimates for difference approximations to nonlinear pseudo-parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 15, 155-169 (1974).
- [15] Gu, H.: Characteristic finite element methods for nonlinear Sobolev equations, *Appl. Math. Comput.* 102, 51-62 (1999).
- [16] Huilgol, R.: A second order fluids of the differential type. *Int. J. Nonlinear Mech.* 3, 471-482 (1968).
- [17] Gowrisankar, S., Srinivasan, N.: A robust numerical scheme for singularly perturbed delay parabolic initial-boundary-value problems on equidistributed grids, *Electr. Trans. Numer. Anal.* 41, 376-395 (2014).
- [18] Lightbourne, J. H., Rankin, S. M.: A partial functional differential equation of Sobolev type. *J. Mat. Anal. Appl.* 93, 328-337 (1983).
- [19] Okcu, P., Amiraliyev, G.M.: Error estimates to pseudo-parabolic initial- value problem with delay, *Math. Comput. Appl.*, 18, No.3, 283- 292(2013).
- [20] Sun, T., Yang, D.: The finite difference streamline diffusion methods for Sobolev equations with convection-dominated term. *Appl. Math. Comput.* 125, 325-345 (2002).
- [21] Sunil K., Mukesh Kumar.: High order parameter-uniform discretization for singularly perturbed parabolic partial differential equations with time delay, *Comput. Math. Appl.* 68(10), 1355-1367, (2014).
- [22] Tian, H.: Asymptotic stability of numerical method for linear delay parabolic differential equations. *J. Comput. Math. Appl.* 56, 1758-1765 (2008).
- [23] Ting, T. W.: Certain non-steady flows of second-order fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 14, 1-26 (1963).
- [24] Yang, M.: Analysis of second order finite volume element methods for pseudo-parabolic equations in three spatial dimensions. *Appl. Math. Comput.* 196, 94-104 (2008).

OFFLINE GENERALIZED MULTISCALE FINITE ELEMENT METHOD FOR PROBLEMS IN PERFORATED HETEROGENEOUS DOMAINS

Eric T. Chung

*Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong
(CUHK), Hong Kong SAR. Email: tschung@math.cuhk.edu.hk*

Yalchin Efendiev

*Department of Mathematics & Institute for Scientific Computation
(ISC), Texas A&M University, College Station, Texas, USA
AND Center for Numerical Porous Media (NumPor),
King Abdullah University of Science and Technology (KAUST),
Thuwal 23955-6900, Kingdom of Saudi Arabia.
Email: efendiev@math.tamu.edu*

Maria Vasilyeva

*Department of Computational Technologies, Institute of Mathe-
matics and Informatics, North-Eastern Federal University, Yakutsk,
Republic of Sakha (Yakutia), Russia, 677980 & Institute for
Scientific Computation, Texas A&M University, College Station, TX
77843-3368*

Many processes in nature have multiscale nature. These include flows in porous media, deformation in composite materials, pore-scale processes, and so on. Numerical solution techniques for these processes are prohibitively expensive and require resolving fine-scale details. For example, solving flows in porous media at the pore scale require resolving distances between the particles. Such high-level resolution is prohibitively expensive for simulations at large scales. For this reason, some type of model reduction is necessary.

Processes in perforated domains constitute one of very important multiscale problems. In these problems, the partial differential equations are solved outside perforations. More precisely, if we consider $\Omega \subset R^d$ ($d=2,3$) to be a bounded domain covered by inactive cells (for Stokes flow and Darcy flow) or active cells (for elasticity problem) B^ε . We use the superscript ε to denote quantities related to perforated domains. The active cells are where the underlying problem is solved, while inactive cells are the

rest of the region. Suppose the distance between inactive cells (or active cells) is of order ε . Define $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus B^\varepsilon$. See Figure 1 for an illustration of the perforated domain. We consider the following problem defined in a perforated domain Ω^ε

$$L^\varepsilon(w) = f, \quad \text{in } \Omega^\varepsilon, \quad (1)$$

$$w = 0 \text{ or } \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \text{ on } \partial\Omega^\varepsilon \cap \partial B^\varepsilon, \quad (2)$$

$$w = g, \text{ on } \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon, \quad (3)$$

where L^ε denotes a linear differential operator, n is the unit outward normal to the boundary, f and g are source and boundary terms.

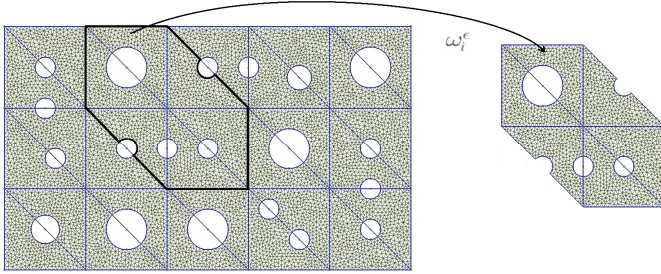


Figure 1. Illustration of a perforated domain, coarse elements and coarse neighborhoods.

The numerical solution techniques developed by multiscale procedures consist of approximating the solution on a coarse grid (see Figure 1 for the illustration of a coarse grid). Traditional approaches include numerical homogenization or upscaling ([23]). The main idea of these approaches is to derive macroscopic equations and local solutions, which allow computing the macroscopic coefficients. To demonstrate an example, we consider Stokes system in a periodic domain with a period size ε (see [23])

$$-\nabla p_\varepsilon + \mu \varepsilon^2 \Delta v_\varepsilon = f \text{ in } \Omega_\varepsilon, \text{div}(v_\varepsilon) = 0, \text{ in } \Omega_\varepsilon, \quad (4)$$

$v_\varepsilon = 0$ on $\partial\Omega_\varepsilon$. Solving this equation requires a fine mesh that is smaller than ε . In homogenization or numerical homogenization, our goal is to solve this problem on a coarse grid. It can be shown

that for periodic or scale separation case, the homogenized equation has a form

$$v_0(x) = \frac{\kappa_{ij}}{\mu} (f_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p_0(x)), \text{div}(v_0) = 0 \text{ in } \Omega.$$

We omit many details of the description and emphasize that the main idea is to write the homogenized equations in the domain without perforations. The permeability tensor κ_{ij} is defined by solving local Stokes problems in each period subject to periodic boundary conditions (see [23] for details). These approaches are limited by the assumption on periodicity and they limit adding more degrees of freedom. In many applications, one needs extra degrees of freedom to represent more complex scale interactions. For this reason, we have generalized and proposed a new approach, Generalized Multiscale Finite Element Method (GMsFEM).

The main idea of GMsFEM is to compute the multiscale basis functions in each region coarse region (see Figure 1 for illustration). The construction of multiscale basis functions is discussed in many previous papers [14,11,8,7,9,16,17,15,13,10,5]. Our approaches are motivated by recent works [22,21,3,4]. For problems in perforated regions, we proposed corresponding algorithms in [12]. Next, we briefly describe the main idea of our approach.

The GMsFEM follows the main concept of Multiscale Finite Element Method (MsFEM) [18,19,20,6,1,2]; however, it systematically constructs multiscale basis functions for each coarse block. In the first step, the GMsFEM uses local snapshot vectors (defined on coarse grids) to represent the solution space. More precisely, we denote by $\phi_{i,\omega_j}^{\text{snap}}$ the snapshot vectors defined in a coarse grid ω_j . The use of snapshot spaces is essential in problems with perforations, because the snapshots contain necessary geometry information. The snapshot vectors are typically constructed by solving local problems with various boundary conditions (including all possible boundary conditions), see [12]. For example, for Stokes system, we construct the snapshot vectors for the velocity field. In the second step of the GMsFEM, we construct multiscale basis functions, $\phi_{i,\omega_j}^{\text{ms}}$, as a subspace of the snapshot space. For this

purpose, in the snapshot space, we perform local spectral decomposition to identify multiscale basis functions. These basis functions are derived based on the analysis. The obtained multiscale basis functions are not conforming. When using in conforming finite element discretization, we multiply these basis functions by a partition of unity functions χ_{ω_j} , which are zero on the boundary of ω_j . More precisely, for each coarse block, we have $\chi_{\omega_j} \phi_{i,\omega_j}^{ms}$. These basis functions are used to solve the global problem in a variation form. More precisely, if we denote multiscale basis functions for all coarse blocks by Φ_i^{ms} , we seek $w_{ms} = \sum_i c_i \Phi_i^{ms}$.

Multiscale basis functions constructed in each coarse region represent the reduced representation of the solution. For example, one multiscale basis function in each region can correspond to the numerical homogenization technique. In general, the number of multiscale basis functions in each coarse region depends on the complexity of the solution space. One needs to employ some type of adaptivity to determine the number of basis functions. We employ adaptivity to define how many basis functions to select in every region for a given error threshold. The adaptivity is done by defining an error indicator function and it is derived from the analysis. The multiscale basis functions are coupled via a global Galerkin formulation.

Our numerical results indicate that with a very few basis functions, one can achieve a small error. Moreover, using adaptive strategies, we can define the necessary number of basis functions in each coarse region.

Acknowledgement. YE's work is partially supported by the U.S. Department of Energy Office of Science, Office of Advanced Scientific Computing Research, Applied Mathematics program under Award Number DE-FG02-13ER26165 and the DoD Army ARO Project and NSF (DMS 0934837 and DMS 0811180). Eric Chung's research is partially supported by Hong Kong RGC General Research Fund (Project: 400813) and CUHK Faculty of Science Research Incentive Fund 2015-16. MV's work is partially supported by Russian Science Foundation Grant RS 15-11-10024 and RFBR 15-31-20856.

References

- [1] G. ALLAIRE AND R. BRIZZI, *A multiscale finite element method for numerical homogenization*, SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation, 4 (2005), pp. 790–812.
- [2] I. BABUŠKA, V. NISTOR, AND N. TARFULEA, *Generalized finite element method for second-order elliptic operators with Dirichlet boundary conditions*, J. Comput. Appl. Math., 218 (2008), pp. 175–183.
- [3] L. CAO, *Multiscale asymptotic expansion and finite element methods for the mixed boundary value problems of second order elliptic equation in perforated domains*, Numerische Mathematik, 103 (2006), pp. 11–45.
- [4] L. CAO, Y. ZHANG, W. ALLEGRETTO, AND Y. LIN, *Multiscale asymptotic method for Maxwell's equations in composite material*, SIAM J. Numer. Anal., 47(6) (2010), pp. 4257–4289.
- [5] H. Y. CHAN, E. T. CHUNG, AND Y. EFENDIEV, *Adaptive mixed GMsFEM for flows in heterogeneous media*, arXiv preprint arXiv:1507.01659, (2015).
- [6] C.-C. CHU, I. G. GRAHAM, AND T.-Y. HOU, *A new multiscale finite element method for high-contrast elliptic interface problems*, Math. Comp., 79 (2010), pp. 1915–1955.
- [7] E. CHUNG, Y. EFENDIEV, AND S. FU, *Generalized multiscale finite element method for elasticity equations*, International Journal on Geomathematics, 5(2) (2014), pp. 225–254.
- [8] E. CHUNG, Y. EFENDIEV, AND C. LEE, *Mixed generalized multiscale finite element methods and applications*, SIAM Multiscale Model. Simul., 13 (2014), pp. 338–366.
- [9] E. CHUNG, Y. EFENDIEV, AND W. T. LEUNG, *Generalized multiscale finite element method for wave propagation in heterogeneous media*, SIAM Multiscale Model. Simul., 12 (2014), pp. 1691–1721.
- [10] E. T. CHUNG, Y. EFENDIEV, AND W. T. LEUNG, *Residual-driven online generalized multiscale finite element methods*, Journal of Computational Physics, 302 (2015), pp. 176–190.
- [11] E. T. CHUNG, Y. EFENDIEV, AND G. LI, *An adaptive GMsFEM for high contrast flow problems*, J. Comput. Phys., 273 (2014), pp. 54–76.
- [12] E. T. CHUNG, Y. EFENDIEV, G. LI, AND M. VASILYEVA, *Generalized multiscale finite element method for problems in perforated heterogeneous domains*, Applicable Analysis, 255 (2015), pp. 1–15.

- [13] Y. EFENDIEV AND J. GALVIS, *Coarse-grid multiscale model reduction techniques for flows in heterogeneous media and applications*, in Numerical Analysis of Multiscale Problems, Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 97–125.
- [14] Y. EFENDIEV, J. GALVIS, AND T. HOU, *Generalized multiscale finite element methods (gmsfem)*, Journal of Computational Physics, 251 (2013), pp. 116–135.
- [15] Y. EFENDIEV, J. GALVIS, R. LAZAROV, M. MOON, AND M. SARKIS, *Generalized multiscale finite element method. symmetric interior penalty coupling*, Journal of Computational Physics, 255 (2013), pp. 1–15.
- [16] Y. EFENDIEV, J. GALVIS, G. LI, AND M. PRESCHO, *Generalized multiscale finite element methods. oversampling strategies*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, 12(6) (2014), pp. 465–484.
- [17] Y. EFENDIEV, J. GALVIS, AND P. S. VASSILEVSKI, *Spectral element agglomerate algebraic multigrid methods for elliptic problems with high-contrast coefficients*, in Domain decomposition methods in science and engineering XIX, Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 407–414.
- [18] Y. EFENDIEV AND T. HOU, *Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications*, vol. 4 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2009.
- [19] T. HOU AND X. WU, *A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media*, J. Comput. Phys., 134 (1997), pp. 169–189.
- [20] O. ILIEV, R. LAZAROV, AND J. WILLEMS, *Variational multiscale finite element method for flows in highly porous media*, Multiscale Model. Simul., 9 (2011), pp. 1350–1372.
- [21] L. LE BRIS, F. LEGOLL, AND A. LOZINSKI, *An MsFEM type approach for perforated domains*, Multiscale Modeling & Simulation, 12(3) (2014), pp. 1046–1077.
- [22] V. MAZ’YA, A. MOVCHAN, AND M. NIEVES, *Green Kernels and Meso-Scale Approximations in Perforated Domains*, Springer-Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 2077, 2013.
- [23] E. SÁNCHEZ-PALENCIA, *Non-homogeneous media and vibration theory*, in Non-homogeneous media and vibration theory, vol. 127, 1980.

**NUMERICAL INVESTIGATION OF SHOCK AND
RAREFACTION WAVES FOR 2D CONSERVATION LAW IN
A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS**

Mahir Rasulov, Bahaddin Sinsoysal

Beykent University, Department of Mathematics and Computing,

34396, İstanbul, Turkey

mresulov@beykent.edu.tr, bsinsoysal@beykent.edu.tr

Hakan Bal

Beykent University, Faculty of Administrative Sciences,

34396, İstanbul, Turkey

hakanbal@beykent.edu.tr

Abstract. In this paper one method for finding the numerical solution of the Cauchy problem for a 2D nonlinear equation describing of conservation laws, sufficiently close to each other $f(u)$ and $g(u)$ of which $f''(u) > 0$ and $g''(u) > 0$ is proposed. Our initial data consist of three piece constants in the (x, y) plane. The adapted grid is constructed taking into account the configuration of initial function, and on the adapted grid a new finite differences scheme for obtained solution is originated. Some computer tests have been carried out.

Keywords: Hyperbolic conservation laws, Finite differences scheme in a class of discontinuous functions, High-order accuracy

1. Introduction. This paper is devoted for obtaining the numerical solution of the Riemann problem of two dimensional scalar conservation law. The questions of existence and uniqueness were studied in important works [6], [7], [17], [21]. But these results give a little information for quality behavior of the exact solution. Similar problem for one dimensional Riemann type problems have been studied in significant papers [3], [5], [9], [12] end to end.

Investigations of quality properties of the exact solution of 2D Riemann problem have been begun from primarily works [4], [19]. In [4], the author gives a new namely “rarefaction” property, which is possessed in the solution of 2D equations of conservation laws. Then the J.Guckenheimer’s theory was developed by W.B. Lindquist in [10], [11]. Consequent research is found in [5], [13], [18], [20] and etc.

Applications finite differences methods to find of the solution of the investigated problem above, is examined [1], [2], [8], [16] and etc.

As it is known that, even one dimensional cases, the solution have points of discontinuous whose locations are known beforehand, even if the initial function is sufficiently smooth. When the number of spatial variables is more than two, amount of points of discontinuities are indefinite. Special research is required in order to select what is discontinuity is admissible from physical point of view. Therefore, presence points of discontinuities in solution does not permit us to approximate differential equation by finite differences, directly, because by approximation derivatives with respect to both spatial variables the break is spread on some points of the grid.

In this study, we intended to develop the numerical method for finding the solution of the problem (1), (2), and exhibit some behaviors of it. For this aim, we will use the auxiliary problem instead of problem (1), (2). By using the advantages of the suggested auxiliary problem, a new numerical algorithm will be proposed.

Now, in $R^2 \times R^+$ space we consider the following problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (2)$$

Here, f and g are given functions satisfying following conditions

- (i) $f(u), g(u) \in C^3(R^1)$,
- (ii) $f''(u) > 0$ and $g''(u) > 0$,
- (iii) $\left(\frac{g''(u)}{f''(u)} \right)' \neq 0$

and $u_0(x, y)$ is piecewise constant function in R^2 with take the values (u_1, u_2, u_3) as

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha, \\ u_2, & \frac{\pi}{2} + \alpha < \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \\ u_3, & \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3)$$

where, u_1 , u_2 and u_3 take the value (1, 2, 3) respectively, and $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ is any angle.

As we noted above, the exact solution of the problem may not exist. We will define the weak solution as follows.

Definition 1. The function $u(x, y, t)$, $u: R^2 \times R^+ \rightarrow R$ satisfying the initial condition (2) is called a weak solution of the problem (1), (2), if the following integral relation

$$\int_{R^2 \times R^+} \left\{ \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} + f(u(x, y, t)) \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + g(u(x, y, t)) \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \right\} dx dy + \int_{R^2} \varphi(x, y, 0) dx dy = 0 \quad (4)$$

is hold for any test function $\varphi(x, y, t) \in C^\infty$ and vanishing for sufficiently large $\sqrt{x^2 + y^2} + t$.

2. Derivation of the Auxiliary Problem. In order to find the weak solution, according to [14], [15], we will introduce an auxiliary problem. To this end, we integrate the equation (1) over $D_{xy} = \{-\infty < \xi < x, -\infty < \eta < y\} \subset R^2$ domain

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^x f(u(x, \eta, t)) d\eta + \int_{-\infty}^x g(u(\xi, y, t)) d\xi \\ & = \int_{-\infty}^y f(u(-\infty, \eta, t)) d\eta + \int_{-\infty}^x g(u(\xi, -\infty, t)) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Let us denote

$$w(x, y, t) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + P(x, y, t). \quad (6)$$

Here

$$P(x, y, t) = \int_{-\infty}^y f(u(-\infty, \eta, t)) d\eta + \int_{-\infty}^x g(u(\xi, -\infty, t)) d\xi .$$

It is easily to shown that

$$Mw(x, y, t) = u(x, y, t) , \quad (7)$$

where M is operator defined as

$$M(\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x \partial y} .$$

According into consideration (6) the equation (5) can be rewritten as

$$\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^y f(M(w(x, \eta, t))) d\eta + \int_{-\infty}^x g(M(w(\xi, y, t))) d\xi \quad (8)$$

Initial condition for (8) is

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) . \quad (9)$$

Here $w_0(x, y)$ is any continuously differentiable solution of the equation

$$Mw_0(x, y) = u_0(x, y) \quad (10)$$

The problem (8), (9) is called an auxiliary problem.

Auxiliary problem has the following advantages:

- The order differentiability of $w(x, y, t)$ is more than the order of differentiability of $u(x, y, t)$.
- In process of finding of $u(x, y, t)$ in algorithm, the derivatives of u with respect to x, y and t does not occur, as these derivatives does not exist.
- On the basis of the problem (8), (9) we can write higher order differences scheme with respect to t (for instance, using Runge-Kutta type methods) .

2.1. Adapted Grid and Numerical Algorithm. In order to find the numerical solution of the problem (8), (9), now we construct the finite differences method. For this aim, we create the following grid over the D_{xy} domain.

Provided that L is any positive sufficiently large number, we create an “adapted” grid over the domain $D_{(-L, L)}$. For this, let us firstly establish the following grid over the segment $[-\ell, \ell]$ of the oy axis

$$\omega_{h_y} = \left\{ y_j \mid y_j = -\ell + jh_y, h_y = \frac{2\ell}{m}, j = 0, 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Afterwards, we adapt the nodal points over the ox axis with the initial function as follows.

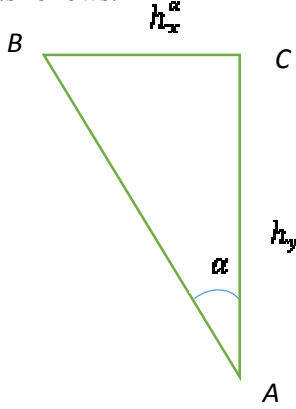


Figure 1.

From the right triangle OAB we get $h_x^{(\alpha)} = h_y \tan \alpha$. Now, we divide $[-\ell, \ell]$ into n subintervals with equal width $h_x^{(\alpha)}$. Thus, we have

$$\begin{aligned} \omega_{h_x^{(\alpha)}} &= \{x_i \mid x_i = -\ell + ih_x^{(\alpha)}, i = 0, 1, 2, \dots, n\} \\ \omega_{h_x^{(\alpha)}h_y} &= \{(x_i, y_i) \mid x_i \in \omega_{h_x^{(\alpha)}}, y_i \in \omega_{h_y}\}. \end{aligned}$$

Now, we divide $[x_i, x_{i+1}]$ and $[y_j, y_{j+1}]$ segments into the numbers p and q equal subsegments, respectively. Scheme of the points mentioned above denoted by

$$\begin{aligned} \Omega_{(h_\xi, h_\eta)}^{(x_i, y_j)} &= \{\xi_v = x_i + v h_\xi, \eta_\mu = y_j + \mu h_\eta; v = 0, 1, 2, \dots, np, \\ &\mu = 0, 1, 2, \dots, mq\}. \end{aligned}$$

It is obvious that, $x_v = \xi_v p$, $y_\mu = \eta_\mu q$, $h_\xi = \frac{h_x^{(\alpha)}}{p}$, $h_\eta = \frac{h_y}{q}$,

$$\bigcup_{i,j} \Omega_{(h_\xi, h_\eta)}^{(x_i, y_j)} = \Omega_{(h_x, h_y)}^{(-\ell, \ell)}.$$

Integrals involved in equation (8) can be written in the quadrature formulas as follows

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{x_i} g(u(\xi, y, t)) d\xi &\approx h_\xi \sum_{v=0}^{p-i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)), \\ \int_{-\ell}^{y_j} f(u(x, \eta, t)) d\eta &\approx h_\eta \sum_{\mu=0}^{q-j} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)), \\ \int_{-\ell}^{x_i} \int_{-\ell}^{y_j} u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta &\equiv h_x^{(\alpha)} h_y \sum_{v=0}^i \sum_{\mu=0}^j U(x_v, y_\mu, t_k). \end{aligned}$$

Substituting these expressions in equation (8), we get the following finite differences system of equations

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} h_x^{(\alpha)} h_y \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j [U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) - U(x_i, y_j, t_k)] \\ &+ \tau h_\eta \sum_{\mu=1}^{q-j} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)) + h_\xi \sum_{v=1}^{p-i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)) \\ &- h_\eta \sum_{\mu=1}^{q-j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) - h_\xi \sum_{v=1}^{p-i} g(U(\xi_v, -\infty, t_k)) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

From the last system of equations, we get

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) &= \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_k) - g_1 \sum_{\mu=1}^{q-j} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)) \\ &- g_2 \sum_{v=1}^{p-i} g(U(\xi_v, y_j, t_k)) + g_1 \sum_{\mu=1}^{q-j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) \\ &+ g_2 \sum_{v=1}^{p-i} g(U(\xi_v, -\infty, t_k)), \end{aligned}$$

here $g_1 = \frac{\tau h_\eta}{h_x^{(\alpha)} h_y}$, $g_2 = \frac{\tau h_\xi}{h_x^{(\alpha)} h_y}$.

Taking into account below equality

$$\sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j a_{v\mu} = a_{ij} + \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} a_{v\mu} + \sum_{v=1}^{i-1} a_{vj} + \sum_{\mu=1}^{j-1} a_{i\mu}$$

the last system of equations can be written in the following form

$$\begin{aligned}
U_{i,j,k+1} = & -\sum_{\nu=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_\nu, y_\mu, t_{k+1}) - \sum_{\nu=1}^{i-1} U(x_\nu, y_j, t_k) \\
& - \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_i, y_\mu, t_k) + \sum_{\nu=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_\nu, y_\mu, t_k) - g_1 \sum_{\mu=1}^{q,j} f(U(x_i, \eta_\mu, t_k)) \\
& - g_2 \sum_{\nu=1}^{p,i} g(U(\xi_\nu, y_j, t_k)) + g_1 \sum_{\mu=1}^{q,j} f(U(-\infty, \eta_\mu, t_k)) \\
& + g_2 \sum_{\nu=1}^{p,i} g(U(\xi_\nu, -\infty, t_k))
\end{aligned} \tag{12}$$

As it is seen, scheme (12) is an explicit scheme. For the stability of the numerical scheme it must be provided that

$$\left| \max f'(u) \frac{\tau}{h_x^{(\alpha)}} + \max g'(u) \frac{\tau}{h_y} \right| < 1.$$

3. Computer Tests. As in [15], noted that if functions f and g sufficiently close to each other, then a well defined function satisfies the entropy condition. Some examples have been carried out on the basis of numerical algorithm.

1. At first, we will consider the case $f(u) = g(u) = \frac{u^2}{2}$ and $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$. In this case algorithm (12) takes the form

$$\begin{aligned}
U_{i,j,k+1} = & -\sum_{\nu=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_\nu, y_\mu, t_{k+1}) - \sum_{\nu=1}^{i-1} U(x_\nu, y_j, t_k) \\
& - \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_i, y_\mu, t_k) + \sum_{\nu=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_\nu, y_\mu, t_k) - \frac{g_1}{2} \sum_{\mu=1}^{q,j} U^2(x_i, \eta_\mu, t_k) \\
& - \frac{g_2}{2} \sum_{\nu=1}^{p,i} U^2(\xi_\nu, y_j, t_k) + \frac{g_1}{2} \sum_{\mu=1}^{q,j} U^2(-\infty, \eta_\mu, t_k) \\
& + \frac{g_2}{2} \sum_{\nu=1}^{p,i} U^2(\xi_\nu, -\infty, t_k), \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned} \tag{13}$$

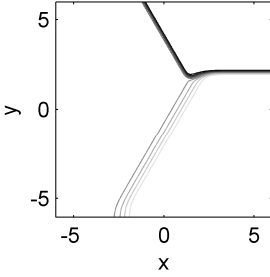
Initial condition for (13) is

$$U(\xi_\nu, \eta_\mu, \theta) = u_l(\xi_\nu, \eta_\mu), \tag{14}$$

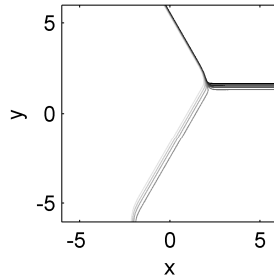
($\nu = 1, 2, \dots, np; \mu = 1, 2, \dots, mq$), here

$$u_1(x,y) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, \\ u_2, & \frac{2\pi}{3} < \theta \leq \frac{4\pi}{3}, \\ u_3, & \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

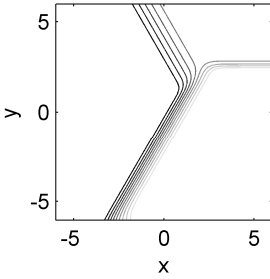
Thus there are six ($3!$) cases to be considered. The graphs of solutions obtained of the problem (13), (14) given in Figure 2.



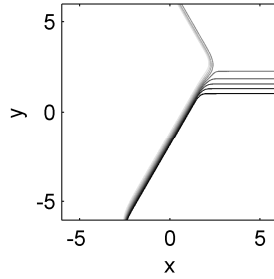
(a)



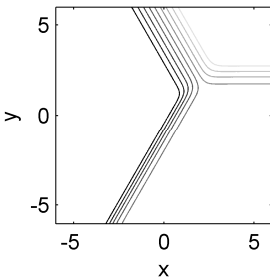
(b)



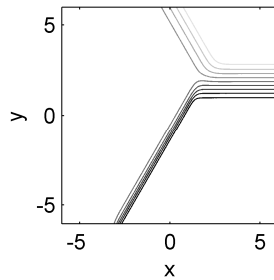
(c)



(d)



(e)



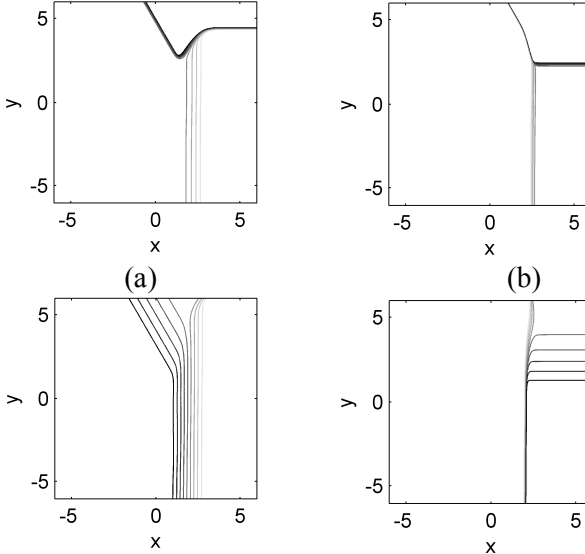
(f)

Figure 2: a) Two shocks one rarefaction with the initial data (1,2,3) at $t=1$; b) Three shocks with the initial data (1,3,2) at $t=1$; c) Two rarefactions one shock with the initial data (2,1,3) at $t=1$; d) Two shocks one rarefaction with the initial data (2,3,1) at $t=1$; e) Three rarefactions with the initial data (3,1,2) at $t=1$; f) One shock and two rarefactions with the initial data (3,1,2) at $t=1$.

2. Secondly, we considered the case $f(u) = \frac{u^2}{2}$ and $g(u) = \frac{u^3}{3}$ and $\alpha = \frac{\pi}{6}$. In this case calculation leads with the following algorithm

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k+1} = & -\sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_v, y_\mu, t_{k+1}) - \sum_{v=1}^{i-1} U(x_v, y_j, t_k) - \sum_{\mu=1}^{j-1} U(x_i, y_\mu, t_k) \\
 & + \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U(x_v, y_\mu, t_k) - \frac{g_1}{2} \sum_{\mu=1}^{q \cdot j} U^2(x_i, \eta_\mu, t_k) - \frac{g_2}{3} \sum_{v=1}^{p \cdot i} U^3(\xi_v, y_j, t_k) \\
 & + \frac{g_1}{2} \sum_{\mu=1}^{q \cdot j} U^2(-\infty, \eta_\mu, t_k) - \frac{g_2}{3} \sum_{v=1}^{p \cdot i} U^3(\xi_v, -\infty, t_k) \quad (15)
 \end{aligned}$$

under initial condition (14). Graphs obtained solutions are shown in Figure 3.



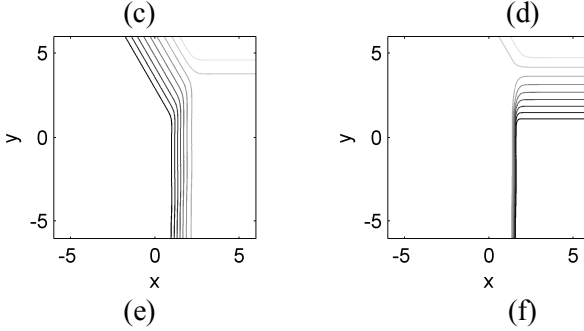


Figure 3: *a) Two shocks one rarefaction with the initial data $(1,2,3)$ at $t=1$; b) Three shocks with the initial data $(1,3,2)$ at $t=1$; c) Three rarefactions with the initial data $(2,1,3)$ at $t=1$; d) Two shocks one rarefaction with the initial data $(2,3,1)$ at $t=1$; e) Three rarefactions with the initial data $(3,1,2)$ at $t=1$; f) One shock and two rarefactions with the initial data $(3,1,2)$ at $t=1$.*

Conclusion. In this study a new method for the numerical solution of the initial value problem for 2D conservation law with three-piecewise constant initial profile that accurately describes the all properties of physical problem is suggested.

For this aim a special auxiliary problem having some advantages the over main problem, which is equivalent to main problem is introduced.

On basis of the introduced auxiliary problem more sensitive difference scheme is extracted, and using the solution of the auxiliary problem taking into consideration formula (7) the solution of the main problem is found.

References

- [1] Daeki Yoon, Woonjae Hwang, Two-Dimensional Riemann Problems for Burger's Equation, Bull. Korean Math. Soc. 45, No. 1, pp. 191-205, 2008.
- [2] Doron Levy, Gabriella Puppo, Giovanni Russo, A third Order WENO Scheme for 2D Conservation Laws, Applied Numerical Mathematics, 33, 415-421, 2000.
- [3] Gelfand, I., M., Some Problems in the Theory of Quasilinear Equations. Usp Math.Nauk, 14, 87-158 (1959), Amer. Math. soc Transl. (2) 29, 295-38, 1963.

- [4] Guckenheimer, J. Shocks and Rarefactions in Two Space Dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 59 No. 3, 281-291, 1975.
- [5] Gui-Qiang Chen, Dening Li, Dechun Tan, Structure of Riemann Problem for 2-Dimensional Scalar Conservation Laws, Journal of Differential Equations, 127, 124-147, 1996.
- [6] Edward Conway, Joel Smoller, Global Solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equationa in Several Space Variables, Comm. On Pure and Applied Mathematics, vol. XIX, 95-105, 1966.
- [7] Kruzkov, S.N., First Order Quasilinear Equation in Several Independent Variables, Math. Sbornik, 81, p. 217-243, 1970.
- [8] Kurganov, A., Tadmor, E., Solution of Two-Dimensional Riemann Problems for Gas Dynamics without Riemann Problem Solvers, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 18, 548-608, 2002.
- [9] Lax, P.D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Conf. Board Math. Sci. Regional Conf. Series in Appl. Math. 11, SIAM, Philadelphia, 1972.
- [10] Lindquist, W.B., The Scalar Riemann Problem in Two Spatial Dimensions: Piecewise Smoothness of Solutions and Its Breakdown, SIAM J. Math. Anal., 17, 1178-1197, 1986.
- [11] Lindquist, W.B., Construction of Solutions for Two-Dimensional Riemann Problems, Comput. Math. Appl. 12A, 615-630, 1986.
- [12] Oleinik, O.A., Discontinuous Solitions of Nonlinear Differential Equations0, Usp.Math. Nauk, 12, 1957.
- [13] Peng Zhang, Generalized Characteristic Analysis and Guckenheimer Structure, Journal of Differential Equations, 152, 409-430, 1999.
- [14] Rasulov, M.A. Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a 2D Domain, Dokl RAN, Vol. 319, No.4, pp. 943-947, 1991.
- [15] Rasulov, M.A., Coskun, E., Sinsoysal, B., Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equations in a Class of Discontinuous Functions, App.Mathematics and Computation, vol.140, Issue 1, August, pp.279-295, 2003, USA.
- [16] Richard Liska, Burton Wendroffi Composite Schemms for Conservation Law, SIAM, J. Num. Anal, 35, 2250-2271, 1998.

- [17] Smoller, J.A. Shock Wave and Reaction Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [18] Tong Zhang and Yuxi Zheng, To Dimensional Riemann Problem for a Single Conservation Law, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 312, No2, 1989.
- [19] Wagner, D.H., The Riemann Problem in Two Space Dimensions for a Single Conservation Law, SIAM J. Math. Anal., 14, 534-559, 1983.
- [20] Wancheng, Sheng, Two - Dimensional Riemann Problem for Scalar Conservation Laws, , Journal of Differential Equations, 183, 239-261, 2002.
- [21] Volpert, A.I. The spaces BV and quasilinear equations. Math. USSR-Sbornik 2, 225-267, 1967.

**DÜZBUCAQLI ORTOTROP LÖVHƏDƏ İSTİLİK
MƏNBƏYİNİN İNTENSİVLİYİNİN TƏYİN
EDİLMƏSİNƏ AİD TƏRS MƏSƏLƏ**

Abbasov Z.D.

Gəncə Dövlət Universiteti

dumanlı.zefer@mail.ru

İşdə ortotrop düzbucaqlı lövhədə istilik mənbəyinin intensivliyinin təyini haqqında tərs məsələyə baxılır [1, 2].

Məsələnin həllində, sərhəd şərtlərinə görə lövhə müstəvisində temperaturun sıfırda saxlanması fərz olunur. İstilik mənbəyinin intensivliyi $Q_0(x)$ və $T(x, y)$ temperatur paylanması D oblastında

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q_0(x) = 0 \quad (1)$$

tənliliyindən təyin edilir. Burada

$x = (x_1, x_2), D: [-a_1 < x_1 < a_1, -a_2 < x_2 < a_2, -b < y < b]$ və sərhəd şərtləri:

$$\begin{aligned} T(-a_1, x_2, y) &= T(a_1, x_2, y) = T(x_1, -a_2, y) = T(x_1, a_2, y) = \\ &= T(x_1, x_2, -b) = T(x_1, x_2, b) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

k_1, k_2, k_3 sabit ədədlər olub, istilikkeçirmə əmsalları adlanır.

Sərhəd şərtindən əlavə

$$f(x, y_0) = f^0(x), \quad y_0 \in [-b, b] \quad (3)$$

şərtini qəbul edək.

Yeni dəyişənlər və sabitlər

$$x_1 = \xi_1 \sqrt{k_1}, x_2 = \xi_2 \sqrt{k_2}, \quad y = \eta \sqrt{k_3}, \quad b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{k_1}}, b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{k_2}}, c = \frac{b}{\sqrt{k_3}}$$

daxil edərək (1) tənliyini və (2), (3) şərtlərini aşağıdakı kimi yazmaq olar. Burada

$$\Delta T + Q(\xi) = 0 \quad (4)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad Q(\xi) = Q_0(\xi_1 \sqrt{k_1}, \xi_2 \sqrt{k_2})$$

$$T(-b_1, \xi_2, \eta) = T(b_1, \xi_2, \eta) = T(\xi_1, -b_2, \eta) = T(\xi_1, b_2, \eta) =$$

$$= T(\xi_1, \xi_2, -c) = T(\xi_1, \xi_2, c) = 0 \quad (5)$$

$$T(\xi, \eta_0) = \psi(\xi), \quad \eta_0 \in (-c, c) \quad (6)$$

Əgər (4), (5) məsələsinin həlli varsa, onda o enerji funksionalına minimum verir [3].

$$L(T) = (-\Delta T, T) - 2(T, Q)$$

$H_{-\Delta}$ -enerji fəzasında tam $\{\Phi_{mnp}\}$ ortonormal sistemi mövcuddur. (4), (5) məsələsinin ümumiləşmiş həlli aşağıdakı kimi olur.

$$T = \sum_{m,n,p=1}^{\infty} (Q, \Phi_{mnp}) \Phi_{mnp} \quad (7)$$

(7) sırası energetik $H_{-\Delta}[1]$ və əvvəlki H fəzasında yığılır.

$T(\xi, \eta)$ funksiyasının sərhəd qiymətləri sıfıra bərabər olduğundan $-\Delta$ operatoru müsbət təyin olunandır. Bu halda $V(\xi, \eta)$ və $R(\xi, \eta)$ funksiyalarının skalyar hasili energetik fəzada

$$[V, R] = - \int_{-c}^c \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} R(\xi, \eta) \Delta V(\xi, \eta) d\xi_1 d\xi_2 d\eta$$

formulası ilə energetik norma isə

$$|V|^2 = - \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{-c}^c V(\xi, \eta) \Delta V(\xi, \eta) d\eta d\xi_1 d\xi_2$$

formulası ilə təyin olunur.

$$f_{mnp}(\xi_1, \xi_2, \eta) = \cos \lambda_m \xi_1 \cos \nu_n \xi_2 \cos \mu_p \eta \quad (8)$$

Həqiqətən

$$\Delta f_{mnp}(\xi_1, \xi_2, \eta) = -\gamma_{mnp}^2 f_{mnp}(\xi_1, \xi_2, \eta)$$

olduqda alırıq:

Nəticədə alırıq:

$$|f_{mnp}| = \gamma_{mnp} \sqrt{b_1 b_2 c}$$

Qeyd etmək lazımdır ki, $\{\cos \lambda_m \xi_1\}, \{\cos \nu_n \xi_2\}, \{\cos \mu_p \eta\}$ sistemlərinin hər biri uyğun olaraq $[-b_1, b_1], [-b_2, b_2], [-c_1, c_1]$ parçalarında Parseval bərabərliklərini ödəyir [2, 4].

(8) sistemini $|f_{mnp}|$ -ə bölsək enerjiyə nəzərən ortonormal sistemi alırıq:

$$\Phi_{mnp}(\xi, \eta) = \frac{f_{mnp}(\xi, \eta)}{\gamma_{mnp} \sqrt{b_1 b_2 c}} \quad (9)$$

$T(\xi, \eta)$ -temperatur funksiyası aşağıdakı formula ilə təyin olunur:

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{b_1 b_2 c} \sum_{m,n,p=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{mnp}^2} (Q(\xi), f_{mnp}(\xi, \eta)) f_{mnp}(\xi, \eta) \quad (10)$$

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{b_1 b_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{\varepsilon_{mn}^2} \left(1 - \frac{ch \varepsilon_{mn} \eta}{ch \varepsilon_{mn} c} \right) f_{mn}(\xi_1, \xi_2) \quad (11)$$

(11) ifadəsini (6)-da yerinə yazsaq alırıq:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{b_1 b_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{\varepsilon_{mn}^2} \left(1 - \frac{ch \varepsilon_{mn} \eta_0}{ch \varepsilon_{mn} c} \right) f_{mn}(\xi_1, \xi_2),$$

$$Q_{mn} = \frac{\psi_{mn} \varepsilon_{mn}^2 ch \varepsilon_{mn} c}{ch \varepsilon_{mn} c - ch \varepsilon_{mn} \eta_0} \quad (12)$$

(12) ifadəsini (11)-də yerinə yazıb lövhədə temperaturu təyin edirik.

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{b_1 b_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{mn} \frac{ch \varepsilon_{mn} c - ch \varepsilon_{mn} \eta}{ch \varepsilon_{mn} c - ch \varepsilon_{mn} \eta_0} f_{mn}(\xi_1, \xi_2) \quad (13)$$

Q_{mn} -lər Furiye əmsalları olduğundan $Q(\xi_1, \xi_2), \{f_{mn}(\xi_1, \xi_2)\}$ ortonormal sisteminə nəzərən aşağıdakı kimi olur.

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\psi_{mn} \varepsilon_{mn}^2 ch \varepsilon_{mn} c}{ch \varepsilon_{mn} c - ch \varepsilon_{mn} \eta_0} \cos \lambda_m \xi_1 \cos \nu_n \xi_2,$$

$$T(x_1, x_2, y) = \frac{1}{a_1 a_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \frac{ch\delta_{mn}b - ch\delta_{mn}y}{ch\delta_{mn}b - ch\delta_{mn}y_0} \tilde{f}_{mn}(x_1, x_2),$$

$$\varphi_{mn} = \int_{-\frac{a_2}{\sqrt{k_2}} - \frac{a_1}{\sqrt{k_1}}}^{\frac{a_2}{\sqrt{k_2}} - \frac{a_1}{\sqrt{k_1}}} \int_{-\frac{a_2}{\sqrt{k_2}} - \frac{a_1}{\sqrt{k_1}}}^{\frac{a_2}{\sqrt{k_2}} - \frac{a_1}{\sqrt{k_1}}} \phi(x_1, x_2) f_{mn}^0(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$$\psi_{mn} = \frac{\varphi_{mn}}{\sqrt{k_1 k_2}}, \quad \delta_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3}} \sqrt{\left(\frac{2m-1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{a_2}\right)^2}$$

Deməli istilik mənbəyinin intensivliyi aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$Q_0(x_1, x_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn}^0 f_{mn}^0\left(\frac{x_1}{\sqrt{k_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{k_2}}\right), \quad Q_{mn}^0 = \frac{\psi \delta_{mn}^2 ch\delta_{mn}c}{ch\delta_{mn}b - ch\delta_{mn}\eta}$$

$$\psi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \int_{-\frac{a_1}{\sqrt{k_1}} - \frac{a_2}{\sqrt{k_2}}}^{\frac{a_1}{\sqrt{k_1}} - \frac{a_2}{\sqrt{k_2}}} \int_{-\frac{a_1}{\sqrt{k_1}} - \frac{a_2}{\sqrt{k_2}}}^{\frac{a_1}{\sqrt{k_1}} - \frac{a_2}{\sqrt{k_2}}} f^0(x_1, x_2) f_{mn}\left(\frac{x_1}{\sqrt{k_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{k_2}}\right) dx_1 dx_2$$

Ədəbiyyat

1. Аббасов З.Д. «Влияние пондермоторной силы на температурные поля и напряжение в слое» ж. Научных публикации Аспирантов и докторантов №5 (59) 2011 г. Москва. ISSN 1991-3087. ст. 45-49
2. Аббасов З.Д. «Обратная задача теплопроводности определения интенсивности источника тепла в ортотропной прямоугольной плите» «Естественные и технические науки» №1 (57), Москва, 2012г. ИССН 1684-2626 ст.22-27
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. «Уравнение в частных производных математической физики» М., 1970, ст.710.
4. Зигмунд А. «Тригонометрические ряды» т.2, М., «Мир» 1965
5. З.Д.Аббасов «Йикигат люшвядя йердяишмялярин тыйиняня аид рабитяли мясяля» «Рийазийят вя механиканын актуал проблемляри» Баку -2014. Бейнялхалг конфранс. 15-16 май 2014. Сящ.68-70.

DİNAMİK STRUKTURLAR VƏ ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ SİNİFLƏR

Ağamalıyev R.X., Süleymanov N.S.,

Mehdiyev H.B., Hacıyev R.N.

Bakı Dövlət Universiteti

Dinamik strukturlar dedikdə fiziki təsvir zamanı yaddaşın dinamik ayrılmasına əsaslanan strukturları deyil, zaman keçdikcə müəyyən dəyişikliklərə məruz qalan daha doğrusu, elementlərinin sayı artan və ya azalan məntiqi strukturları başa düşəcəyik. Belə strukturlar özləri yaddaşdan istifadə qaydasına, yaddaşın ayrılması üsuluna görə statik və ya dinamik də ola bilər.

Dinamik strukturlarla işləmək üçün nəzərdə tutulan alqoritmlərdə müxtəlif əməliyyatlar həyata keçirilə bilər və bir çox alqoritmlərdə strukturun vəziyyətinin yoxlanılması, elementin struktura daxil edilməsi və strukturdan oxunması əməliyyatları ilə kifayətlənmək mümkündür. Göstərilən əməliyyatların yerinə yetirilməsi xüsusiyyəti əsasən dinamik strukturun fiziki təsvirindən asılı olur.

Ümumi halda dinamik strukturlarla olan əməliyyatların bir qisminə sorğu, yoxlama xarakteri vermək mümkündür. Başqa qrup əməliyyatlar isə modifikasiya xüsusiyyətlidir, yəni strukturun məzmununda müəyyən dəyişikliklər edə bilər. Bu əməliyyatlardan **İnsert (S, a)** kimi işarə etdiyimiz əməliyyat dinamik struktura yeni **a** elementinin əlavə edilməsi üçündür və hökmən əməliyyatdan əvvəl elementin daxil edilmə imkanı yoxlanılmalıdır. **Delete (S,a)** əməliyyatı da modifikasiya xüsusiyyətli olaraq strukturdan **a** elementini çıxarır və bu əməliyyatdan da əvvəl strukturun vəziyyəti yoxlanılmalıdır.

Baxılan dinamik struktur sistem proqram təminatının, xüsusən kompilyatorların layihələndirilməsində və yaradılmasında bəlkə də əvəzi olmayan stekdir **(LIFO)**. **İnsert** əməliyyatı stekə elementi yazan **Push** əməliyyatı ilə, **Delete** əməliyyatı isə stekdən elementi çıxaran **Pop** əməliyyatı ilə əvəz edilmişdir. Hər iki əməliyyatın yerinə yetirilməsində stekin təpəsini təyin edən **tepe** adlı dəyişəndən istifadə edilmişdir və bu dəyişənin qiyməti ilə stekin vəziyyəti yoxlanılaraq onun boş və ya dolu olduğu müəyyənləşdirilir.

Ümumiləşdirilmiş siniflər yalnız obyektin yaradılması zamanı onun tipinin göstərilməsini tələb edir və beləliklə bir proqramda stekin fiziki təsviri kimi istifadə etdiyimiz müxtəlif tipli (**int**, **char**, **double** və s.) massivlər üçün stek mexanizminin həyata keçirilməsi imkanı təmin edilir. Hazırladığımız proqramda ümumiləşdirilmiş sinif aşağıdakı kimi təyin edilmişdir:

```
#define N 100
template < typename X>
class stek
{ X LIFO [N];
  int tepe;
public:
  Stek ()
  {tepe=0;} // konstruktor
  void Push(X element);
  X Pop();};
```

Ədəbiyyat

1. Т.Кормен, Ч.Лейзерсон, Р.Ривест, К.Штайн. Алгоритмы. М.: Построение и анализ. – 2013.
2. Уилсон М. С++. Практический подход к решению проблем программирования, М.: 2006.

“HƏNDƏSƏ MƏZMUN XƏTTİ” HAQQINDA

Ağazadə Ş.M.

Bakı Dövlət Universiteti

Giriş: Hazırda lazım olan və gələcəkdə tədrisi daha da yaxşı hazırlaya bilmək üçün şagirdləri; necə öyrənəcəkləri, necə düşünəcəkləri və bunlar üçün lazım olan texnologiyadan necə istifadə etməyi şüurlu şəkildə yetişdirmək vacibdir [1]. Tədrisin gerçəkləşməsi sırasında işlədilən texnologiya və materiallar müəllimin xeyrinə hesab olunarkən, hər gün dəyişən texnologiyadan xəbərdar olmaq, onları doğru və düzgün yerlərdə işlətmək də bir bacarıqdır. Bu bacarığa tədris edənlər sahib olmalı və istifadə etməlidirlər.

Sınıfdə aktiv öyrənmənin gerçəkləşməsi; şagird – müəllim, müəllim – şagird, şagird – vəsait, şagird – ətraf əlaqələrinin ən azı birinin yüksək olmasıyla tədrisin uğurları hesab olunur [2]. Bu

əksəlaqənin yüksək olması üçün tədris texnologiyalarından və tədris materiallarından yararlanıla bilər. Daha yaxşı öyrənmə şagirdin özünün hazırladığı materialları sıralamaqla qurulan dərs proqramı ümumi yox, fərdi yanaşma adlanır.

Tədris: Tədris müddətindən keçən şagirdə müəyyən dəyişikliklər olmalıdır. Tədris yoluyla insanın məqsədləri, məlumatları, davranışları, əxlaq ölçüləri dəyişdiyi görülməlidir. Tədrisin ümumi və əhatəli tərəflərindən əsasları bunlardır:

- Ümumi mənada davranış dəyişdirmə vaxtıdır.
- Geniş mənada sosiallaşmasını qazanmağın vaxtıdır.
- Cəmiyyət arasında mənalı davranışı tənzimləmək.
- Bacarıqda yerli istifadəsini şüurlu dərk etmək.

Öyrətmə texnologiyası: Çox vaxt təhsil və tədris texnologiyaları bir – birinə bağlı şəkildə biri digərinin yerində işlədilir. Təhsil necə? – idisə, tədris niyə? – kimi sual meydana çıxır. Məsələn: niyə Riyaziyyat, niyə həndəsə məzmun xətti?

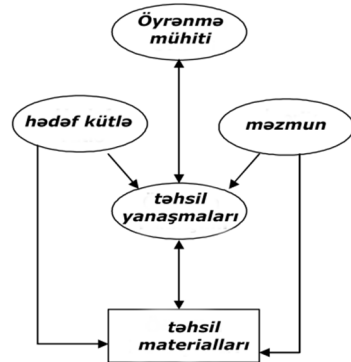
Hazırda tədrisin və təhsilin payları bərabər tutulmalıdır. Texnologiya araşdırmalara görə tədris təhsilin hal – hazırda üçdə iki hissəsini təşkil edir [3]. Heç vaxt bu tam olmayacaq, çünki tam texnologiyalı dərs tətbiqdən başqa birşey deyil. Texnologiyanın əsas hissəsini praktika təşkil edir. Nəzəri hissə olmadan, praktika mənasızdır.

Materialları genişləndirmə: Tədris zamanı müəllim tərəfindən müxtəlif cəhətlərdə təqdim olunanlar – materiallardır. Bunlar: ümumi materiallar, şəkillər, maketlər kimi ilk baxışda başa düşülən formada klassik, proqram təminatıyla isə müasir işlədilə bilər.

Aşağıdakı şəkildə tədris materiallarının yeniləmə həcmi çərçivəsi verilmişdir.

Şəkildən görüldüyü kimi ikitərəfli oxlar qarşılıqlı əks əlaqəni vurğulayır.

Şagirdin davranışına zidd olma materialları seçilməsi, işlədilməsi lazımdır. Əgər bu alınmırsa, daha da uyğun variant var. Köhnə materialları yeniləmək [3].

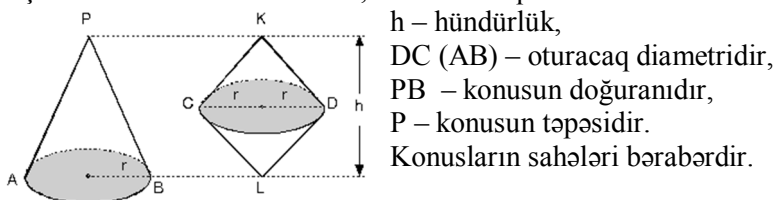


Sinifdə texnologiyadan istifadə aşağıdakı kimi olmalıdır:

- Modellər,
- Kitablar, braşuralar,
- Qrafiklər (cədvəllər və s.),
- Çəşidli yazı taxtaları (elektronik və s.),
- Proektorlar,
- Slaydlar, filmə bənzər texnologiyalardan,
- Səs kasetləri (CD – lər və s.),
- Komputer.

Hər bir materialın özünəməxsus xüsusiyyəti və işlədilmə tarixçəsi var. Kimi materiallar görülməli, eşidilməli kimi iki çeşidə ayırmaq olar. Tədris olunan fərqliliyi ilə 3D (üçölçülü) isə, digərlərindən ayrılmalıdır. Bu halda hansının işlədilməsi müəllimin professionallığından irəli gəlir. Proseduru başlatmaqda problemli sahə iqtisadi və zaman hissəsidir. Məsələn: proektorla belə bir özəllik təqdim etmək olar. Obyekt: konus.

Eyni hündürlüklü konusun hündürlüklə 90 dərəcəli bucaq təşkil etməklə hərəkət etdirsək, həcm sabit qalar.



Bu verilən məlumatlar ön məlumatlardır. Digər verilənlər isə slaydda yer alsada, şagirdin özünə də tapşırmaqla öyrətmə mexanizmindən istifadə etmək olar.

Ədəbiyyat

1. Weis, Allan H. Professional Development: A Link to Better Learning. School, Technology and Readiness Report. (1999), The CEO Forum, Washington. 36 p.
2. Anderson, T. Getting the Mix Right Again: An Updated and Therotical Rationale for Interaction. The International Review of Research in Open and Distance Learning. (2003), Athabasca University. Canada.
3. Newby, T. J. Instructional technology for Teaching and Learning. (1996). Prentice-hall, Inc. New Jersey.

**THE NEW METHOD OF THE FINE SPECTRUM
OF A CLASS OF OPERATOR-MATRIXS
IN SOME SEQUENCES SPACES**

Akhmedov A.M., Akhundov A.Z.

Baku State University

akhmedovali@rambler.ru

In this paper, we give the new method for the investigation of fine spectrum of a class generalized difference-operator matrixs acting in some sequences spaces. According to it we probe the convergence of the iterative process for an infinite family of bounded linear operators on a Banach space. We apply the main result presented in this paper for certain problem in summability theory.

Keywords: Iterative process; Convergence; Bounded linear operator; Banach space.

1. Throughout this paper, we assume that X is a real or complex Banach space.

We consider the following iterative process for an infinite family of bounded linear operators:

$$z_0 \in X, \quad z_{n+1} = T_n z_n + y_n, \quad n \in N, \quad (1)$$

where $T_n : X \rightarrow X$ is a bounded linear operator on X , for each $n \in N$, and (y_n) is a sequence in X .

The purpose of this paper is to study the boundedness and the convergence of the sequence (z_n) which is generated by the iterative process (1) for an infinite family of bounded linear operators on an arbitrary real or complex Banach space.

The main result of this work is

Theorem 1. *Let X be a real or complex Banach space and $T_n \in B(X)$, for each $n \in N$, and (y_n) is any sequence in X . Also, (z_n) be a sequence generated by (1). If $T_n \rightarrow T$ uniformly on X and T is a strictly contractive operator, then we have the following:*

(1) The sequence (z_n) is bounded if and only if (y_n) is bounded.

- (2) If (y_n) is convergent and $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, then the sequence (z_n) converges to unique fixed point $x \in F(W)$, where W is given by

$$Wz = Tz + y, \quad z \in X \text{ and } x \text{ has the form } x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y.$$

This theorem proofs by the next

Lemma 1. Let $T \in B(X)$ be a strictly contractive operator on a Banach space X , and $y \in X$. Then the sequence (x_n) which is generated by $x_{n+1} = Tx_n + y$, converges to the limit $x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$ and the limit x is the unique fixed point of the operator W which is given by $Wz = Tz + y$, $z \in X$.

2. Application. Now, let (a_k) be either constant or strictly decreasing sequence of positive real numbers such that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = a > 0$ and $\sup_k (a_k) \leq 2a$.

In [1] (see also [2], [3]), the authors introduced new generalized difference operator

$$\Delta_a = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ -a_0 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

and investigated the spectrum of the operator Δ_a over the sequence space c_0 .

Theorem 2. Suppose that $|\lambda - a| > a$. Then, the following assertions are true

- (1) The sequence (S_n) is bounded if and only if the sequence

$$\left(\frac{1}{|a_n - \lambda|} \right) \text{ is bounded.}$$

- (2) The sequence (S_n) is convergent if the sequence $\left(\frac{1}{|a_n - \lambda|} \right)$ is convergent.

$$(3) \text{ If } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s, \text{ then } s = \frac{1}{|\lambda - a| - a}$$

References

1. Srivastava P.D., Kumar S. On the fine spectrum of the generalized difference operator Δ_ν over the sequence space c_0 // Commun. Math. Anal., 2009, 6, no.1, p. 8-21.
2. Akhmedov A.M., El-Shabrawy S.R. On the spectrum of the generalized difference operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c_0 // Baku Univ. News J., Phys. Math. Sci. Ser., 2010, no. 4, p. 12-21.
3. Akhmedov A.M., El-Shabrawy S.R. On the fine spectrum of the operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c // Comput. Math. Appl., 2011, 61, p. 2994-3002.

THE NECESSARY CONDITIONS OF OPTIMALITY OF THE ONE PROBLEM DESCRIBING BY THE EQUATION OF THIRD ORDER

Aliev F.A., Yagubova M.M.

We obtain necessary conditions for optimality in the problem of determining the minimum of the functional

$$I(u) = \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(x, t, z, z_x, z_t, u) dx dt$$

defined on the solutions of the equation of the third order

$$\begin{aligned} & \beta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} F_i(x, t, z_x) - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t, z_x) = f_1(x, t, z, z_x, z_t, u) \end{aligned}$$

satisfying the initial conditions

$$z(x, 0) = \varphi_1(x), \quad z_t(x, 0) = \varphi_2(x)$$

and the boundary condition

$$z|_s = 0,$$

where $\Omega \subset R^n (n > 1)$ is domain with sufficiently smooth boundary

of $S = \Gamma \times (0, T)$, Γ - is the border of Ω , $z_x = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right)$,

$u = (u_1, \dots, u_2)$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$

are given functions. As the admissible controls are taken the measurable on $\Omega \times (0, T)$ the limited functions with values from

$U \subset R^n$.

By imposing on the functions $\Phi(x, t, z, p, a)$, $f_1(x, t, z, p, q, u)$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ some conditions of smoothness the formula for the increment of the functional $I(u)$ in the form of

$$\Delta I = - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta_u H(x, t, z, z_x, z_t, \varphi, u) dx dt + \\ + 0 \left(|\Delta z| + |\Delta z_x| + |\Delta z_t| \right),$$

is obtained. Here

$$H(x, t, z, z_x, \psi, u) = -\Phi(x, t, z, z_x, z_t, u) + \\ + \psi f_1(x, t, z, z_x, z_t, u)$$

and $\psi(x, t)$ is the solution of the problem

$$\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial z_{x_i}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial z_t} \right) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\psi \frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}} \right) = 0 \\ (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ -\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi + \frac{\partial H}{\partial z_t} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}} \right) = 0 \quad x \in \Omega, t = T, \\ \psi(x, t) = 0, \quad x \in \Omega \cup \Gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad x \in \Gamma, \quad t = T.$$

Next on the basis of the obtained increment formula necessary

condition for optimality in the form of the Pontryagin maximum principle, is proved.

Note that using the scheme of derivation of the formula for the increment of the functional, can be obtained also the formula for its gradient.

References

1. F.P. Vasilev Methods for solving of extremal problems. M.Nauka, 1981, 400 p.
2. Larkin N.A., Novikov V.A., Yanenko N.N. Nonlinear equations of variable type. Novosibirsk. 1983, 269 p.

NUMERICAL SOLUTION OF A NON-LOCAL PROBLEM

Aliyev A.Y.

Baku State University

aydin_aliyev66@mail.ru

The following non-local mixed problem is considered. It is required to find a solution of the equation

$$\Delta u = 0 \quad \text{on } \Pi \quad (1)$$

satisfying the boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{on } \Gamma_3, \Gamma_4, \quad (2)$$

$$u = \varphi(y) \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (3)$$

$$u(0, y) = \alpha u(c, y), (\alpha < 1) \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (4)$$

where it is assumed that $\varphi(y)$ is thrice continuously differentiable and

$$\varphi'(0) = \varphi'(b) = 0.$$

Here $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < b\}$, and Γ_i ($i = \overline{1, 4}$) are the sides of the rectangular Π numbered counterclockwise starting with lower-side except for the ends. Introduce the following notation:

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \overline{\Pi} = \Pi \cup \Gamma.$$

Introduce quadratic net by straight lines

$$x = x_i = ih, \quad y = y_j = jh \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Denote

$$\Pi_h = \{(x, y) : x = x_i = ih, y = y_j = jh, i = \overline{0, n}\}$$

$\Gamma_{ih} \ (i = \overline{1, 4})$ is a set of net nodes lying on Γ_i and $\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_{ih}$ respectively,

as well as $\overline{\Pi}_h = \Pi_h \cup \Gamma_h$.

Let's construct the difference scheme of corresponding problem (1)-(4) in the following form

$$\Delta_h u_h = 0 \quad \text{on } \Pi_h, \quad (5)$$

$$-\frac{2}{h}u_{\bar{x}} + u_{\bar{y}y} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{3h}, \quad \frac{2}{h}u_{\bar{x}} + u_{\bar{y}y} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{4h}, \quad (6)$$

$$-\frac{2}{h}u_{\bar{x}} + u_{\bar{y}y} = \varphi_h(y) \quad \text{on } \Gamma_{2h}, \quad (7)$$

$$u_h(0, y) = \alpha u_h(c, y), \quad (\alpha < 1) \quad \text{on } \Gamma_{1h}, \quad (8)$$

Here it is assumed that the point c coincides with one of nodes.

We prove that the solutions of problem (1)-(4) and (5)-(8) are defined by the following formulae respectively

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2(1-\alpha)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x, n\pi) \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (9)$$

$$u_h(x, y) = \frac{b_0}{2(1-\alpha)} + \sum_{n=1}^{1/h} b_n g(x, \beta_n / h) \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (10)$$

$$a_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(t) \cos \frac{n\pi t}{b} dt, \quad a_0 = \int_0^b \varphi(t) dt,$$

$$b_n = \frac{2h}{b} \sum_{k=1}^{1/h} \varphi_h(kh) \cos \frac{n\pi kh}{b}, \quad b_0 = \frac{h}{b} \sum_{k=1}^{1/h} \varphi_h(kh),$$

$$g(x, z) = \frac{sh \frac{z}{b} x - \alpha sh \frac{z}{b} (x - c)}{ch \frac{z}{b} - \alpha ch \frac{z}{b} (1 - c)}, \quad (11)$$

$$sh \frac{\beta_n}{2b} = \sin \frac{nh\pi}{2b}.$$

This function satisfies equation (1) and boundary conditions

(2), it remains to select the constants A_n and B_n such that to satisfy boundary conditions (3) and (4).

According to these solutions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} [A_n sh \frac{n\pi}{b} + B_n ch \frac{n\pi}{b}] \cos \frac{n\pi y}{b} + A_0 = \varphi(y),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi y}{b} + B_0 = \alpha \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [A_n ch \frac{n\pi c}{b} + B_n sh \frac{n\pi c}{b}] \cos \frac{n\pi y}{b} + A_0 c + B_0 \right\}$$

On the other hand subject to

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{b} + \frac{a_0}{2},$$

where

$$a_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(t) \cos \frac{n\pi t}{b} dt, \quad a_0 = \int_0^b \varphi(t) dt.$$

Hence comparing the coefficients of series we obtain

$$A_n = \frac{b}{n\pi} \frac{\alpha sh \frac{n\pi c}{b}}{\alpha sh \frac{n\pi}{b} sh \frac{n\pi c}{b} + ch \frac{n\pi}{b} - \alpha ch \frac{n\pi c}{b} ch \frac{n\pi}{b}} a_n$$

$$B_n = \frac{1 - \alpha ch \frac{n\pi c}{b}}{\alpha sh \frac{n\pi}{b} sh \frac{n\pi c}{b} + ch \frac{n\pi}{b} - \alpha ch \frac{n\pi c}{b} ch \frac{n\pi}{b}} \frac{b}{n\pi} a_n.$$

This

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\alpha \left(sh \frac{n\pi c}{b} ch \frac{n\pi x}{b} - ch \frac{n\pi c}{b} sh \frac{n\pi x}{b} \right) + sh \frac{n\pi x}{b}}{\alpha \left(sh \frac{n\pi}{b} sh \frac{n\pi c}{b} - ch \frac{n\pi c}{b} ch \frac{n\pi}{b} \right) + ch \frac{n\pi}{b}} \frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{\alpha c}{2(1-\alpha)} a_0$$

$$u(x, y) = \frac{\alpha c}{2(1-\alpha)} a_0 + \sum_{n=1}^{1/h} a_n \frac{b}{n\pi} \frac{sh \frac{n\pi x}{b} + \alpha sh \frac{n\pi}{b} (x-c)}{ch \frac{n\pi}{b} - \alpha ch \frac{n\pi}{b} (1-c)} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

The validity of the formula (9) is proved.

Now we prove that $u_h(x, y)$ defined by (10) is the solution of the problem (5)-(8).

$$\begin{aligned} h^2 \Delta_h u_h &= u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) + u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h) - \\ &- 4u_h(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{1/h} b_n g\left(x, \frac{\beta_n}{h}\right) \left(\cos \frac{nh\pi}{b} - 2 \right) \cos \frac{n\pi y}{b} + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{1/h} b_n \frac{\left[sh \frac{\beta_n/h}{b} x + \alpha (sh(c-x) \frac{\beta_n/h}{b}) \right] ch \frac{\beta_n}{h}}{ch \frac{\beta_n/h}{b} - \alpha ch \frac{\beta_n/h}{b} (1-c)} \cos \frac{n\pi y}{b} = 0 \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} ch \frac{\beta_n}{b} + \cos \frac{nh\pi}{b} - 2 &= 0, \\ sh \frac{\beta_n}{2b} &= \sin \frac{nh\pi}{2b}. \end{aligned}$$

We'll get the solution of difference scheme (5)-(8) $u_h(x, y)$ as a approximate solution of problem (1)-(4).

We estimate error of method. From (9) and (10) we have

$$|u - u_h| \leq R_1 + R_2,$$

where

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{n=1}^{1/h} |b_n| \left| g(x, n\pi) - g\left(x, \frac{\beta_n}{h}\right) \right|, \\ R_2 &= \sum_{n=1+1/h}^{\infty} |a_n| |g(x, n\pi)|. \end{aligned}$$

Consequently, in order to estimate R_i ($i=1,2$) it is necessary to estimate $|g(x, z)|$ and $\left| g(x, n\pi) - g\left(x, \frac{\beta_n}{h}\right) \right|$.

It is easy to note that

$$0 \leq g(x, z) \leq 1.$$

We estimate $\left|g(x, n\pi) - g\left(x, \frac{\beta_n}{h}\right)\right|$. We have

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z} = & \frac{1}{2} \left[ch \frac{z}{b} - \alpha ch \frac{z}{b} (1-c) \right]^{-2} \left\{ \left(\frac{1}{b} + x \right) sh(1-x) \frac{z}{b} - \left(\frac{1}{b} - x \right) ch(1+x) \frac{z}{b} - \right. \\ & - \alpha \left[(1-c+x) sh(1-c-x) \frac{z}{b} - (1-c-x) sh(1-c-x) \frac{z}{b} \right] + \\ & + (1-c+x) sh(1+c-x) \frac{z}{b} - (1+c-x) sh(1-c+x) \frac{z}{b} - \\ & \left. - \alpha \left[(1+x-2c) sh(1-x) \frac{z}{b} - (1-x) sh(1+x-2c) \frac{z}{b} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Considering

$$\left(\frac{1}{b} + x \right) sh(1-x) \frac{z}{b} \leq \left(\frac{1}{b} - x \right) sh(1+x) \frac{z}{b},$$

$$(1-c+x) sh(1-(c-x)) \frac{z}{b} \leq (1-c-x) sh(1-c+x) \frac{z}{b}$$

and in $x \geq c$

$$(1-c+x) sh(1-(x-c)) \frac{z}{b} \leq (1+c-x) sh(1+x-c) \frac{z}{b},$$

$$(1+x-2c) sh(1-x) \frac{z}{b} \leq (1-x) sh(1-x+2(x-c)) \frac{z}{b},$$

in $x \leq c$

$$(1-c+x) sh(1+c-x) \frac{z}{b} \geq (1+c-x) sh(1-(c-x)) \frac{z}{b},$$

$$(1+x-2c) sh(1-x) \frac{z}{b} \geq (1-x) sh(1-x-2(c-x)) \frac{z}{b}.$$

We obtain

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g(x, z)}{\partial z} \right| \leq & \frac{1}{2} \left[ch \frac{z}{b} - \alpha ch \frac{z}{b} (1-c) \right]^{-2} \left\{ (1-x) sh(1+x) \frac{z}{b} + \right. \\ & \alpha (1-c-x) sh(1-c+x) \frac{z}{b} + (1-|x-c|) sh(1+|x-c|) \frac{z}{b} \\ & \left. + \alpha (1-c-|x-c|) sh(1-c+|x-c|) \frac{z}{b} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

We'll use below the following obvious inequalities

$$shkt \leq \exp((k-1)t)sh t \quad (0 \leq k \leq 1)$$

$$sh t \geq \frac{1}{2}(1 - \exp(-2t_1))\exp(t), \quad (t \geq t_1 > 0).$$

Hence

$$sh(1+x)\frac{z}{b} = sh\frac{1+x}{2}2\frac{z}{b} \leq \exp\left(- (1-x)\frac{z}{b}\right)sh2\frac{z}{b},$$

$$sh(1-c+x)\frac{z}{b} = sh\frac{1-c+x}{2}2\frac{z}{b} \leq \exp\left(- (1+c-x)\frac{z}{b}\right)sh2\frac{z}{b},$$

$$sh(1+|x-c|)\frac{z}{b} = sh\frac{1+|x-c|}{2}2\frac{z}{b} \leq \exp\left(- (1-|x-c|)\frac{z}{b}\right)sh2\frac{z}{b},$$

$$sh(1-c+|x-c|)\frac{z}{b} = sh\frac{1-c+|x-c|}{2}2\frac{z}{b} \leq$$

$$\leq \exp\left(- (1+c-|x-c|)\frac{z}{b}\right)sh2\frac{z}{b},$$

$$\left(ch\frac{z}{b} - \alpha ch(1-c)\frac{z}{b}\right)^{-2} \leq 4\left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4}{3c}\right)\right)^{-2} \exp\left(-2\frac{z}{b}\right).$$

Considering these inequalities in (12) we obtain

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| &\leq 2\left[1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4}{3c}\right)\right]^{-2} \exp\left(-2\frac{z}{b}\right) \times \\ &\times sh2\frac{z}{b} \left\{ (1-x)\exp\left(- (1-x)\frac{z}{b}\right) + \alpha(1-c-x)\exp\left(- (1+c-x)\frac{z}{b}\right) + \right. \\ &\left. + (1-|x-c|)\exp\left(- (1-|x-c|)\frac{z}{b}\right) + \alpha(1-c-|x-c|)\exp\left(- (1+c-|x-c|)\frac{z}{b}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Considering

$$\exp\left(-2\frac{z}{b}\right)sh2\frac{z}{b} \leq \frac{1}{2},$$

we obtain

$$\left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| \leq \left[1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4}{3c}\right) \right]^{-2} \left\{ (1-x) \exp\left(- (1-x) \frac{z}{b}\right) + \right. \\ \left. + \alpha(1+c-x) \exp\left(- (1+c-x) \frac{z}{b}\right) + (1-|x-c|) \exp\left(- (1-|x-c|) \frac{z}{b}\right) + \right. \\ \left. + \alpha(1+c-|x-c|) \exp\left(- (1+c-|x-c|) \frac{z}{b}\right) \right\}.$$

This at $\frac{4}{3}n \leq \frac{\beta_n}{h} \leq z < n\pi, 0 \leq x \leq 1, 1 \leq n \leq \frac{1}{h}$ we obtain

$$\left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| \leq \left[1 - \exp\left(-\frac{8}{3b} - \alpha \exp \frac{4}{3c}\right) \right]^{-2} \left\{ (1-x) \exp\left(- (1-x) \frac{4}{3}n\right) + \right. \\ \left. + \alpha(1-x+c) \exp\left(- (1+c-x) \frac{4}{3}n\right) (1-|x-c|) \exp\left(- (1-|x-c|) \frac{4}{3}n\right) + \right. \\ \left. + \alpha(1+c-|x-c|) \exp\left(- (1+c-|x-c|) \frac{4}{3}n\right) \right\}.$$

Then

$$\left| g\left(x, \frac{\beta_n}{h}\right) - g(x, n\pi) \right| \leq \left[1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4}{3c}\right) \right]^{-2} \times \\ \times \left\{ (1-x) \exp\left(- (1-x) \frac{4}{3}n\right) + \alpha(1+c-x) \exp\left(- (1+c-x) \frac{4}{3}n\right) + \right. \\ \left. + (1-|x-c|) \exp\left(- (1-|x-c|) \frac{4}{3}n\right) + \right. \\ \left. + \alpha(1+c-|x-c|) \exp\left(- (1+c-|x-c|) \frac{4}{3}n\right) \right\} \frac{(n\pi)^3}{6} h^2.$$

Estimate R_1 :

$$R_1 = \sum_{n=1}^{1/h} |b_n| \left| g\left(x, \frac{\beta_n}{h}\right) - g(x, n\pi) \right| \leq L \frac{1}{6} \pi^3 h^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4}{3c}\right) \right)^{-2} \times \\ \times \left\{ (1-x) \sum_{n=1}^{1/h} \exp\left(- (1-x) \frac{4}{3}n\right) + \alpha(1+x-c) \times \sum_{n=1}^{1/h} \left(\exp\left(- (1+c-x) \frac{4}{3}n\right) \right)^n + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - |x - c|) \sum_{n=1}^{1/h} \left(\exp \left(- (1 - |x - c|) \frac{4}{3} \right) \right)^n + \\
& + \alpha (1 + c - |x - c|) \sum_{n=1}^{1/h} \left(\exp \left(- (1 + c - |x - c|) \frac{4}{3} \right) \right)^n \Bigg\} \leq \\
& \leq L \frac{(1 + \alpha)}{4} \pi^3 h^2 \left(1 - \exp \left(- \frac{8}{3b} \right) - \alpha \exp \left(- \frac{4}{3c} \right) \right)^{-2},
\end{aligned}$$

where

$$L = \frac{4}{\pi^4} \max |\phi'''(x)|.$$

Thus

$$|u - u_h| \leq L \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1 + \alpha}{4} \pi^3 \left(1 - \exp \left(- \frac{8}{3b} \right) - \alpha \exp \left(- \frac{4}{3c} \right) \right)^{-2} \right\} h^2.$$

References

1. Wasow W. On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences. Jour. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, v.48, p.345-348.
2. Walsh J.L. and Young D. On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences. Jour. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, v.51, №6, p.343-369.
3. Romanova S.E. Economical method of solution of Laplace's difference equation on rectangle domains. DAN USSR, 1980, v.252, №1, pp.48-51 (Russian).
4. Romanova S.E. Economical methods of approximated solution of Laplace's difference equation on rectangle domains, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1983, v.23, №3, pp.660-673 (Russian).
5. Aliyev A.Y. Efficient error estimate of net method for a mixed boundary value problem. Transactions of NAS of Azerbaijan mathematics and mechanics series of physical-technical and mathematical sciences, v.23, №34, 2003, pp.233-238.
6. Aliyev A.Y. Numerical solution of one nonhomogeneous

- non-local mixed problem. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, v.22, 2005, pp.179-186.
7. Mehdiyeva G.Y., Aliyev A.Y. Numerical solution of one non-local mixed problem. Proceedings of International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing, Paris, France, 2011, pp.244-246.
 8. Mehdiyeva G.Y., Aliyev A.Y. Numerical solution of one non-local boundary value problems for partial differential equations. Abstracts book International Conference Mathematical Science and Applications, Abu Dhabi, UAE, 2012, pp.7
 9. Mehdiyeva G.Y., Aliyev A.Y. Numerical solution of one non-local boundary value problem. Proceedings of International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences and Engineering, Istanbul, Turkey, 2013, pp.1086-1091.

ONTOLOGIYA ƏSASINDA EKSPERT SİSTEMLƏRİNİN BİLİKLƏR BAZASININ VƏ ÇIXARIŞ MEXANİZMİNİN YARADILMASI

Amooji A.Ş.

***Department of computer, Payame Noor University(PNU), P.O.Box
19395-3697, Tehran, Iran.***

it_iranian@yahoo.com

Giriş. Kompüter elmləri sahəsində “ontologiya” termini başqa bir mənə də qazanmışdır; ontologiya biliyin konsepsiyalaşdırma anlayışı olub, onlar arasındakı anlayışlar və əlaqələrdən başqa, onların prinsip və inkişaf qaydalarını da əhatə edir. Ontologiya baxımından gerçəkliyin mövcud olmasına baxmayaraq, bizim gerçəklik haqqındakı təsəvvürümüz müəyyən qədər zehnimizin xəritələndirməsinin nəzarəti altında olub, gerçəkliyin dərk edilməsi üçün baş verir. Əgər bu konseptual çərçivə modellərini (özümüzün zəhin xəritəmizi) verə bilməyə qadir olsaq, o halda bu modellərdən süni intellektdə hərəkət sxemi kimi istifadə edə bilərik.

Ontologiyanın əsas anlayışları. Ontologiya termini çox vaxt

müəyyən bir sahənin üzvləri arasındakı semantik dərkətmə və ya konseptual bilik çərçivəsinə aid edilir. Bu konseptual çərçivə, ya konseptual ontologiya həmin sahədəki qeyri-rəsmi bir konseptual struktur kimi müxtəlif anlayışları və əlaqələri axtara bilər. İkinci halda əlaqələr sistemli bir şəkildə məntiq dilində şərh edilmişdir və daha çox cins və növ, yaxud ümumi-xüsusi əsasında tənzimlənir.

Qruberin tərifinə görə, ontologiyaya dünyanın istifadəçi cəmiyyətinin fikirləşdiyi sadə və cüzi konsepsiyalaşdırılması kimi tərif vermək olar. Aydın bir məqsəd üçün yaradılan konsepsiyalaşdırma növünə rəsmi dil və avtomatlaşdırılmış olaraq tərif verilir. Bu tərif aşağıdakı kimidir: “Bir ontologiya bir təsəvvürün dəqiq və rəsmi bəyanından ibarətdir”.

Qruber tərəfindən aşağıdakı prinsip verilmişdir: “Süni intellekt üçün mövcud olan şey, hər an açıla bilən şeydir”. Bu prinsipdən iki nəticə almaq olar:

- yalnız informasiya sistemində təsvir olunan mövcudiyyətlər mövcuddur;

- bu mövcudiyyətlər həmin sistemdə təsvir olunan xüsusiyyətlərə malik olmalıdır[6].

Son olaraq ontologiyaya aşağıdakı kimi tərif veririk: ontologiya təbii insan dilinin aydın və rəsmi xüsusiyyətlər kompleksi olub, bir şeyin dərk edilməsi üçündür[3].

Ekspert sistemlərində ontologiyanın əsaslandırılması. Ontologiya informasiya sistemlərinin ayrılmaz hissəsidir. Avtomatlaşdırma dünyasındakı hər bir fəaliyyət, proseslərin simulyasiyası, məcazi dünyaların yaradılması, robot və kibernetika sənayesi və informasiya sistemləri ontologiyaya əsaslanır[4]. Belə bir proseslər 3 bölümdə yerinə yetirilir:

- 1 – Sistemin biliklər təsvirinin ontologiyası onun istifadəçiləri və yaradıcılarının konsepsiyalaşdırması əsasında yaradılır, yəni bu mərhələdə sistemin obyektləri, hər obyektin xüsusiyyətləri və bütün obyektlərin arasındakı əlaqələri təyin edilir.

- 2 – Bu ontologiya ilə işləmək üçün nəticə çıxarma motoru hazırlanır.

- 3 – Son olaraq bu ontologiya ilə işləmək üçün əlverişli dil seçilib, təbiiq olunur[6].

Məsələn, vebin xüsusiyyətlərini klassifikasiya edən və axtaran agent yönümlü layihələşdirmədə, ilk addım olaraq veb dünyasındakı obyektləri(sayt, ekran, başlıq, mətn, link və açar sözlər kimi)

müəyyən etməli və sonra onlardan hər birinin mümkün xüsusiyyətlərini(mövzu, dil, yaradılma tarixi kimi) və onlar arasındakı əlaqələri(oxşarlıqlar, bir sayın üzvü olmaq, link almaq kimi) təyin edilir. Bu mərhələdə real olaraq agentin ontologiya öhdəliklərini yaratmışıq. İkinci mərhələdə bu ontologiyadakı axtarış və hərəkət qaydalarını bir nəticəçıxarma motoru formatında layihələşdirməliyik. Son olaraq isə xarici dünya ilə əlaqə üçün bir əlaqələndirici müəyyən etməliyik ki, bir xarici mövcudluq agentdən bir vəzifəni tələb edə bilsin.

Məsələnin aktuallığı. Ekspert sistemlərinin ontologiyasının yaratmaq zəruriyyətləri aşağıdakılardan ibarətdir:

- insan və maşın agentləri arasında informasiya strukturunun ictimai anlaşmamsının paylaşımı;
- abstraktlığı səbəbilə təkrar istifadə qabiliyyəti;
- verilənlərin domain aydınlığı;
- aqreqasiya yaradır[5].

Məsələnin həlli. Ontologiyaların işlənilib hazırlanması üçün bir üsul, ya metod mövcud deyildir. Bir ontologiya siniflərin absrtakt nümunələrinin bir kompleksi ilə birlikdə bir bilik bazasını təşkil edir. Siniflər(classes) ontologistlərin əksəriyyətinin diqqətini cəlb edir və domain konseptlərini təsvir edir. Daha spesifik konseptləri təsvir etmək üçün bir sinfin altsinifləri (subclasses) ola bilər. Bir ontologiyanın yaradılmasının prosesi aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

1 – siniflərin bir altsinif–supersinif iyerarşiyasında yerləşdirilməsi;

2 – slotların tərifləri və o slotların qəbul ediləcək miqdarlarının təyin edilməsi;

3 – sinif nümunələri üçün slotların qiymətləndirilməsi.

Ontologiyaların işlənilib hazırlanması üçün interativ yanaşmadan istifadə edirik. Əvvəlcə ontologiyaya ilkin keçidlə başlayırıq, sonra mərhələli korreksiya və düzəlişlər veririk. Hər mərhələdə ona yeni xırdalıqlar əlavə edirik. İlkin variantın tərifindən sonra bu variantın debug və dəyərləndirilməsinə (Evaluate) başlayırıq. Bu interativ proses aşağıdakı kimi olacaqdır:

Birinci addım: Ontologiyanın domaininin(işlənilmə sahəsinin) müəyyən edilməsi; Bir ontologiyanın işlənilib hazırlanmasının müxtəlif mərhələlərini onun domain və sahəsinin tərifləri ilə

başlayırıq[2].

İkinci addım: ontologiyalardan təkrar istifadə məsələsinin nəzərə alınması; başqaları tərəfindən görülmüş işlərin yenidən istifadə və nəzərdə tutulan spesifik istifadə üçün terminlərin dəyişdirilməsi, yaxud mövcud mənbələrin ekstensiyası.

Üçüncü addım: ağır ontologiya (Heavyweight ontology) uzun bir mərhələdə hazırlanır.

Dördüncü addım: siniflər və siniflərin iyerarxiyasının tərfi; Bu mərhələ üç növ qaydada mümkün ola bilər:

- yuxarıdan aşağı: əvvəlcə əhatə dairəsindəki ümumi konseptlərin müəyyən edilməsi və sonra isə daha spesifik altsiniflərin seçilməsi;

- aşağıdan yuxarı: əvvəlcə spesifik siniflərin müəyyən edilməsi, sonra siniflərin iyerarxiyasının qollarının təyin edilməsi, daha sonra isə ümumi formatda bu siniflərin qruplaşdırılması;

- hibrid (qarışıq) : yuxarıdan aşağı və aşağıdan yuxarı üsullarının qarışığından ibarətdir. Hibrid yanaşma daha sadə həll yolu sayılır. Belə ki, üçüncü addımda hazırlanmış siyahıdan müstəqil şeyləri təsvir edən sözləri seçirik. Bu sözlər sinif ontologiyasını müəyyən edir və siniflərin iyerarxiyasındakı dayama nöqtəsini təşkil edir.

Beşinci addım: sinfin xarakteristikasının tərfi (slots definition).

Altıncı addım: slotların xassələrinin tərfi; bu xüsusiyyət bir slotun malik olabiləcək miqdarlarını göstərir[1].

Nəticə. Süni intellektə biliklərin təsviri üçün müxtəlif metodologiyalardan istifadə olunur. Günümüzdə informasiya sistemlərində ontologiyanın yeni bir tətbiqi isə işlək olmuşdur. Bu mənada ontologiya konsepsiyalaşdırma üçün çərçivə olub, ələmlə bağlı abstrakt və sadələşdirilmiş bir baxışdır.

Ədəbiyyat

1. Kərimov S.Q., Həbibullayev S.B., İbrahimzadə T.İ. İnformatika. Bakı: Təhsil, 2009, 434 s.
2. Paul H., David K. Expert Systems. New Jersey: John Wiley, 1999, 376p.
3. Breuker J., Van D. The Common KADS library for expertise modeling. Amsterdam: IOS press, 2006, 288p.
4. Tore A. Logic Programming and Knowledge Engineering.

Boston: Addison-wesley, 2007, 364p.

5. Marcus S. Automatic Knowledge Acquisition for Expert Systems. Alphen den Rijn: Kluwer, 1998, 212p.

6. Gruber T. Towards principles for the design of ontologies used for knowledge sharing // International Journal of Human-Computer Studies-Special issue: the role of formal ontology in the information technology, 1995, v.43, No 5, pp. 907-928

INVESTIGATION OF CONTROL OF THE STRING VIBRATION PROCESS BY MEANS OF LUMPED SOURCES

Asadova D.A.

Institute of Control Systems of ANAS, Azerbaijan, Baku

Various oscillatory processes of electric, acoustic, mechanical, and hydrodynamic systems such as unsteady flow of liquid and gas, appearing in the main pipelines with intermediate pumping stations, transport processes in the electricity transmission system, the vibrational motion of strings, rods, plates and point controls, etc. are described by the mathematical model of the telegrapher's equation with lumped impacts incorporated in the term containing the Dirac's function. Therefore, the obtained results can be attributed to many processes described by hyperbolic systems of equations.

The aim of the research carried out in this work is to ascertain the dependence of the optimal transient period of oscillatory processes on the number and locations of lumped control actions, on the parameters of the process, on the resistance coefficient of the environment, and on other factors as well.

If there are M intermediate lumped (point) impacts (sources), the motion of the oscillating system (taking the resistance of the medium into account) can be described by the following system of hyperbolic equations in dimensionless variables:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{i=1}^M u_i(t) \delta(x - \bar{x}_i) = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha \xi, \\ -\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \end{cases} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \bar{x}_i < 1, \quad t > 0 \quad (1)$$

where α is the resistance coefficient of the medium, $\xi = \xi(x, t)$ and

$\eta = \eta(x, t)$ are the state functions of the distributed oscillating system, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function, $\bar{x}_i$ and $u_i(t)$ are the location and power of the point impact of the i -th source, $i = 1, \dots, M$, $u_i(t) \in L_2[0, T]$.

Our goal is the transfer of the oscillating system (1) from the initial state:

$$\xi(x, 0) = \varphi_{10}(x), \eta(x, 0) = \varphi_{20}(x), \quad (2)$$

at the initial point of time $t = 0$ to the final state:

$$\xi(x, T) = \varphi_{1T}(x), \eta(x, T) = \varphi_{2T}(x), \quad x \in [0, 1], t \in [0, T], \quad (3)$$

where T is the time after which there will be formed a new regime (3) in the system.

Here the pair of functions $\{\varphi_{10}(\cdot), \varphi_{20}(\cdot)\}$, $\{\varphi_{1T}(\cdot), \varphi_{2T}(\cdot)\}$ can be viewed as the elements of the Hilbert space $H = W_2^1[0, 1] \times W_2^1[0, 1]$.

The boundary conditions for (1) can be set in one of the following forms:

$$\eta(0, t) = v_1(t), \quad \eta(1, t) = v_2(t), \quad (4)$$

$$\xi(0, t) = v_1(t), \quad \xi(1, t) = v_2(t) \quad (5)$$

$$\xi(0, t) = v_1(t), \quad \eta(1, t) = v_2(t) \quad \text{or} \quad \eta(0, t) = v_1(t), \quad \xi(1, t) = v_2(t),$$

where

$$v_i(t) \in L_2[0, T], \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

The considered problem of control of process (1) lies in finding such control functions $u(t) = (u_1(t), \dots, u_M(t))$ and $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, under which the period of transition T from initial conditions (2) to the desired final conditions (3) is minimal.

In practice, it is impossible to achieve accurate values of the desired mode to any specific point in time, and therefore it will be assumed that the system (1) has reached the state (3) if the following conditions are satisfied:

$$\begin{aligned} |\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)| &\leq \delta_\xi, \\ |\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)| &\leq \delta_\eta, \quad x \in (0, 1), \quad t \geq T, \end{aligned} \quad (7)$$

where δ_ξ, δ_η are given small quantities, determined as a percentage of some steady-state mode.

As a criterion for the quality of the transition process, consider the

objective functional composed of two terms: the first term - minimized point of time T , and the second term - penalty for violation of the fact of δ – establishment of the process:

$$J(u, v, T) = T + \int_T^{T+DT} \int_0^1 \left\{ r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)]^2 + r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)]^2 \right\} dx dt \rightarrow \min \quad (8)$$

To solve the problem of optimal control of the process of establishing oscillatory systems considered in this paper, it is proposed to use the iterative first order optimization methods, based on the use of analytical formulas for the gradient of the objective functional with respect to the control parameters.

Formulas for the components of the gradient of the target functional with respect to the intermediate control actions.

Using the method of variation of the optimized functions [2], we show, that the functional is differentiable with respect to $u_i(t)$, $i = 1, \dots, M$ in the space $L_2[0, T + DT]$ and its gradient is determined by the formula:

$$\text{grad}_{u_i} J(u, v, T) = \psi_1(\bar{x}_i, t), \quad i = 1, \dots, M, \quad t \in [0, T + DT] \quad (9)$$

Formulas for the components of the gradient of the target functional with respect to the boundary controls

$$\text{grad}_{v_1} J(u, v, T) = \psi_2(0, t), \quad t \in [0, T + DT], \quad (10)$$

$$\text{grad}_{v_2} J(u, v, T) = \psi_2(1, t), \quad t \in [0, T + DT]. \quad (11)$$

Formulas for the components of the gradient of the target functional with respect to the point of time T .

$$\text{grad}_T J(u, v, T) = 1 +$$

$$\int_0^1 r_1 (\xi(x, T + DT) + \xi(x, T) - 2\varphi_{1T}(x)) (\xi(x, T + DT) - \xi(x, T)) dx + \\ + \int_0^1 r_2 (\eta(x, T + DT) + \eta(x, T) - 2\varphi_{2T}(x)) (\eta(x, T + DT) - \eta(x, T)) dx \quad (12)$$

Using the formulas obtained in the work, we have conducted numerical analysis of dependence of the optimal transition-process time from its parameters, the number and locations of the pumping stations, the range of admissible values of the control actions, and the values of the initial and final steady-state regimes [1]. These investigations generalize the results of the works ([1], [4]), obtained

for boundary controls, in cases when there are intermediate pumping stations considered as control actions.

References

1. K.R. Aida-zade, J.A. Asadova. Study of Transients in Oil Pipelines // Automation and Remote Control, 2011, Vol. 72, No. 12, pp. 2563-2577.
2. Vasilyev F.P. Optimization methods, Moscow, Factorial Press, (2002), 824 p. (in Russian)
3. Ilyin V.A. Two-Endpoint Boundary Control of Vibrations Described by a Finite-Energy Generalized Solution of the Wave Equation // Differential Equations, 2000, Vol. 36, No. 11, pp. 1652-1659.
4. K.R. Aida-zade, J.A. Asadova. Optimal control of transients in pipelines. Palmarium Academic Publishing 2014, 139 p.

ABOUT RESOLVENT OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION HIGHER ORDER ON FINITE INTERVAL

Aslanov H.I., Abdullayeva N.S.

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,
Sumqait State University
aslanov.50@mail.ru*

Let H separable Hilbert space. In space $L_2([0, \pi]; H)$ consider operator

L , which arising by differential expression

$$l(y) = (-1)^n y^{(2n)} + Q(x)y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

And boundary conditions

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(0) &= y^{(n)}(0) = \dots = y^{(2n-1)}(0) = 0 \\ y^{(n-1)}(\pi) &= y^{(n-1)}(\pi) = \dots = y^{(2n-1)}(\pi) = 0 \end{aligned}$$

is considered.

We suppose, that of operator function $Q(x)$ satisfy following conditions:

1. At all $x \in [0, \pi]$, $Q(x)$ is self-adjoint, bounded below operator and $Q(x)$ under all x is compact operator in H .
2. Let $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \dots \leq \alpha_n(x) \leq \dots$ eigenvalue of operator $Q(x)$ in H and at any $x \in [0, \pi]$ series $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1-4n}{2n}}(x)$ is convergence and itself sum contentiously on interval $[0, \pi]$.
3. The operator-function $Q^{-1}(x)$ weak measurable, i.d. for any $f, g \in H$, the function $(Q^{-1}(x)f, g)$ is measurable in mean of Lebesgue.

At conditions 1-3, operator L having discret spectr. We defined over $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \dots$ eigenvalue of operator L in order they rate.

The following basis theorem is proved:

Theorem: If coefficient of operator L satisfy by conditions 1-3, then of resolvent of operator L is operator of type Hilbert-Smidt, i.d. series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}$ is convergence.

ŞAGİRD LƏRİN ŞÜURLU MƏNİMSƏNİLMƏSİNİN VƏ MƏNTİQİ TƏFƏKKÜRÜN FORMALAŞMASINDA HƏNDƏSƏ MƏSƏLƏSİ HƏLLİNİN ROLU

Əfəndi S.N., Əliyev S.C., Şərbətov E.M.

Bakı Dövlət Universiteti

Məlum olduğu kimi həndəsə maddi aləmin fəza formalarını öyrənməklə məşğul olan bir elmdir. Maddi aləmin fəza formalarını dərk etmək və öyrənmək üçün şagirdin çox yaxşı inkişaf etmiş, fəza təsəvvürü və məntiqi mühakiməsi olmalıdır. Buna görə də həndəsənin tədrisi prosesində orta məktəb şagirdlərinin fəza təsəvvürlərini və məntiqi mühakiməsini inkişaf etdirmək ən vacib məsələlərdəndir. Fəza təsəvvürünün zəif inkişaf etmiş olması şagirdlərin bir sıra fənnlərin müvəffəqiyyətlə mənimsəmələrinə mane olur.

Şagirdlərin məntiqi mühakiməsinin inkişafında hesab, cəbr və elementar funksiyalara aid çalışmalarla yanaşı, həndəsi çalışmalarında böyük əhəmiyyəti vardır. Lakin fəza təsəvvürünün inkişafı vəzifəsi, demək olar ki, həndəsinin və həndəsə məsələlərinin üzərinə düşür.

Məlumdur ki, təlim nəzəriyyəsində 1) biliklər arasındakı əlaqələrin xarakterinin şagirdlər tərəfindən başa düşülməsi; 2) əlaqələrin aşkar edilməsi; 3) bilikləri əsaslandırma bacarığı; 4) biliklərin əldə edilməsi üsulları və onların tətbiqi dairələrinin başa düşülməsi və s. şagirdlərin bilikləri şüurlu mənimsəmələrinin əsas əlamətləridir.

Həndəsinin tədris prosesində fuqurların xassələrinin sistematik öyrənilməsində məsələ həlli böyük əhəmiyyətə malikdir. Həndəsə məsələləri nəzəri materialın daha dərin və daha şüurlu mənimsənilməsinə kömək etməklə bərabər, bu materialı təcrübəyə tətbiq etməyi öyrədir.

Həndəsə məsələsinin həlli prosesində şüurluluq və fəallığın həyata keçirilməsi şagirdlərdə əsas şəxsi keyfiyyət sayılan idrak müstəqilliyi formalaşdırır. Bunun nəticəsində şagirdlər müstəqil fikir söyləmək, yeni məsələnin həllinə istiqamətlənmək, biliklərin əldə edilməsi üsullarını öyrənmək bacarıqları formalaşır.

Təlim idrakı məsələlərinin köməyi ilə şagirdlərin biliyə yiyələnmək işinə şüurlu, yəni məqsədli yanaşmaq, onun yerinə yetirilməsi yollarını və məsələdə verilənləri nəzərə almaq, məsələnin düzgün həll edilib-edilmədiyini dərk edib başa düşmək qabiliyyətini tərbiyə etməyə imkan yaradır. Şüurluluq prinsipi şagirdlərdən konkret və mücərrəd prosesləri düzgün əlaqələndirməyi tələb edir. Məsələ həlli zamanı şagirdlər konkret və mücərrəd prosesləri əlaqələndirməyi öyrənir.

Şüurlu mənimsəmə prosesində biliklərin öyrənilməsi və tətbiqinə yaradıcı münasibət, şagirdlərdə məntiqi təfəkkürü formalaşdırır.

Şagird həndəsə məsələlərini həll etməklə çoxlu yenilik dərk edir: məsələdə təsvir olunan yeni situasiya, nəzəriyyənin məsələ həllinə tətbiqi ilə tanış olur, yaxud məsələ həlli üçün zəruri olan yeni bilikləri dərk edir. Həndəsədən məsələ həlli verilənləri, axtarılanları ayırmağı, nəticə çıxarmağı, verilənlərdə ümumiliyi tapmağı, faktları tutuşdurmağı və qarşı-qarşıya qoymağı öyrədir ki, bu da şagirdlərin

təfəkkürünü zənginləşdirir və öyrəndiklərinin şüurlu mənimsənilməsinə ciddi təsir göstərir.

Həndəsədə məsələnin həlli prosesində şagird məsələdə təsvir edilənlərlə tanış olur, nəzəriyyənin bu məsələ həllinə tətbiqini görür, yeni metod və ya həndəsənin yeni bölmələrini öyrənir ki, bunda nəticəsində yeni riyazi biliklər əldə edir, əldə etdiyi bilikləri şüurlu mənimsəyir və məntiqi mühakiməsi formalaşır.

Nəzəri biliklərin məsələ həllində tətbiqi bacarığı şagirdlərin öyrəndiyi biliklərin şüurlu mənimsəmələrinin şöstəricisi olur. Şüurlu mənimsəmə təlim və öyrənmənin müvəffəqiyyətini təmin edir, təlimin əsas vəzifələrinin yerinə yetirilməsinə şagirdlərin idrak fəaliyyətinə və bu fəaliyyətə rəhbərlik işinə başlıca istiqamət verir.

Məlum olduğu kimi həndəsə məsələləri üç növə bölünür: hesablama məsələləri, isbat məsələləri və qurma məsələlər. Həndəsədən hesablama məsələlərinə bəzən və qurma məsələlərinə həmişə isbat daxil olduğundan aydındır ki, bu bölgünü ciddi elmi bölgü hesab etmək olmaz. Buna baxmayaraq həmin bölgü həndəsə məsələlərinin həllinin öyrənilməsinə asanlaşdırmaq məqsədi ilə qəbul edilir.

Tədris prosesində həndəsə məsələlərindən isbata aid məsələlərin əsas məqsədi, şagirdlərə müxtəlif isbat metodlarından istifadə etməyi öyrətməklə onların məntiqi təfəkkürünü inkişaf etdirməkdir.

Qeyd edək ki, hesabın və cəbrin tədrisində şifahi çalışmaların əhəmiyyəti haqqında deyilənlər, həndəsə məsələlərinin şifahi həllinə də aiddir, lakin həndəsə məsələlərinin şifahi həlli, həm də şagirdlərin fəza təsəvvürlərinin və məntiqi təfəkkürlərinin inkişafında çox böyük əhəmiyyətə malikdir.

Həndəsə məsələlərinin həllində əsas mərhələ həllin planının tərtib edilməsidir. Bəzi hallar müstəsna olmaqla sinifdə məsələlərin həlli planını şagirdlər müəyyən etməlidirlər. Əgər məsələni bir neçə üsulla həll etmək mümkündürsə, çalışmaq lazımdır ki, bu üsulların hamısı tapılsın və onlardan ən səmərəli və maraqlı olanı seçilsin. Şagirdlərin mühakimə aparmasına mane olunmamalıdır. Onda şagirdlərin həndəsəni dərinlən öyrənməyə maraq yaradılır və şagirdlərin məntiqi mühakiməsi formalaşır.

Məlumdur ki, məsələnin həlli planını tapmaq üçün analiz metodundan istifadə etmək lazım gəlir. Şagirdlərin bu sahədə hesab məsələlərinin həllində əldə etmiş olduqları vərdislərdən istifadə etdikdə bu vərdislər möhkəmlənir.

İsbata aid həndəsə məsələlərinin həlli şagirdlərə müxtəlif isbat metodlarında istifadə etməyi öyrənməklə, onların məntiqi təfəkkürü inkişaf edir, bunda nəticəsində şagirdlərdə məntiqi mühakimə formalaşır. Bu cür məsələlərin həlli prosesində şagird çox zaman fiqurların bəzi ümumi xassələrini aşkara çıxarmaqla, bilik dairəsini genişləndirir və onların riyaziyyatla daha çox maraqlanmasına səbəb olur. Təlim prosesində şagird isbata aid məsələlərin həlli ilə müntəzəm sürətdə məşğul olduqda, şagirdlər isbat prosesini şüurlu olaraq mənimsəyir və məntiqi mühakimə yürütməyə alışır.

Həndəsədə qurma məsələləri şagirdlərin fəza təsəvvürünün, məntiqi təfəkkürünün və məntiqi təfəkkürdən yaranan məntiqi mühakimənin inkişafına kömək edən qüvvətli bir vasitədir. Həndəsədə qurma məsələləri dedikdə bəzi verilən elementlərə və şərtlərə görə həndəsi fiqurun qurulmasını tələb edən məsələlər nəzərdə tutulur. Elə məsələlər var ki, onların həlli yalnız qurma ilə yerinə yetirilir. Bu halda qurma köməkçi rol oynamır və əsas məqsəd kimi qarşıya qoyulur.

Qurma məsələləri şagirdlərin məntiqi təfəkkürünü, fəza təsəvvürünü inkişaf etdirir, onların nəzəri bilik və təcrübü vərdislər əldə etməsinə, öyrənilən biliklərin şüurlu mənimsənilməsinə ciddi kömək edir.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB TƏNLİK ÜÇÜN BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏYƏ UYGUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİN ASİMPOTOTİKASININ TAPILMASI

Əhmədov S.Z., Ələskərova S.T.

Bakı Dövlət Universiteti,

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

salehmedov0@gmail.com

$$qy^{IV} + p\lambda^2 y'' + \lambda^4 y - b(x)y - a(x)\lambda^2 y = 0, \quad (1)$$

$$L_1(y) \equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k} y^{(k-1)}(0, \lambda) + \sum_{k=1}^4 \beta_{1k} y^{(k-1)}(1, \lambda) = 0,$$

$$L_2(y) \equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{2k} y^{(k-1)}(0, \lambda) + \sum_{k=1}^4 \beta_{2k} y^{(k-1)}(1, \lambda) = 0,$$

$$L_3(y) \equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{3k} y^{(k-1)}(0, \lambda) + \sum_{k=1}^4 \beta_{3k} y^{(k-1)}(1, \lambda) = 0,$$

$$L_4(y) \equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{34} y^{(k-1)}(0, \lambda) + \sum_{k=1}^4 \beta_{4k} y^{(k-1)}(1, \lambda) = 0, \quad (2)$$

α_{ij}, β_{ij} ($i, j = \overline{1,4}$) kompleks ədədlərdir, $a(x)$ və $b(x)$ kompleks qiymətli funksiyalardır, p, q həqiqi ədədlər.

Teorem. Tutaq ki, (1) tənliyinin və (2) sərhəd şərtlərinin əmsalları aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$a(x) \in C^1[0,1], \quad b(x) \in C^1[0,1], \quad L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) \neq 0, \\ p < 0, \quad p^2 - 4q < 0$$

olarsa $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantın sıfırlarının asimptotikası aşağıdakı kimidir:

$$\lambda_{kn} = \frac{1}{\omega_k} \left[\ln \operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{-1} \left(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ n \rightarrow \infty, \quad k = \overline{1,4}. \quad (3)$$

Burada ω_k ($k = \overline{1,4}$) Birkhof məna da xarakteristik tənliyin kökləridir:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi), \\ \omega_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi), \\ \omega_2 = -\omega_1, \quad \omega_4 = -\omega_3, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4q - p^2}}{-p} \\ L(\beta_p, \alpha_q, \beta_q, \alpha_p) = \begin{vmatrix} \beta_{p1} & \alpha_{q1} & \beta_{q1} & \alpha_{p1} \\ \beta_{p2} & \alpha_{q2} & \beta_{q2} & \alpha_{p2} \\ \beta_{p3} & \alpha_{q3} & \beta_{q3} & \alpha_{p3} \\ \beta_{p4} & \alpha_{q4} & \beta_{q4} & \alpha_{p4} \end{vmatrix}, \quad p, q \in \{3,4\}.$$

Ədəbiyyat

1. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 458 с.
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983, 352 с.

3. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи // Вестник БГУ, сер. физ.-мат.наук, 2005, №2 с.5-12.

İKİ TƏRTİBLİ KƏSİLƏN ƏMSALLI SPEKTRAL MƏSƏLƏ ÜÇÜN AYRILIŞ TEOREMİ

Əhmədov S.Z., Quliyeva L.Y.

Bakı Dövlət Universiteti

salehmedov0@gmail.com

İşdə aşağıdakı kimi məsələyə baxılır:

$$p(x)y'' - \lambda^2 y = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

$$|y(x, \lambda)| \leq M, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \gamma_{10}y(\alpha - 0) + \delta_{10}(\alpha + 0) = 0, \\ \gamma_{11}y(\alpha - 0) + \delta_{11}(\alpha + 0) = 0, \\ \gamma_{20}y(\beta - 0) + \delta_{20}(\beta + 0) = 0, \\ \gamma_{21}y(\beta - 0) + \delta_{21}(\beta + 0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

burada

$$p(x) = \begin{cases} a^2, & x \in (-\infty; \infty) \setminus (\alpha; \beta), \\ ib^2, & x \in (\alpha; \beta), \end{cases}$$

$a > 0; b > 0$ olmaqla həqiqi ədədlərdir.

γ_{ij} və δ_{ij} ($i = 1, 2; j = 0, 1$) həqiqi ədədlər, M – müsbət ədəddir. (1)-(3) məsələsində (2) şərti təbii şərt, (3) şərti isə uzlaşma şərti adlanır.

(1)-(3) spektral məsələnin məxsusi ədədlərinin asimptotikası aşağıdakı kimi tapılmışdır ([1], [2]):

$$\lambda_k = \frac{b}{2\sqrt{2}(\beta - \alpha)}(\varphi + 2\pi k - K + i(\varphi + 2\pi k + K)) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow +\infty,$$

burada

$$A = \frac{a_1 + a_3 + a_4 - i(a_1 + a_2 + a_4)}{-a_1 + a_3 - a_4 + i(a_1 - a_2 + a_4)}, \quad \varphi = \arg A, \quad K = \ln|A|.$$

Teorem. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası və uzlaşma şərtlərinin əmsalları aşağıdakı şərtləri ödəyərsə

a) $\varphi(x)$ funksiyası $(-\infty; \infty)$ aralığında ikinci tərtibə qədər kəsilməz törəmələrə malikdir;

b) $\varphi(x), \varphi'(x)$ və $\varphi''(x)$ funksiyaları $(-\infty; \infty)$ aralığında məhduddurlar;

c) $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = 0$;

d) $(a_1 + a_4)(a_2 + a_3) > 0$,

onda $\varphi(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı ayrılış düsturu doğrudur

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{C_k} y(x, \lambda) \lambda d\lambda ,$$

burada $y(x, \lambda)$ spektral məsələnin həllidir. C_k - sadə qapalı kontur olub öz daxilində $y(x, \lambda)$ funksiyasının bir polyusunu saxlayır,

$$a_1 = \frac{\gamma_{10}\gamma_{20}\delta_{11}\delta_{21}}{\sqrt{2ab}}; \quad a_2 = \frac{\gamma_{10}\gamma_{21}\delta_{11}\delta_{20}}{b^2};$$

$$a_3 = \frac{\gamma_{11}\gamma_{20}\delta_{10}\delta_{21}}{\sqrt{2ab}}; \quad a_4 = \frac{\gamma_{11}\gamma_{21}\delta_{10}\delta_{20}}{b^2}.$$

Ədəbiyyat

1. Расулов М.Л., Метод контурного интеграла, М.: Наука, 1964, 462 с.
2. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи // Вестник БГУ, сер., физ.-мат. наук, 2005, № 2, с.5-12.

H_{αβ}^v FƏZALARINDA KOŞI STİLTYES SİNQULYAR

OPERATORU

Əkbərov A.Ə., Hacıyeva R.O.

Bakı Dövlət Universiteti

Tutaq ki, $\rho_i(x)$ ($i = 1, 2$) - azalmayan funksiyaadır və

$$\rho_i(0) = 0;$$

$\rho(x) \stackrel{df}{=} \rho_1(x-a)\rho_2(b-x)$ $x \in [a, b]$; $\omega(\delta)$, $\delta \in (0, b-a]$ - kəsilməzlik moduludur;

$$H_\rho^\omega = \{u \in C_{(a,b)} : \lim_{x \rightarrow a} (\rho u)(x) = \lim_{x \rightarrow b} (\rho u)(x) = 0,$$

$$\|u\| \stackrel{df}{=} \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a, b] \\ x_1 \neq x_2}} (|(\rho u)(x_1) - (\rho u)(x_2)| / \omega(|x_1 - x_2|)) < +\infty\}$$

Ümumiləşmiş çəkili Hölder fəzasıdır [1].

Qeyd edək ki, $\rho(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$ və $\omega(\delta) = \delta^\nu$ olan halda H_ω^ρ fəzasını $H_{\alpha\beta}^\nu$ işarə edəcəyik.

İşdə aşağıdakı sinqulyar operatora baxılır:

$$A_\mu : u \rightarrow (A_\mu : u)(x) \stackrel{df}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{u(s)ds}{(s-x)|x-s|^\mu},$$

$$x \in (a, b); \mu \in (0, 1).$$

Teorem. Tutaq ki, $u \in H_{\alpha\beta}^\nu$. Onda $(A_\mu u)(x)$, $x \in (a, b)$ sinqulyar integralın varlığı üçün zəruri şərt

$$0 < \nu \leq 1, 0 < \nu - \mu, \nu < \alpha < \nu + 1, \nu < \beta < \nu + 1 \quad (1)$$

ödənməsidir.

Teorem. Tutaq ki, (1) şərti ödənilir. Onda A_μ operatorunun $H_{\alpha\beta}^\nu$ -dan

$H_{\alpha_1\beta_1}^{\nu_1}$ -a məhdud təsir etməsi üçün zəruri və kafi şərt

$$0 < \nu_1 \leq \nu - \mu, \alpha \leq \alpha_1, \beta \leq \beta_1$$

ödənməsidir.

Ədəbiyyat

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью. ДАН СССР, т.188, №2, 1969.

**H_{ω}^{ρ} FƏZALARINDA KOŞI STİLTYES SİNGULYAR
OPERATORU ÜÇÜN TƏRS QIYMƏTLƏNDİRMƏLƏR**
Əkbərov A.Ə., Hacıyeva R.O.
Bakı Dövlət Universiteti

Tutaq ki, $\rho_i(x)$ ($i=1,2$) - azalmayan funksiyadır və $\rho_i(0)=0$;

$\rho(x) \stackrel{df}{=} \rho_1(x-a)\rho_2(b-x)$ $x \in [a,b]$; $\omega(\delta)$, $\delta \in (0, b-a]$ - kəsilməzlik moduludur;

$$H_{\rho}^{\omega} = \left\{ u \in C_{(a,b)} : \lim_{x \rightarrow a} (\rho u)(x) = \lim_{x \rightarrow b} (\rho u)(x) = 0, \right.$$

$$\left. \|u\| \stackrel{df}{=} \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a,b] \\ x_1 \neq x_2}} \left(|(\rho u)(x_1) - (\rho u)(x_2)| / \omega(|x_1 - x_2|) \right) < +\infty \right\}$$

Ümumiləşmiş çəkili Hölder fəzasıdır [1,2].

İşdə H_{ρ}^{ω} fəzaları şkalasında aşağıdakı singulyar operatora baxılır:

$$A_{\mu} : u \rightarrow (A_{\mu} : u)(x) \stackrel{df}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{u(s)ds}{(s-x)|x-s|^{\mu}},$$

$$x \in (a,b); \mu \in (0,1).$$

Teorem. Əgər A_{μ} operatoru H_{ρ}^{ω} -dan $H_{\tilde{\rho}}^{\tilde{\omega}}$ -yə məhdud təsir edirsə,

$$1) \quad \tilde{\rho}_i(x) + \frac{\tilde{\rho}_i(x)}{\rho_i(x)} \int_0^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + \frac{\tilde{\rho}_i(x)}{x^{1+\mu}} \int_0^x \frac{\omega(t)}{\rho_i(t)} dt +$$

$$+ \tilde{\rho}_i(x) \int_x^{l/2} \frac{\omega(t)dt}{\rho_i(t)t^{1+\mu}} \leq C_1 \tilde{\omega}(x), \quad x \in (0, (b-a)/2)$$

2) Əgər $\tilde{\rho}$ həm də aşağıdakı şərti ödəyirsə:

$$\exists \bar{x} \in (0, b-a), \exists \delta_0 > 0, \forall y \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta_0)$$

(və ya $\forall y \in (\bar{x} - \delta_0, \bar{x})$)

$$|\tilde{\rho}(\bar{x}) - \tilde{\rho}(y)| \leq C \tilde{\omega}(|\bar{x} - y|),$$

onda

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + h \int_h^{l/2} \frac{\omega(t)}{t^{2+\mu}} dt \leq C_1 \tilde{\omega}(h), \quad h \in (0, l/2].$$

Ədəbiyyat

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью. ДАН СССР, т.188, №2, 1969.
2. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Докл. расш. сем. ин-та. Прик. матем. Им.И.Н.Векья –1990, т.5, №1.

ELASTİKİ BORUDA MAYENİN AXIN REJİMLƏRİNDƏ DALĞALARIN RİYAZİ MODELLEMƏSİ

Əliyev A.B., Həsənova G.H., Sultanova G.Ə.

Bakı Dövlət Universiteti

Elastiki boruda mayenin birölçülü qeyri – stasionar hərəkətinin tənliklər sistemi aşağıdakı kimidir [1].

$$\begin{aligned} -S \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\lambda}{2D} M |W| \\ -S \frac{\partial P}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada $M = SW\rho$ borunun en kəsiyindən keçən mayenin kütlələr fərqi, $S(x)$ -borunun en kəsiyinin sahəsi, ρ - mayenin sıxlığı, $P(x,t)$ - təzyiq, $W(x,t)$ - en kəsikdən keçən mayenin orta sürəti, c - sistemin həyəcanlanma sürəti, D - borunun diametri, λ - hidravlik müqavimət əmsalıdır.

Fərz olunur ki, borunun en kəsiyi mayenin təzyiqinin təsiri nəticəsində elastiki deformasiya olunur:

$$\frac{S - S_{p_1}}{S_{p_1}} = \frac{D}{h} - \frac{P - P_1}{E} \quad (2)$$

burada S_{p_1} - başlanğıc P_1 təzyiqinə uyğun borunun en kəsiyi, E – borunun divar materialının elastiki modulu, h boru xətti divarının qalınlığıdır.

Boru boyu dalğanın paylanma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur [2].

$$c^2 = \frac{k}{\rho}, \quad K = \frac{K_*}{1 + \frac{K_* D}{Eh}}$$

burada K_* - mayenin həcmi sıxılma moduludur.

$$\text{Borunun en kəsik sahəsinin dəyişməsi } S = S_0 \exp\left(-\frac{2\beta x}{D_0}\right)$$

qanunu ilə dəyişir.

Nəzərə alsaq ki, borunun en kəsiyi S -yalnız x koordinatlarından asılıdır. Onda (1)-i aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} F - \frac{\lambda}{2DS\rho} M |M| \end{aligned} \quad (3)$$

burada $F = Sp$

Müvafiq riyazi çevirmələrdən sonra P üçün

$$P = P_0 \sqrt{\frac{S_0}{S}} \exp\left(-4\pi r \int_0^x \frac{d\zeta}{GS(\zeta)}\right)$$

ifadəsi alınar.

Ədəbiyyat

1. A.B.Əliyev Dəyişən en kəsikli boruda mayenin laminar axın rejimində hidrozərbə dalğalarının riyazi modelləşdirilməsi. Bakı Maşınşünaslıq 2013(3) s.58-62
2. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Москва, Недра, 1975, стр.296

DEFORMASIYA OLUNAN BORUDA ELASTİKİ SÜRTÜNMƏNİ NƏZƏRƏ ALMAQLA AXAN MAYEDƏ DALĞALAR Əliyev A.B., Müseyibli P.T. *Bakı Dövlət Universiteti*

Tutaq ki, yarımsonsuz silindirik boru verilmişdir. Borunun radiusunu və qalınlığını uyğun olaraq R və h ilə işarə edək. Sıxlığı ρ_f olan mayeni bircins və sıxılmayan qəbul edək. Təqribi olaraq sürətin profilini müstəvi qəbul etsək (məsələn arteriya damarları üçün), özlüklüyünü nəzərə almaya bilərik. Özlüklüyü yalnız sərhəd

layı daxilində nəzərə almaqla kifayətlənəcəyik. Dalğanın uzunluğunu borunun diametrindən çox böyük olan hal üçün uzun dalğalı təqribi üsulu realizasiya etmək təklif olunur.

Bir ölçülü axın üçün sürəti $u = u(x, t)$, təzyiqi $P = P(x, t)$, radial yerdəyişməni isə $W = W(x, t)$ qəbul edək. Bu halda kəsilməzlik tənliyi aşağıdakı formanı alır [2].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

hərəkət tənliyi isə

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

şəklində olur. Burada $x \in [0, \infty)$ - uzununa koordinat, t isə zamandır.

$\frac{W}{R} \ll 1$ şərtini qəbul etsək, borunun hərəkət tənliyini aşağıdakı kimi yazı bilərik.

$$\rho_* h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \sigma - \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} W, \quad (3)$$

burada ρ_* - boru divarı materialının sıxlığı, E^* - elastiklik modulu, ν - Puasson əmsalıdır. Fərz edək ki, σ gərginliyi iki növ gərginlikdən ibarətdir: mayenin boruya göstərdiyi P hidrodinamik təzyiq və ətraf mühitin əlavə özlü elastiki bərkliyə təsir edən

$G^\vee \frac{\partial W}{\partial t}$ təzyiq.

İrsilik nəzəriyyəsinə analogi olaraq [1] $G^\vee$ -ni aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$G^\vee = G \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} \quad (4)$$

Axırıncı ifadədə $G_0(t-\tau)$ -nüvə fərqi olub, sürtünmədən yaranan özlülüüyü ifadə edir. G isə ani elastiki möhkəmlik ölçülü parametrdir. (1.4) bərabərliyini (1.3)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$P = \rho_* h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + G \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} - \int_{-\infty}^t G_0(t-\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} d\tau \right\} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} W \quad (5)$$

Beləliklə hidroelastiki sistem tənlikləri (1.1), (1.2) və (1.5) ilə ifadə olunur.

Alınmış (1.1), (1.2) və (1.5) tənliklərini integral diferensial tənliklərin həllinə gətirilir və nəticədə P, W, U üçün aşağıdakılar alınır.

$$P = P_0 \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (6)$$

$$W = \frac{P_0}{i(1-\alpha)g \frac{E}{R} + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (7)$$

$$u = i \frac{\delta}{\omega} P_0 \frac{\frac{2}{R} g c_0^2 (1-\alpha) - i \frac{2}{R} c_0^2 \eta}{g \frac{E}{R} i(1-\alpha) + \frac{2\rho_f}{R} c_0^2 \eta} \exp[i(\omega t - \delta x)] \quad (8)$$

Ədəbiyyat

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственный механики твердых тел. М; наука, 1977, 382 с.
2. Aliyev A.B. Wave distribution in the liquid flowing in flexible tube taking into account viscoelastic dragging of medium

PALÇIQ VULKANLARININ MÜXTƏLİF STRUKTURLARI ÜÇÜN DALĞA SAHƏLƏRİNİN RİYAZI MODELLƏŞDİRİLMƏSİ HAQQINDA

Əliyev A.B., Salmanova G.M

Bakı Dövlət Universiteti

Palçıq vulkanlarının strukturunun fundamental məsələsinin həlli güclü vibratorlar tətbiq etməklə dilatans vulkan zonalarının təcrübi əsaslarının tədqiqi ilə bağlıdır. Bu növ vulkanların öyrənilməsinin əsas məsələlərindən biri bu strukturlar üçün güclü vibratorla yaradılan elastiki dalğaların yayılma proseslərini təsvir edən adekvat riyazi modellərin qurulmasıdır. Seysmik dalğaların yayılması prosesinin mürəkkəb quruluşlu elastik anizotrop mühitlərdə riyazi modelləşdirilməsi sərhəd və başlanğıc şərtlərə malik yerdəyişmə və gərginlik vəziyyətlərində yazılan elastiklik nəzəriyyəsi tənliklərinin əsasında yerinə yetirilir. Mühitdə yerləşən dalğa mənbəsinin təsiri nəticəsində meydana gələn seysmik qırılmaların hesablanması üçün aşağıdakı başlanğıc və sərhəd şərtlə tənlikləri ödəyən yerdəyişmə

(u,v,w) sürət vektorlarının və gərginlik tenzorunun komponentlərini $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ müəyyən etmək lazımdır [1].

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + F_x \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + F_y \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + F_z \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Fərz edilir ki, $\rho = \rho(x, y, z)$ - sıxlıq və $\vec{F}$ aşağıdakı şəkllə malikdir: $\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

Bu tip məsələlərin həllində sonlu fərqlər üsulundan istifadə etmək daha əlverişlidir. Müxtəlif şəbəkələr üçün sonlu fərq sxeminin ümumi variantı təklif olunmuşdur. Lakin sadəlik xətrinə baxılan işdə fəza dəyişənlərinə görə eyni addımlı varianta baxılmışdır. Bir neçə tənliyin aproksimasiya nümunəsi göstərilmişdir. Qalan tənliklər analoji üsulla alınır [2]:

$$\begin{aligned}& \frac{\rho_{ijk} + \rho_{i-1,jk}}{2} \frac{u_{i-\frac{1}{2},jk}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},jk}^n}{\tau} = \frac{(\sigma_{xxijk}^n - \sigma_{xxi-1,jk}^n)}{\Delta x} + \\& + \frac{\left(\sigma_{xyi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - \sigma_{xyi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n \right)}{\Delta y} + \frac{\left(\sigma_{xzi-\frac{1}{2},jk+\frac{1}{2}}^n - \sigma_{xzi-\frac{1}{2},jk-\frac{1}{2}}^n \right)}{\Delta z}; \\& \frac{(\sigma_{xxijk}^{n+1} - \sigma_{xxijk}^n)}{\tau} = (\lambda + 2\mu)_{ijk} \frac{u_{i+\frac{1}{2},jk}^n - u_{i-\frac{1}{2},jk}^n}{\Delta x} + \lambda_{ijk} \frac{v_{ij+\frac{1}{2},k}^n - v_{ij-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{ijk} \frac{w_{ijk+\frac{1}{2}}^n - w_{ijk-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} + f_{xijk}^n \\
\sigma_{xyi-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k}^{n+1} - \sigma_{xyi-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k}^n &= c66 \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2}jk}^n - u_{i-\frac{1}{2}j-k}^n}{\Delta y} + \frac{v_{ij-\frac{1}{2}k}^n - v_{i-j-\frac{1}{2}k}^n}{\Delta x} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\mu_{ijk}} + \frac{1}{\mu_{i-1jk}} + \frac{1}{\mu_{ij-1k}} + \frac{1}{\mu_{i-1j-1k}} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Nəticədə alınan sxem zamana və fəzaya görə ikinci tərtib aproksimasiya ilə əvəzlənir. Sonlu fərqlər sxeminin ümumi variantı ixtiyari şəbəkə üçün doğrudur, lakin sadəlik üçün bu işdə fəza dəyişənləri üzrə eyni addımlarla olan variantla baxılır.

Ümumi hesablama sxemi aşağıdakı kimidir. Əvvəlcə zamana görə birinci yarımmaddımda yerdəyişmə sürəti vektoru komponentləri müəyyən edilir, sonra isə zamana görə ikinci yarımmaddımda lazımı gərginlik komponentləri düsturlardan tapılır. Sonra isə zamana görə yeni yarımmaddımda yerdəyişmə sürəti vektorunun yeni komponentləri hesablanır.

Ədəbiyyat

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М., Высшая школа, 1976, с.272.
2. Глинский Б.М., Собисевич А.Л., Хайретдинов М.С. Опыт вибросейсмического зондирования сложно построенных геологических структур (примере грязевого вулкана Шуго). // Докл. РАН.-2007. -Т.413, №3. -С.398-402.

$T_0^3(M)$ laylanması üzərində Riman metrikası və Riman rabitəsi

Fəttayev H.D., Kazımova S.F.

Bakı Dövlət Universiteti

Tenzor laylanmalarında Riman metrikalarının tədqiqi aktuallığı ilə seçilən məsələlərdəndir. Toxunan laylanmada Riman metrikası [1] məqaləsində, kotoxunan laylanmada və (0,2) tipli tenzor laylanmasında isə uyğun olaraq, [2] və [3] məqalələrində qurulmuşdur. Təqdim olunan işdə analoji Riman metrikasının (3,0) tipli tenzor laylanmasında təyin olunmasından bəhs edilir.

Tutaq ki, C^∞ sinifindən olan n – ölçülü M Riman çoxobrazlısı verilmişdir, g_{ij} Riman metrik tensor meydanıdır, g^{ij} isə metrik tensor meydanının tərs tensorunun komponentləridir. $T_0^3(M)$ ilə M Riman çoxobrazlısı üzərində (3,0) tipli tenzorların laylanmasını işarə edək: $T_0^3(M) = \bigcup_{Q \in M} T_0^3(Q)$, burada $T_0^3(Q) - Q$ nöqtəsində (3,0) tipli tenzorların xətti fəzasıdır.

$T_0^3(M)$ tenzor laylanmasında aşağıdakı kvadratik formanı təyin edək:

$$G_{IJ} dx^I dx^J = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ap} g_{bq} g_{cr} \delta t^{abc} \delta t^{pqr}, \quad (1)$$

burada $\delta t^{abc} - t^{abc}$ tenzorunun ∇ Riman rabitəsində mütləq diferensialıdır, belə ki,

$$\delta t^{abc} = dt^{abc} + \Gamma_{im}^a t^{mbc} dx^i + \Gamma_{im}^b t^{amc} dx^i + \Gamma_{im}^c t^{abm} dx^i, \quad (2)$$

Γ_{im}^a – Riman rabitəsinin əmsallarıdır. (1) kvadratik formasının dəyişənləri $T_0^3(M)$ tenzor laylanmasının lokal koordinatlarının diferensiallarıdır.

$G_{IJ} dx^I dx^J$ kvadratik formasının aşağıdakı əmsallarını təyin edirik:

$$G_{ij} = g_{ij} + g_{ap} g_{bq} g_{cr} (\Gamma_i^{abc} + \bar{\Gamma}_i^{bac} + \bar{\bar{\Gamma}}_i^{cab}) (\Gamma_j^{pqr} + \bar{\Gamma}_j^{qpr} + \bar{\bar{\Gamma}}_j^{rpq}),$$

$$G_{i\bar{j}} = g_{aj_1} g_{bj_2} g_{cj_3} (\Gamma_i^{abc} + \bar{\Gamma}_i^{bac} + \bar{\bar{\Gamma}}_i^{cab}),$$

$$G_{\bar{i}j} = g_{i_1p} g_{i_2q} g_{i_3r} (\Gamma_j^{pqr} + \bar{\Gamma}_j^{qpr} + \bar{\bar{\Gamma}}_j^{rpq}),$$

$$G_{\bar{i}\bar{j}} = g_{i_1j_1} g_{i_2j_2} g_{i_3j_3},$$

burada $\Gamma_{km}^i t^{mjl} = \Gamma_k^{ijl}$, $\Gamma_{km}^j t^{iml} = \bar{\Gamma}_k^{jil}$, $\Gamma_{km}^l t^{ijm} = \bar{\bar{\Gamma}}_k^{lij}$ işarə olunmuşdur.

Teorem 1 . (1) kvadratik formasının əmsalları

$$\det(G_{IJ}) \neq 0$$

şərtini ödəyirlər.

İsbati. Göstərək ki, (G_{IJ}) matrisi cırlaşmayandır, yəni

$$G_{IJ} G^{JK} = \delta_I^K \quad (3)$$

sisteminin yeganə həlli var, burada δ_I^K – Kroneker simvolları, G^{JK} – tərs matrisin komponentlərini işarə etmək üçün qəbul etdiyimiz simvollarıdır.

(3) sistemini aşağıdakı hallarda tədqiq edək:

- 1) $I = i, K = k$; 3) $I = \bar{i}, K = k$;
 2) $I = i, K = \bar{k}$; 4) $I = \bar{i}, K = \bar{k}$.

1)-ci halda yazıla bilər:

$$G_{ij}G^{jk} + G_{i\bar{j}}G^{\bar{j}k} = \delta_i^k,$$

və ya

$$[g_{ij} + g_{ap}g_{bq}g_{cr}(\Gamma_i^{abc} + \bar{\Gamma}_i^{bac} + \bar{\bar{\Gamma}}_i^{cab})(\Gamma_j^{pqr} + \bar{\Gamma}_j^{qpr} + \bar{\bar{\Gamma}}_j^{rpq})]G^{jk} + \\ + g_{aj}g_{bj_2}g_{cj_3}(\Gamma_i^{abc} + \bar{\Gamma}_i^{bac} + \bar{\bar{\Gamma}}_i^{cab})G^{\bar{j}k} = \delta_i^k.$$

Asanlıqla yoxlanılır ki, bu bərabərlik yalnız və yalnız

$$G^{jk} = g^{jk}, \quad (4)$$

$$G^{\bar{j}k} = g^{\ell k} (-\Gamma_\ell^{j_1j_2j_3} - \bar{\Gamma}_\ell^{j_2j_1j_3} - \bar{\bar{\Gamma}}_\ell^{j_3j_1j_2})$$

şərtləri daxilində doğrudur.

Qeyd edək ki, (4) şərtləri daxilində (3) bərabərliyi 3-cü halda da ödənilir. Doğrudan da,

$$G_{i\bar{j}}G^{JK} = G_{i\bar{j}}G^{jk} + G_{i\bar{j}}G^{\bar{j}k} = g_{i_1p}g_{i_2q}g_{i_3r}(\Gamma_j^{pqr} + \bar{\Gamma}_j^{qpr} + \bar{\bar{\Gamma}}_j^{rpq})g^{jk} + \\ + g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}g_{i_3j_3}g^{\ell k} (-\Gamma_\ell^{j_1j_2j_3} - \bar{\Gamma}_\ell^{j_2j_1j_3} - \bar{\bar{\Gamma}}_\ell^{j_3j_1j_2}) = 0 = \delta_i^k.$$

2)-ci halda (3) sistemi aşağıdakı şəkli alır:

$$G_{ij}G^{j\bar{k}} + G_{i\bar{j}}G^{\bar{j}\bar{k}} = 0$$

və ya

$$[g_{ij} + g_{ap}g_{bq}g_{cr}(\Gamma_i^{abc} + \bar{\Gamma}_i^{bac} + \bar{\bar{\Gamma}}_i^{cab})(\Gamma_j^{pqr} + \bar{\Gamma}_j^{qpr} + \bar{\bar{\Gamma}}_j^{rpq})]G^{j\bar{k}} + \\ + g_{aj}g_{bj_2}g_{cj_3}(\Gamma_i^{abc} + \bar{\Gamma}_i^{bac} + \bar{\bar{\Gamma}}_i^{cab})G^{\bar{j}\bar{k}} = 0.$$

Sonuncu münasibətdən alırıq:

$$G^{j\bar{k}} = g^{mj} (-\Gamma_m^{k_1k_2k_3} - \bar{\Gamma}_m^{k_2k_1k_3} - \bar{\bar{\Gamma}}_m^{k_3k_1k_2}), \quad (5)$$

$$G^{\bar{j}\bar{k}} = (\Gamma_s^{k_1k_2k_3} + \bar{\Gamma}_s^{k_2k_1k_3} + \bar{\bar{\Gamma}}_s^{k_3k_1k_2})(\Gamma_m^{j_1j_2j_3} + \bar{\Gamma}_m^{j_2j_1j_3} + \bar{\bar{\Gamma}}_m^{j_3j_1j_2})g^{ms} + g^{j_1k_1}g^{j_2k_2}g^{j_3k_3}.$$

Asanlıqla yoxlanılır ki, (5) şərtləri daxilində (3) bərabərliyi 4-cü halda da ödənilir:

$$G_{i\bar{j}}G^{J\bar{k}} = G_{i\bar{j}}G^{j\bar{k}} + G_{i\bar{j}}G^{\bar{j}\bar{k}} = g_{i_1p}g_{i_2q}g_{i_3r}(\Gamma_j^{pqr} + \bar{\Gamma}_j^{qpr} + \bar{\bar{\Gamma}}_j^{rpq})g^{mj} \times \\ \times (-\Gamma_m^{k_1k_2k_3} - \bar{\Gamma}_m^{k_2k_1k_3} - \bar{\bar{\Gamma}}_m^{k_3k_1k_2}) + g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}g_{i_3j_3}[(\Gamma_s^{k_1k_2k_3} + \bar{\Gamma}_s^{k_2k_1k_3} + \bar{\bar{\Gamma}}_s^{k_3k_1k_2}) \times \\ \times (\Gamma_m^{j_1j_2j_3} - \bar{\Gamma}_m^{j_2j_1j_3} - \bar{\bar{\Gamma}}_m^{j_3j_1j_2})g^{ms} + g^{j_1k_1}g^{j_2k_2}g^{j_3k_3}] = \delta_{i_1}^{k_1}\delta_{i_2}^{k_2}\delta_{i_3}^{k_3} = \delta_i^{\bar{k}}.$$

Beləliklə, (G_{IJ}) cırlaşmayan matrisdir və tərs matris (4) və (5) komponentlərinə malikdir. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. (1) kvadratik formasının G_{IJ} əmsalları

$$G_{IJ'} = \frac{\partial x^I}{\partial x^{I'}} \frac{\partial x^J}{\partial x^{J'}} G_{IJ}$$

tenzor qanunu ilə dəyişirlər.

Bu teoremlər aşağıdakı nəticəni qeyd etməyə imkan verirlər.

Nəticə. $T_0^3(M)$ tenzor laylanması xətti elementi (1) kvadratik forması ilə təyin olunan Riman çoxoxobrazlısıdır.

G_{IJ} Riman metrikasına uyğun olan Riman rabitəsinin əmsallarını, yəni II növ Kristoffel simvollarını hesablamaq mümkündür. Əgər G_{IJ} Riman metrikasına uyğun olan ${}^G\nabla$ Riman rabitəsinin əmsallarını ${}^G\Gamma_{IJ}^K$ ilə işarə etsək, onda

$${}^G\Gamma_{IJ}^K = \frac{1}{2} G^{KL} (\partial_I G_{LJ} + \partial_J G_{IL} - \partial_L G_{IJ}).$$

Ədəbiyyat

1. Sasaki S. On the differential geometry of the tangent bundle of Riemannian manifolds // Tohoku Math.J., 10 (1958), p.238-254.
2. Sato İ. Complete lifts from a manifold to its cotangent bundle // Kodai Math. Sem.Rep.-1967, v.38, № 3, p.458-468.
3. Фаттаев Г.Д. Риманова метрика в расслоении контравариантных тензоров типа $(2,0)$. Журнал «Знание», № 3 (19), Баку, 2004, с.42-46.

AFİNOR REPERLƏRİNİN LAYLANMA FƏZASI, BU FƏZADA VEKTOR MEYDANININ TAM VƏ HORIZONTAL LİFTLƏRİ

Fəttayev H.D.

Bakı Dövlət Universiteti

Hamar çoxoxobrazlı üzərində qurulan laylanma fəzalarında diferensial-həndəsi strukturların, o cümlədən tenzor meydanlarının tədqiqi aktuallığı ilə seçilən məsələlərdəndir (bax, [1], [2], [3]). [1] məqaləsində bazada verilən müxtəlif növlü tenzor meydanlarının və afın rabitələrin toxunan laylanmada, [2] məqaləsində isə kotoxunan

laylanmada tam liftləri təyin edilmiş, xassələri öyrənilmişdir. [3] məqaləsində isə analogi məsələyə afinor laylanması halında baxılmışdır. Təqdim olunan işdə hamar çoxobrazlı üzərində afinor reperlərinin laylanma fəzasının təyin olunmasından və bu laylanmada vektor meydanının tam və horizontal liftlərinin qurulmasından bəhs edilir.

Tutaq ki, $M - C^\infty$ sinfindən olan n – ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır, $T_1^1(x)$ isə $x \in M$ nöqtəsində afinor $((1,1)$ tipli tenzor) fəzasıdır. x nöqtəsində A_x afinor reperi dedikdə $T_1^1(x)$ afinor fəzasının $(X_1^1, \dots, X_n^1, X_1^n, \dots, X_n^n)$ bazisini başa düşəcəyik. M çoxobrazlısının bütün nöqtələrində bütün afinor reperləri çoxluğunu $L_1^1 M$ ilə işarə edirik. $\pi: L_1^1 M \rightarrow M$ təbii proyeksiyasını isə $A_x \rightarrow x$ şəklində təyin edirik. $L_1^1 M$ çoxluğunda C^∞ sinfindən olan $n + n^4$ – ölçülü diferensiallanan çoxobrazlı strukturunu aşağıdakı şəkildə daxil edirik.

Tutaq ki, (U, x^i) M çoxobrazlısında koordinat sistemidir (lokal xəritədir). $L_1^1 U = \pi^{-1}(U)$ – U çoxluğunun bütün nöqtələrində bütün afinor reperlərini özündə saxlayır. $A_x \in L_1^1 U$ afinor reperinin X_β^α afinoru yeganə qaydada

$$X_\beta^\alpha = X_{\beta i}^{\alpha j} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x \otimes (dx^i)_x$$

şəklində ifadə oluna bilər. Buradan aydın olur ki, $\{L_1^1 U, (x^i, X_{\beta i}^{\alpha j})\}$ $L_1^1 M$ çoxluğunda koordinat sistemidir. Bu koordinat sistemini doğrulmuş koordinat sistemi adlandırırıq.

Tutaq ki, (U, x^i) və $(U', x^{i'})$ M çoxobrazlısında bir-biri ilə

$$x^{i'} = x^i(x^1, \dots, x^n) \quad (1)$$

çevirməsi vasitəsilə əlaqəli olan koordinat sistemləridir. Onda doğrulmuş $\{L_1^1 U, (x^i, X_{\beta i}^{\alpha j})\}$ və $\{L_1^1 U', (x^{i'}, X_{\beta i'}^{\alpha j'})\}$ koordinat sistemləri üçün $L_1^1 U \cap L_1^1 U'$ kəsişməsində

$$\begin{cases} x^{i'} = x^i(x^1, \dots, x^n), \\ X_{\beta i'}^{\alpha j'} = A_j^{i'} A_i^j X_{\beta i}^{\alpha j} \end{cases} \quad (2)$$

çevirmə düsturlarını yazı bilərik, burada $A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ -(1) çevirməsinin tərsi olan $x^i = x^i(x^{i'}, \dots, x^{n'})$ çevirməsinin Yakobi matrisinin elementləridir.

Yuxarıdakı mühakimələr göstərir ki, $L_1 M - n + n^4$ -ölçülü, C^∞ sinfindən olan diferensiallanan çoxobrazlıdır. Nəzərdə tuturuq ki, $I, J, K, \dots$ indeksləri 1 –dən $n + n^4$ -ə qədər dəyişir və $i_{\alpha\beta}$ şəklində olan indeks isə $n + 1$ –dən $n + n^4$ -ə qədər dəyişir. Nəticədə $L_1 M$ laylanması $(x^i, X_{\beta i}^{\alpha j})$ koordinatlarını (X^I) və ya $(x^i x^{i_{\alpha\beta}})$ şəklində də ifadə etmək mümkündür.

(1) çevirməsinə nəzərə almaqla müəyyən edirik ki, $L_1 U \cap L_1 U'$ kəsişməsində bu çevirmənin Yakobi matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$(A_{I'}^I) = \left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I} \right) = \begin{pmatrix} A_i^{i'} & 0 \\ \partial_i (A_j^{j'} A_{i'}^l) X_{\beta l}^{\alpha j} & A_j^{j'} A_i^l \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma \end{pmatrix}.$$

Tutaq ki, M çoxobrazlısı üzərində ixtiyari $V = V^i \partial_i$ vektor meydanı verilmişdir.

Teorem 1. ${}^c V = ({}^c V^i, {}^c V^{i_{\alpha\beta}}) = (V^i, X_{\beta i}^{\alpha m} \partial_m V^j - X_{\beta m}^{\alpha j} \partial_i V^m)$

obyekti $L_1 M$ laylanması vektor qanunu ilə çevrilir.

İsbati. İki hal mümkün hala baxılır.

1) $I' = i'$, bu halda ${}^c V^{I'} = {}^c V^{i'} = V^{i'}$, digər tərəfdən,

$$A_{I'}^{I'} {}^c V^I = A_i^{i'} {}^c V^i + A_{i_{\alpha\beta}}^{i'} {}^c V^{i_{\alpha\beta}} = A_i^{i'} V^i = V^{i'};$$

2) $I' = i'_{\alpha\beta}$, bu halda

$$\begin{aligned} {}^c V^{I'} = {}^c V^{i'_{\alpha\beta}} &= X_{\beta i'}^{\alpha m'} \partial_m V^{j'} - X_{\beta m'}^{\alpha j'} \partial_{i'} V^{m'} = X_{\beta i'}^{\alpha m'} \partial_m A_j^{j'} V^j + \\ &X_{\beta i'}^{\alpha m'} \partial_m V^j A_j^{j'} - X_{\beta m'}^{\alpha j'} \partial_{i'} A_m^{m'} \partial V^m - X_{\beta m'}^{\alpha j'} A_m^{m'} \partial_{i'} V^m = \sum_{k=1}^4 a_k. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} A_{I'}^{I'} {}^c V^I &= A_i^{i_{\alpha\beta}} {}^c V^i + A_{i_{\gamma\sigma}}^{i_{\alpha\beta}} {}^c V^{i_{\gamma\sigma}} = X_{\beta l}^{\alpha j} \partial_i (A_j^j A_{i'}^l) V^{i'} + \\ &+ A_j^{j'} A_i^l \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma X_{\sigma i}^{\gamma m} \partial_m V^j - A_j^{j'} A_i^l \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma X_{\sigma m}^{\gamma j} \partial_i V^m = \sum_{r=1}^4 b_r. \end{aligned}$$

Elementar çevirmələr göstərir ki,

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_3, \quad a_3 = b_4, \quad a_4 = b_2. \quad (3)$$

(3) bərabərliklərindən müəyyən edirik ki,

$${}^cV^{i_{a\beta}} = A_I^{i_{a\beta}} {}^cV^I,$$

bu isə teoremin isbat olunması deməkdir.

cV vektor meydanını V vektor meydanının L_1^1M laylanmasında tam lifti adlandırırıq.

M çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsi verildiyi halda aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 2. ${}^H V = \left({}^H V^i, {}^H V^{i_{a\beta}} \right) = \left(V^i, X_{\beta m}^{cj} \Gamma_{ki}^m V^k - X_{\beta i}^{cm} \Gamma_{km}^j V^k \right)$

obyekti L_1^1M laylanmasında vektor qanunu ilə çevrilir.

${}^H V$ vektor meydanı isə V vektor meydanının L_1^1M laylanmasında horizontal lifti adlandırırıq. Vektor meydanının L_1^1M laylanmasında tam və horizontal liftlərinin xassələri və aralarındakı münasibət də tədqiq olunmuşdur.

Ədəbiyyat

1. Yano K., Kobayashi S. Prolongations of tensor fields and affine connections to the tangent bundles, I. General theory // J. Math. Soc. Japan, 1966, v. 18, № 2, p. 194-210.
2. Yano K., Patterson E. M. Vertical and complete lifts form a manifold to its cotangent bundle // J. Math. Soc. Japan, 1967, v. 19, p. 91-113.
3. Фаттаев Г. Д. О некоторых почти голоморфных тензорных полях в многообразии и его чистом аффинорном подрасслоении // Москва : 1992, 28 с., Деп. в ВИНТИ 25. 09. 92, № 2851-B92.

TƏHSİL PROSESİNDƏ RİYAZİ PROQRAM PAKETLƏRİNİN ÖYRƏDİLMƏSİ

Fətullayeva L.F.

Azərbaycan Müəllimlər İnstitutu

Kompüterin insan fəaliyyətinin bütün sferalarına tətbiqi müxtəlif sahələrdə çalışan ixtisasçılardan hesablama texnikasından istifadə bacarığını tələb edir. Ali məktəblərin «Riyaziyyat və informatika» ixtisaslı fakültələrində oxuyan tələbələr birinci kursdan başlayaraq tədris dövrü ərzində daim kompüterlə təmasda olurlar. Əvvəlcə onlar alqoritmik dil, sonra isə sadə riyazi və fiziki məsələlərin həll proqramlarını tərtib etməyi öyrənirlər. Yuxarı kurslarda tələbələrə kurs və sərbəst işlərin verilməsi, təqribi hesablama üsullarının tədrisi kompüterdən istifadə bacarığının vacibliyini bir daha təsdiq edir. Hesablama texnikası sahəsinin əsas fənlərindən biri də «Hesablama riyaziyyatıdır». O, müxtəlif prosesləri təsvir edən və eyni zamanda analitik üsullarla həlli çətin olan (bəzən mümkün olmayan) riyazi məsələlərin təqribi həll üsullarının (ədədi üsulların) tətbiqini, bu üsulların tədqiqini öyrənir. Ədədi üsulları bir qayda olaraq yüksək ixtisaslı riyaziyyatçılar işləyib hazırlayır və araşdırırlar. Əgər bu üsullardan pedaqoji, qeyri-riyazi sferalarda istifadə olunarsa, onda istifadəçidən üsulun əsas ideyasını, xüsusiyyətlərini və tətbiq sahəsini yaxşı bilmək tələb olunur.

Riyaziyyat, fizika, geologiya, astronomiya və digər təbiət elmlərinin nəzəri problemlərinin həlli zamanı, mühəndis - texnoloji və iqtisadi layihələrin hazırlanması prosesində çox zaman həlli yalnız ədədi üsullarla mümkün olan riyazi məsələlər həll etmək, böyük həcmli hesablamalar aparmaq zərurəti meydana çıxır. Əvvəllər bu tip məsələlərin həlli tədqiqatçıdan ədədi üsulları bilməklə yanaşı, mütləq müəyyən alqoritmik dildə proqramlar tərtib etmək bacarığı tələb edirdi. Bundan əlavə, bir məsələnin həlli üçün saatlar, bəzən də günlər tələb olunurdu. Bu gün isə, hər bir şəxs xüsusi tətbiqi proqramlar - riyazi proqram paketləri vasitəsilə ən mürəkkəb riyazi məsələləri qısa bir müddətdə həll edə bilər.

Riyazi proqram paketlərinin elm və texnikada səmərəli istifadə olunmasına baxmayaraq, bir çox riyaziyyatçı-alimlər onların tədris olunmasının əleyhinə çıxırdılar. Bu cür düşünən tədqiqatçılar iddia edirlər ki, riyazi proqram paketlərində işləməyi bacaran riyaziyyatçı-

tələbələr, həmçinin riyaziyyat müəllimləri qoyulmuş məsələnin həll yolunu, riyazi düsturları unutmuş olarlar. Onlar belə proqramların məhz hesablama xarakterli işlərlə məşğul olan mütəxəssislərin bilməsini və mühəndislər, texniklər, memarlar və s. kimi ixtisasçılar hazırlayan ali məktəblərdə riyazi proqram paketlərinin tədrisini vacib sayırlar. Lakin bu fikir yanlışdır, ona görə ki, bu proqramları tədris edən müəllimlərə ehtiyac vardır. Bunu nəzərə alaraq, ali məktəblərin riyaziyyat və informatika profilli fakültələrində riyazi proqram paketlərini öyrədən fənnin tədris olunması əhəmiyyətlidir.

Hal-hazırda riyazi paketlərin mükəmməl variantlarından biri olan **MathCAD** proqramı elm və təhsildə müvəffəqiyyətlə istifadə olunur. Bu riyazi proqram paketi 1988-ci ildə *Math Soft Inc* firması tərəfindən riyazi məsələləri ədədi üsullarla həll etmək üçün yaradılmışdır. Proqramda məsələnin qoyuluşu ənənəvi riyazi yazılışla - riyaziyyatda qəbul edilmiş işarələrin köməyi ilə təsvir edilir. Baxılan məsələlər analitik və ya ədədi üsullarla həll edilir. *MathCAD Professional* paketi integral sistem olub, özündə hesablama prosessoru ilə yanaşı mətn, düstur, qrafiki redaktorları birləşdirir.

Mathcad-da hesablama əməliyyatı adətən **avtomatik hesablama** rejimində, ədədi və ya analitik-simvolik olaraq həyata keçirilir. Bir sıra tənlikləri, o cümlədən transendent, tərtibi dördüncü dərəcəli olan cəbri tənlikləri analitik həll etmək mümkün deyildir. Buna görə də bu tip tənliklər ədədi üsulla həll olunur. Bu məqsədlə *Mathcad*-da $root(f(x1, x2, K), x1, a, b)$ funksiyası nəzərdə tutulmuşdur, burada $f(x1, x2, K)$ tənliyin sağ tərəfini təyin edən skalyar funksiya, $x1, x2, K$ isə funksiyanın skalyar arqumentləridir. $x1, a, b$ müvafiq olaraq tənliyin kökünün funksiyanın hansı arqumentinə görə axtarıldığını və həllin axtarıldığı parçanı təyin edir. $x1$ - arqumentinə həllin başlanğıc yaxınlaşması üçün qiymət mənimləndirilmişdir. Həllin başlanğıc yaxınlaşması əsasən qrafiki yolla, digər ədədi üsulla təyin edilə bilər. Məsələn, tutaq ki, $x(x - 6)(x + 3)(5 - x) - 17 = 0$ tənliyinin $x=0$ başlanğıc qiymətində və 10^{-3} dəqiqliyi ilə ədədi həllinin tapılması tələb olunur. Məlumdur ki, bu tip tənlikləri analitik həll etmək çox çətindir, lakin *MathCAD* sistemində məsələnin həlli mümkündür. Həllin fraqmenti aşağıda verilmişdir:

Funksiyanın təyin olunması

$$f(x) := x(x - 6) \cdot (x + 3) \cdot (5 - x) - 17$$

Həllin başlangıç qiymətinin daxil edilməsi

$$x := 0$$

$$\text{root}(f(x), x) = -0.188$$

Yuxarıda söylənilən mülahizələri yekunlaşdıraraq, belə bir nəticəyə gəlmək olar:

- riyazi proqram paketlərinin ali məktəblərdə tədrisi vacibdir;
- riyazi proqram paketlərində işləyərkən, mütəxəssis misal həllinə vaxt sərf etməz, deməli, vaxta qənaət etmiş olar;
- həlli analitik yolla mümkün olmayan tənliklər, mürəkkəb riyazi ifadələr və funksiyaları proqramın müvafiq panellərindən istifadə etməklə asanlıqla hesablamaq mümkündür.

Ədəbiyyat

1. А.И.Плис, Н.А.Сливина. MATHCAD 2000, практикум для экономистов и инженеров. –М.: Финансы и статистика. 2000, 656 с.
2. İ.Ə.Qurbanov, A.İ.Qurbanov. Riyazi proqram paketləri. Bakı, 2005.
3. L.F.Fətullayeva. Riyazi məsələlərin proqramlaşdırılması. “Müəllim” nəşriyyatı, 2010.

THE ESTIMATES OF SOLUTIONS FOR DEGENERATED EQUATIONS

Gadjiev T., Hesenova E.

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

In this work a class of degenerated elliptic-parabolic equations of the second order of non-divergent structure is considered. For solutions of boundary problems of there is equations the coersitive estimation in appropriate Sobolev soace is established. Let Ω be a

bounded domain in R^n with a boundary $\partial\Omega, \partial\Omega \in C^2$. Q_T be a cylinder $\Omega \times (0, T)$, where $T \in (0, \infty)$. Let us consider in Q_T the boundary problem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t) U_{i,j} + \psi(x,t) U_{tt} - U_t = f(x,t) \quad (1)$$

$$U|_{\Gamma(Q_T)} = 0 \quad (2)$$

$$U_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}, U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ where } i, j = \overline{1, n}.$$

$$\Gamma(Q_T) = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{t=0\}) \quad (3)$$

is parabolic boundary of Q_T . Here $\psi(x,t)$ some weight function. Assume that for coefficients of the equation following conditions are satisfied. $\|a_{i,j}(x,t)\|$ is a real symmetrical matrix with elements measurable in Q_T for every $(x,t) \in Q_T$ and $\xi \in R^n$ the inequalities are true

$$\gamma |x|^\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} |x|^\alpha |\xi|^2 \quad (4)$$

where γ is constant from a semi interval $(0,1], \alpha \leq n$. In this work is to obtain a coercive estimation for the problem (1)-(2) at every $f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

THE SOLUTIONS NON-LINEAR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Gadjiev T.S., Gasanova G.Sh.

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan
tgadjiev@mail.az*

Let R^{n+1} be an $(n+1)$ -dimensional Euclidian space of points $(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ $Q_T = \Omega \times (0, T)$ be a cylindrical domain in R^{n+1} , where Ω is a bounded n -dimensional domain with the boundary $\partial\Omega$ and $T = (0, \infty)$. Let $Q_0 = \{(x,t) : x \in \Omega, t=0\}$ and

$\Gamma(Q_T) = Q_0 \cup (\partial\Omega \times [0, T])$ be parabolic boundary of Q_T . Consider the following second order degerenated elliptic-parabolic equation in Q_T

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + \Psi(x, t) u_{tt} + c(x, t) u_t = f(x, t) \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma(Q_T)} = 0 \quad (2)$$

In assumption that $(a_{ij}(x, t))$ is a real symmetric matrix where for all $(x, t) \in Q_T$ and any n-dimensional vector ξ the following conditions are fulfilled

$$|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} |\xi|^2 \quad (3)$$

Where $\gamma \in (0, 1]$ -const

$$c(x, t) \leq 0, \quad c(x, t) \in L_{n+1}(Q_T), \quad (4)$$

We determine the function $\Psi(x, t) = \omega(x)\omega(t)\varphi(T-t)$, where $\omega(x)$ nonnegative function satisfy Makenxoupt condition, ω, φ are continuous, non-neagtive and non-decreasing functions of their arguments. In the above mentioned conditions the coercive estimate is proved for strong solvability is proved in the following form.

Theorem. Let the conditions (3)-(4) be fulfilled. Then at $T \leq T_0$ the problem (1)-(2) has a unique strong solition in the space $W_{2,\Psi}^{2,2}(Q_T)$ for any $f(x, t) \in L_2(Q_T)$.

APPROXIMATION OF HYPERSINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH HILBERT KERNEL

Gadjieva Ch.A.

Baku State University

hacizade.chinara@gmail.com

Consider the hypersingular integral

$$\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in T_0, \quad (1)$$

where φ is Lebesgue integrable on T_0 and 2π -periodic function. If we define this integral similar to the Cauchy integral, even if $\varphi \equiv 1$, we get the divergent integral.

Therefore, using the idea of Hadamard (see [1]), we will define the integral (1) as follows:

Definition 1. If a finite limit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{t-\varepsilon}^{t-\varepsilon} \csc^2 \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{t+\pi} \csc^2 \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau - \frac{8\varphi(t)}{\varepsilon} \right)$$

exist, then the value of this limit is referred to as the hypersingular Hilbert integral of the function φ on T_0 , and is denoted by

$$\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau.$$

Theorem 1. If the 2π -periodic function φ is absolutely continuous on T_0 , then the hypersingular Hilbert integral (1) exist for almost all $t \in T_0$, and the equation

$$\int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau = 2 \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} \varphi'(\tau) d\tau$$

holds.

Let $L_2 = L_2(T_0)$ be the space of the functions square-integrable on T_0 with the norm $\|\varphi\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}$, and let

$W_2^1 = W_2^1(T_0)$ be the space of absolutely continuous on T_0 functions, which derivative belongs on the space L_2 , with the norm $\|\varphi\|_{W_2^1} = \|\varphi\|_{L_2} + \|\varphi'\|_{L_2}$.

From the theorem 1 it follows that, the hypersingular integral operator with Hilbert kernel

$$(H\varphi)(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \csc^2 \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in T_0$$

is bounded from the space W_2^1 into the space L_2 , and $\|H\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} = 1$.

Consider the sequence of operators

$$(H_n \varphi)(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \csc^2 \frac{\pi(2k+1)}{2n} \left(\varphi \left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n} \right) - \varphi(t) \right), \quad n \in N.$$

Theorem 2. The operators H_n , $n=1,2,\dots$ is bounded from the space W_2^1 into the space L_2 , $\|H_n\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq 1$, and for any trigonometric polynomial $q(t) = \sum_{k=-n}^n q_k e^{ikt}$ the equation

$$(H_n q)(t) = (Hq)(t)$$

holds.

Suppose that $E_n(\varphi; W_2^1) = \inf_{q \in T_n} \|\varphi(\cdot) - q_n(\cdot)\|_{W_2^1}$ is the best approximation of the function $\varphi \in W_2^1$ by polynomials T_n , where T_n is the set of trigonometric polynomials of the form $\sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikt}$, $\alpha_k \in C$.

Theorem 3. The sequence of operators $\{H_n\}$ strongly converges to the operator H and, for any $\varphi \in W_2^1$, the following estimate holds:

$$\|H\varphi - H_n\varphi\|_{L_2} \leq 2E_n(\varphi; W_2^1).$$

References

1. A.Yu.Anfinogenov, I.K.Lifanov, P.I.Lifanov, On certain one and two dimensional hypersingular integral equations, Sbornik: Mathematics, 192:8 (2001), pp. 1089-1131.

SOLUTION OF HEAT CONDUCTION PROBLEM WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS IN NONHOMOGENOUS MOVING CYLINDER

Gasimov G.R.

Baku State University, Faculty of applied mathematics

Abusutash Z.A.

*Department of Mathematics, Faculty of Science, Damietta
University, Egypt*

Abstract: This paper presents a heat conduction problem with discontinuous boundary conditions in nonhomogeneous moving entire cylinder, which moves on the axis oz with any movement law

$z=S(t)$. Using the method inversion of the unit function $\eta(t-S^{-1}(z))$, method a sequence of integral transformations like Fourier transform with respect to z , Hankel transform with respect to r , Bessel functions theory, general integral transforms theory, a solution in the form of the series is obtained. And in order to illustrate theoretical results in this paper, we wrote special programming in Maple program and for a special cases, where numerical solutions were presented with explained graphics and discussed.

Formulation of the problem: Consider the temperature field of moving cylinder with discontinuous boundary conditions and initially at temperature $\varphi(r, z)$ for entire cylinder, which moves along the z -axis with any movement law. The temperature field is determined in the cylindrical coordinates system linked with motionless cylinder as a system in a single movement. This coordinate system moves from one environment in other environment with different thermophysical descriptions. The formulation of this problem is given as:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) \frac{\partial}{\partial r} T(r, z, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T(r, z, t) - \rho c \frac{\partial}{\partial t} T(r, z, t) &= 0, \\ 0 < r < a, \quad 0 < z < \ell, \quad z = S(t), \quad t > 0 \\ T(r, z, t) &= \varphi(r, z), \quad T(r, z, t) \Big|_{r=0} < \infty, \\ \left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial r} T + \alpha_2 T \right] \Big|_{r=a} &= \begin{cases} f_0(z, t), & \text{if } z < S(t), \\ f_1(z, t), & \text{if } z > S(t), \end{cases} \\ \left[\beta_1 \frac{\partial}{\partial z} T - \beta_2 T \right] \Big|_{z=0} &= -g_0(r, t), \quad \left[\beta_3 \frac{\partial}{\partial z} T + \beta_4 T \right] \Big|_{z=\ell} = g_1(r, t); \end{aligned}$$

$k(r) = k_0 r^m$ ($k_0 - \text{const}, 0 \leq m \leq 1$), $\rho - \text{const}, c - \text{const}$, where $T, k(r), \rho$ and c are the temperature, thermal conductivity, density and specific heat of the cylinder, and $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ are the coefficient of surface heat transfer are constants, and $\varphi(r, z), f_0(z, t), f_1(z, t), g_0(r, t), g_1(r, t)$ are given functions.

Solving Method: The boundary condition is discontinuous, we can write its as follows:

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial r} T + \alpha_2 T \right]_{r=a} = f_1(z, t) - f_2(z, t) \eta(t - S^{-1}(z)) \equiv f(z, t);$$

$S^{-1}(z)$ is inverse function to $z=S(t)$, $f_2(z, t) = f_1(z, t) - f_0(z, t)$.

We choose a solution of this problem in the form:

$$T(r, z, t) = T_0(r, z, t) + T_1(r, t) + T_2(r, t)z,$$

where $T_0(r, z, t)$ satisfies homogeneous boundary conditions. Using boundary conditions we find $T_1(r, t)$ $T_2(r, t)$ and after use integral transform Fourier with respect to z by kernel

$$\tilde{K}_n(z) = \frac{1}{c_n} K_n(z),$$

$$c_n = \int_0^\ell K_n^2(z) dz, \quad K_n(z) = \beta_1 \gamma_n \cos \gamma_n z + \beta_2 \sin \gamma_n z; n = 1, 2, \dots,$$

where $\gamma_n, n = 1, 2, \dots$ - are the roots of $tg \gamma \ell = \frac{\gamma(\beta_1 \beta_4 + \beta_2 \beta_3)}{\gamma^2 \beta_1 \beta_3 - \beta_2 \beta_4}$.

Now we use integral transform Hankel with respect to r by kernel

$$K_\eta^*(r) = \frac{1}{N_\eta} J_\nu \left(\frac{\lambda_\eta}{\beta \sqrt{k_0}} r^\beta \right) r^{(1-m)/2},$$

Where $N_\eta = \int_0^a \left(J_\nu \left(\frac{\lambda_\eta}{\beta \sqrt{k_0}} r^\beta \right) r^{(1-m)/2} \right)^2 dr$, $\nu = (1-m)/(2-m)$ and

$\lambda_\eta, \eta = 1, 2, \dots$ are all real, simple and have an arithmetic numbers and the root of

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{k_0}} \lambda J'_\nu \left(\frac{\lambda}{\beta \sqrt{k_0}} a^\beta \right) + a^{\frac{m}{2}-1} ((1-m) \frac{\alpha_1}{2} + a \alpha_2) J_\nu \left(\frac{\lambda}{\beta \sqrt{k_0}} a^\beta \right) = 0.$$

We find the solution of the received Cauchy's problem relatively t . Using the inverse Hankel transform with respect to r and the inverse Fourier transform with respect to z , we find the relation to $T(r, z, t)$:

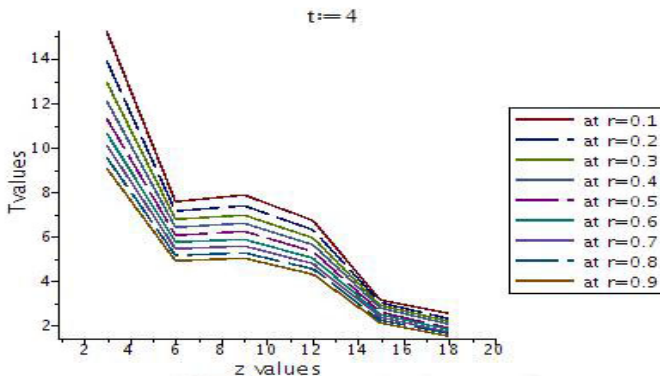
$$T(r, z, t) = T_1(r, t) + z T_2(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_2} \tilde{f}_{0,n}(t) + \sum_{\eta=1}^{\infty} e^{-\mu_{n,\eta}^2 / (\rho c) \cdot t} \times \right.$$

$$\times \left[\tilde{\varphi}_{0,n,\eta}^* + \frac{1}{\rho c} \int_0^t (\tilde{T}_{n,\eta}^*(\tau) - \tilde{F}_{0,n,\eta}(\tau)) e^{\mu_{n,\eta}^2 / (\rho c) \cdot \tau} d\tau \right] \times \\ \times J_\nu \left(\frac{\lambda_\eta}{\beta \sqrt{k_0}} r^\beta \right) r^{(1-m)/2} \} K_n(z).$$

where

$$T_1(r, t) = \frac{1}{\Delta} [g_0(r, t)(\beta_4 \ell + \beta_3) + \beta_1 g_1(r, t)], \\ T_2(r, t) = \frac{1}{\Delta} [\beta_2 g_1(r, t) - \beta_4 g_0(r, t)], \Delta = \beta_1 \beta_4 + \beta_2 (\beta_4 \ell + \beta_3) \neq 0, \\ \tilde{T}_n^*(r, t) = \left[\frac{\partial}{\partial r} (k(r) \frac{\partial}{\partial r} T_1(r, t)) - \rho c \frac{\partial}{\partial t} T_1(r, t) \right] \int_0^\ell \tilde{K}_n(z) dz + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial r} (k(r) \frac{\partial}{\partial r} T_2(r, t)) - \rho c \frac{\partial}{\partial t} T_2(r, t) \right] \int_0^\ell z \tilde{K}_n(z) dz, \\ \tilde{F}_{0,n,\eta}(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left[\rho c \frac{d}{dt} + \gamma_n^2 \right] \tilde{f}_{0,n}(t) \cdot \int_0^a K_\eta^*(r) dr, \\ \tilde{T}_{0,n}(r, t) = \int_0^\ell T_0(r, z, t) \tilde{K}_n(z) dz, \mu_{n,\eta}^2 = (\lambda_\eta^2 + \gamma_n^2), \\ \tilde{T}_{n,\eta}^*(t) = \int_0^a \tilde{T}_n^*(r, t) K_\eta^*(r) dr, \tilde{\varphi}_{0,n,\eta}^* = \int_0^a \tilde{\varphi}_{0,n}^*(r) K_\eta^*(r) dr, \\ \tilde{\varphi}_{0,n}^*(r) = \tilde{\varphi}_n(r) - T_1(r, 0) \int_0^\ell \tilde{K}_n(z) dz - T_2(r, 0) \int_0^\ell z \tilde{K}_n(z) dz.$$

Solution in program Maple 18: On base theoretical results written special programs for calculation and presentation of two and three-dimensional images, including, using the last formula for $T(r, z, t)$ was received graphic representation of the temperature distribution for the nine of inner layers of the cylinder, to consider that the outer surface of cylinder is silver: $a=1$, $\ell=20$ (using the units are c.g.s, caloric, and $^\circ\text{C}$).



References

1. H.S.Carslaw and J.C.Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press, London, England, UK, (1959).
2. V.Y.Lotarev, *Temperature field of finite continuous moving cylinder*, J. New of Tula State University, V.5, N.2, (1999), 82-86.
3. G.R.Gasimov, Z.A.Abusutash, *Heat Conduction Equation in Physically Inhomogeneous Moving Composite Solids*, International Journal of Differential Equations and Applications, AP, LTD, V.14, N.3 (2015), 252-270.

FUZZY TESTING SYSTEM WITH METRIC FUNCTIONS

Gurbanov F.I., Abdullayev V.M.

Baku State University

In process of education as we know the main aim of teaching is effectively, with high quality, and full transfer of own knowledge and skills to the trainee. To increase the quality of teaching one of the main principles is feedback at teaching. Another words, when the new portion of knowledge is transfer it is necessary at this moment to mark and control assimilated knowledge.

There is a lot of variable methods to control the knowledge [1]. At last time it is enough large dissemination obtained method of closed type testing, as method objective graduation of knowledge. One of the most important tasks is to create a test systems which takes into account the uncertainties in the knowledge.

Lets denote as ZO knowledge of trainee, which it is necessary to mark. After application indicated earlier method, knowledge of trainee will be transformed by means of some natural number. Other words, usual method of closed testing (crisp test) is operator, which reflect knowledge to the multitude composed of natural numbers and zero:

$$CT : ZO \rightarrow NU \{0\}, \quad (1)$$

Here N is multitude of all natural numbers. Arise natural question: how much obtained after this testing natural number adequate valuation trainee?

As we know,[2],[3], that examined earlier Crisp testing has some defects. For removal the main defects of this type of testing in work [2] proposed A testing system, which much sufficiently allow to mark knowledge of trainee.

Usual CT system of testing not consider the part of truth that can be included in answer. When for adequate and exact mark of the knowledge it is necessary differ trainees which select absolutely incorrect answers and other one which select partly incorrect answer.

Lets allow that the opinion of trainee distribute the following way. He consider that correct second or third variant of answers. The rest variants throw away. At that by opinion of trainee 51% maybe correct second and 49% third variant of answers. That way choosing the second answer in CT system he will gets zero marks. While other trainee with 100% assurance will choose second variant so as first trainee will get zero. While it is easy to see that theirs understanding and knowledge much differs.

The number π is equal to what?

Variants of answers:

1. 3.14159
2. 3.14159....
3. 4
4. 15
5. 10000

As we know correct answer is second variant. But different between first and second variants less than 10^{-5} . Make some negligible mistake trainee gets zero marks. Lets note that we can built test in which this type of mistakes will be less than 10^{-n} for

each natural n. While other trainee which know nothing about number π choosing fifth variant and gets zero marks too.

In other hand lets allow that trainee omits all other variants left only first two variants. But he is don't know which one of them he have to choose. And he has an opinion that 51% that first variant is correct and 49% that the second variant is correct. That way when he choose first variant trainee again will get zero marks by CT system. Other trainee completely sure that the fifth variant is true will get zero mark too.

The main idea of Fuzzy Testing is to assess variants between with 0-100 values. For the above example consider that, two students named std1 and std2 had answered test.

Correct answer		Student answer			Values of coefficients	
			Std1	Std2		
A	80	A	70	20	A	0,1
B	100	B	100	0	B	0,8
C	20	C	30	10	C	0,07
D	0	D	5	80	D	0,02
E	0	E	0	100	E	0,01

Use following marks:

Variants - V

Student Answer - S_i ($1 < i < 5$),

Correct answer - C_i ($1 < i < 5$),

Coefficient - α_i , ($0 < \alpha_i < 1$), $i=1..5$, $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1$

Use following formulae in order to appreciate the compliance between the correct answer and student answer.

$$y = \sum_{i=1}^5 \alpha_i |C_i - S_i|, \quad (0 < \alpha_i < 1), \quad \sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1, \quad 0 < C_i, S_i < 100$$

It is clear that, $0 < \sum_{i=1}^5 \alpha_i |C_i - S_i| < 100$ and formula

$y = \sum_{i=1}^5 \alpha_i |C_i - S_i|$ is define discrepancy between the correct answer and student answer. Then

$$y = 100 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i |C_i - S_i|$$

is define compliance between the correct answer and student answer. In other words fomula

$$y = 100 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i |C_i - S_i|$$

gives a value between 0-100.

i	V	α_i	C_i	S_i	$ C_i - S_{i1} $	$\alpha_i C_i - S_{i1} $
1	A	0,1	80	70	10	1
2	B	0,8	100	100	0	0
3	C	0,07	20	30	10	0,7
4	D	0,02	0	5	5	0,1
5	E	0,01	0	0	0	0
Σ		1			25	1,8

i	V	α_i	C_i	S_{i2}	$ C_i - S_{i2} $	$\alpha_i C_i - S_{i2} $
1	A	0,1	80	20	60	6
2	B	0,8	100	0	100	80
3	C	0,07	20	10	10	0,7
4	D	0,02	0	80	80	1.6
5	E	0,01	0	100	100	1
Σ		1			350	89.3

It seems that std1 closed to the correct answer and his score is $100 - 1,8 = 98,2$ and std2's answer is very differ from the correct answer and his score is $100 - 89,3 = 10,7$.

Shown earlier examples in general demonstrate all the main weak sides of usual system. Especially easily seen unsteadiness of such systems. By means of them it is impossible with high exactness, mark knowledge. Those are gives only rude mark.

Thus, the proposed testing model permits a more adequate estimation of the student's knowledge and provides a basis for the creation of various test systems, high quality. This numbers are very easy to control by sight by means of parameters. For work with numbers of that type is prepared software environment.

References

[1] Q.A.Atanov, N.N.Pustinnikova «Education and artificial intelligence or modern didactic basis of high school ». Donetsk 2002.

[2] F.I.Gurbanov «Adequate testing and knowledge estimation by means of metric functions». Proceedings of II Republican scientific conference «Modern informatization, cybernetics and data pins technologies problems». Baku 2004.

[3] F.I.Gurbanov «F testing and application of metric function in fuzzy numbers area to trainees knowledge assignments». Journal of Gauges university p.137. Baku 2004.

QRUNT SULARININ SƏVIYYƏ DƏYİŞMƏLƏRİNİN MODELLƏŞDİRİLMƏSİNDƏ KƏSR TƏRTİBLİ TÖRƏMƏLƏRİN TƏTBİQİ

Həsənov A.B., Həsənova Ş.A.

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu

mexanik5758@rambler.ru

Respublikanın suvarılan torpaqları əsasən arid zonada yerləşdiyindən yüksək və sabit kənd təsərrüfatı məhsulları əldə etmək üçün meliorasiya və irriqasiya tədbirlərinin daim aparılması tələb olunur. Müxtəlif səbəblərdən qrunut sularının səviyyəsinin yer səthinə yaxınlaşması torpaqların şorlaşması və bataqlıqlaşması ilə nəticələnir. Yeraltı sularının səviyyəsinin lazımi həddə saxlanılması, izafi suların sahələrdən uzaqlaşdırılması variantlarının seçilməsi, optimal meliorativ rejim vasitəsilə əkinə yararlı torpaqların münbitliyinin idarə olunması üçün bu suların səviyyə variasiyalarının riyazi modelinin yaradılması olduqca zəruridir.

Qrunut sularının səviyyəsinin lazım olan həddə saxlanması meliorativ şəraitin əlverişliliyini təmin etmək üçün əsas vasitələrdən biridir. Səviyyənin idarə olunması drenaj sistemi vasitəsilə yerinə yetirilə bilər. Qrunut sularının səviyyəsinin dəyişməsi tənliyi aşağıdakı şəkildə yazılır [1]:

$$\delta \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + W$$

Burada δ , k , k_0 , M_0 , $H \approx const$,

Sərbəst səthdə $y = H_0$ olduqda $h(x, H_0, t) = f(x, t)$ olur.

$y = 0$; olduqda $h'(x, 0, t) = 0$, (sukeçirməzlik şərti) nəzərə alınır.

$h(x, y, t)$ və $W(x, y, t)$ funksiyaları hər hansı ε kiçik parametrinə nəzərən qüvvət funksiyası şəklində götürülür.

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot h_k(x, y, t)$$

$$W(x, Y, t) = W_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot W_k(x, y, t)$$

Bu ifadələri tənlikdə nəzərə alsaq və ε - nin eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirsək, aşağıdakı differensial tənliklər sistemini alarıq.

$$\delta \frac{\partial h_0(t)}{\partial t} + \frac{k_0}{M_0} \cdot h_0(t) = W_0$$

$$\partial \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} \right) = k \cdot h_0(t) \cdot \Delta h_1 - \frac{k_0}{M_0} \cdot h_1 - W_1$$

.....

Bu halda birincidən başqa hər bir tənlik dəyişən əmsallı xətti tənliklərdir. Birinci tənlik isə birinci tərtib qeyri-bircins adi differensial tənlikdir. Onun həlli:

$$h_0(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t W_0(\tau) \cdot e^{-a(t-\tau)} d\tau$$

$$a = \frac{k_0}{\delta \cdot M_0}, \quad C = h_0 + \Delta + \frac{W_0(0)}{a}$$

$W_0(0) = W(x, y, t) \quad t = 0$ olduqda infultrasiyanın başlanğıc qiymətidir, tənliyi həll edərək tapırıq:

$$h_1(x, y, t) = \ln \frac{t - \tau}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 + y^2}{k \cdot k! \cdot 4a} \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{t} \right)$$

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \varepsilon \cdot h_1(x, y, t) + \dots$$

Torpaq-qrunut qatının stoxastik qeyri-bircinsliyini, məsaməli mühitlərin fraktal xarakterini nəzərə alsaq və kəsir tərtibli differensiallama üçün məlum ifadələrdən [1-3] istifadə etsək alarıq:

$$D_{0t}^{\alpha} \varphi = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(t), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{0t}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Onda

$$h_t = \kappa \Gamma(1-\alpha) D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial h(x, y, \tau)}{\partial \tau},$$

Burada $D_{0t}^{\alpha-1}$ - kəsir tərtibli differensiallama operatorudur.

M. Kaputo məna da [3] kəsir tərtibli differensiallama operatorundan istifadə etsək:

$$\partial_{0t}^{\alpha} h(x, y, t) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial h(x, y, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

və ifadələri müqayisə etsək

$$h_t = \kappa \Gamma(1-\alpha) \partial_{0t}^{\alpha} h(x, y, t),$$

və ya

$$\kappa \Gamma(1-\alpha) \partial_{0t}^{\alpha} (mh(x, y, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{kd_0} K + f_0,$$

olduğunu tapırıq. Bu tənlik zamana görə kəsir tərtibli ümumiləşmiş Bussinesk tənliyi adlanır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \partial_{0t}^{\alpha} h(x, y, t) = \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial t}.$$

Ona görə də aşağıdakı halda bu tənlik klassik Bussinesk tənliyinə çevrilir:

$$\kappa = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \text{ « } \alpha \rightarrow 1.$$

olduqda

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t),$$

olduğunu alırıq. Daha əlverişli formada

$$\frac{\partial (mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{kd_0} K + f_0,$$

$$f_0 = -\frac{k_0}{d_0} (h_0 - H_0) + w,$$

olduğunu tapırıq. Bu qeyri-xətti tənliyin fiziki mülahizələri nəzərə almaqla xəttiləşdirilmiş həll üsulu yuxarıda verilmişdir.

Fraktal strukturluğun nəzərə alınması halında qrun t suyunun səviyyə variasiyalarının tədqiqi üçün yeni ifadə alırıq:

$$h_t = \kappa \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial h(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

Burada

$$a = \frac{kh_{cp}}{m}, \quad f = \frac{f_0}{m} - \frac{k_0 h_{cp}}{md_0}.$$

Ədəbiyyat

- 1) Полубаринова - Кочина П.Я. и др. Математические методы в вопросах орошения . М . Наука , 1969, 414 с
- 2) Сербина Л. Н. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах . М. Наука . 2007 , 167 с
- 3) Самко С.Г. , Килбас А.А. , Маричев О . И . Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения . Минск. Наука и техника, 1987 , 687 с

GECİKƏN ARQUMENTLİ SİSTEM ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏNİN VARLIĞI

Həsənov K.Q. Hüseynova T.E.

Bakı Dövlət Universiteti

Tutaq ki, idarəolunan proses gecikən arqumentli

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)), u(t)) \quad (1)$$

sisteminin

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau(t_0), t_0] \quad (2)$$

şərtini ödəyən həlli ilə təsvir olunur, burada n ölçülü $f(t, x, y, u)$ vektor-funksiyası $G = \{t_0 \leq t \leq t_1, -\infty < x, y < \infty, u \in \Omega\}$ çoxluğunda, $\tau(t)$ isə $[t_0, t_1]$ parçasında kəsilməzdir və $\tau(t) \geq 0$ şərti ödənilir.

Tutaq ki, $\Omega \subset R^r$ - məhdud, qapalı çoxluqdur. Mümkün idarəedici $u(t)$ funksiyası olaraq $[t_0, t_1]$ parçasında ölçülən və qiymətləri Ω çoxluğuna daxil olan funksiyalar götürülür.

Tutaq ki, $u(t) \in \Omega$, $t \in [t_0, t_1]$ idarəedici funksiya, $x(t)$ isə (1), (2) məsələsinin $u(t)$ funksiyasına uyğun həllidir. Onda

$(u(t), x(t))$ cütü mümkün proses adlanır. (1), (2) məsələsinin mümkün $(u(t), x(t))$ prosesləri üçün

$$J(u) = \Phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (3)$$

funksiyasına baxaq. Burada $\Phi(x), f_0(t, x, y, u)$ funksiyaları $x \in (-\infty, \infty)$ və G çoxluğunda təyin olunmuş funksiyalardır.

Məsələ elə mümkün $(u^0(t), x^0(t))$ prosesi tapmaq tələb olunur ki, bu proses (3) funksionalına minimum versin.

İşdə aşağıdakı teoremlər isbat olunur.

Teorem 1. Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

- 1) $f(t, x, y, u)$ funksiyası G çoxluğunda öz arqumentlərinə nəzərən kəsilməzdir və x, y arqumentlərinə nəzərən Lipşist şərtini ödəyir:

$$\|f(t, x, y, u) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, u)\| \leq L_1 (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|), \quad (4)$$

- 2) $\tau(t)$ funksiyası $[t_0, t_1]$ parçasında kəsilməzdir və $\tau(t) \geq 0$,
- 3) $\varphi_0(t)$ vektor – funksiyası E_{t_0} çoxluğunda kəsilməzdir,

Onda hər bir $u(t) \in \Omega, t \in [t_0, t_1]$ idarəedici funksiya üçün (1) sisteminin (2) başlanğıc şərti ödəyən yeganə $x(t), t \in [t_0, t_1]$ həlli var.

Teorem 2. Tutaq ki,

1. Teorem 1-in bütün şərtləri ödənilir,
2. İstənilən x, y üçün $R(t, x, y) = \{Z, Z = (t, x, y, u), u \in \Omega\}$ çoxluğu qabarıq və qapalıdır.
3. $\Phi(x)$ funksiyası $x \in (-\infty, +\infty)$ kəsilməzdir və aşağıdan məhduddur,
4. $J(u)$ funksionalı aşağıdan zəif yarım kəsilməzdir. Onda (1),(2),(3) optimal idarəetmə məsələsində optimal $(u^0(t), x^0(t))$ prosesi var.

Ədəbiyyat

1. Беллман Р.Э., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М: Наука, 1967.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов, М: Наука, 1971.
3. Əhmədov Q.T., Həsənov K.Q., Yaqubov M.H. Adi diferensial tənliklər. Bakı: Maarif, 2015.

SİNGULAR POTENSİALLI BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİALLAMA OPERATORU ÜÇÜN PARÇADA MƏXSUSİ QIYMƏTLƏR MƏSƏLƏSİ

Heydərov A.H., Həbibov Ş.Ə.

Lənkəran Dövlət Universiteti

İşdə $[0,1]$ parçasında singular potensiallı birtərtibli diferensiallama operatoru üçün aşağıdakı məxsusi qiymətlər məsələsi tədqiq edilmişdir:

$$y'(x) + \alpha \delta(x - x_0) \cdot y(x) = \lambda y(x), \quad (1)$$

$$(2 + \alpha)y(x_0 + 0) = (2 - \alpha)y(x_0 - 0), \quad (2)$$

$$y'(0) = \lambda y(1). \quad (3)$$

Burada $\delta(x - x_0)$ – Dirak funksiyasıdır, $x_0 \in (0,1)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – spektral parametrdir. $\delta(x - x_0) \cdot y(x)$ hasilı aşağıdakı düstur ilə təyin edilir:

$$\delta(x - x_0) \cdot y(x) = \frac{1}{2} [y(x_0 + 0) + y(x_0 - 0)] \delta(x - x_0).$$

Tərif. Tutaq ki, müəyyən $\lambda \in \mathbb{C}$ ədədi üçün sıfırdan fərqli $y(x) \in W_2^1((0,1) \setminus \{x_0\})$ funksiyası var ki, $y(x)$ funksiyası (1) tənliyini ümumiləşmiş funksiyalar mənasında ödəyir və (2), (3) şərtləri ödənilir. Onda λ ədədi (1) - (3) məsələsinin məxsusi qiyməti adlanır. Bu halda $y(x)$ funksiyasına λ məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi funksiyası deyilir.

Teorem. Əgər $\alpha \neq \pm 2$ olarsa, onda (1)-(3) məxsusi qiymətlər məsələsinin sonsuz sayda sadə məxsusi qiymətləri var:

$$\lambda = 0, \lambda_n = \ell n \left| \frac{\alpha + 2}{\alpha - 2} \right| + i(\varphi + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \varphi = \arg \frac{\alpha + 2}{\alpha - 2} \quad \lambda = 0$$

məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi funksiyalar aşağıdakı kimi olur:

$$y(x) = \begin{cases} C, & 0 \leq x < x_0, \\ \frac{2-\alpha}{2+\alpha} C, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$\lambda_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi funksiyalar

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{\lambda_n x}, & 0 \leq x < x_0, \\ Ce^{\lambda_n (x-1)}, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

şəklindədir, burada $C \neq 0$ ixtiyari sabitdir.

Əgər $\alpha = 2$ və ya $\alpha = -2$ olarsa, onda (1), (3) məsələsinin yalnız bir sadə məxsusi qiyməti var: $\lambda = 0$. Bu halda $\alpha = 2$ olduqda $\lambda = 0$ məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi funksiyalar aşağıdakı kimidir:

$$y(x) = \begin{cases} C, & 0 \leq x < x_0, \\ 0, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$\alpha = -2$ olduqda isə

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0, \\ C, & x_0 < x \leq 1, \end{cases}$$

burada $C \neq 0$ ixtiyari sabitdir.

YARIMOXDA SƏPİLMƏ OPERATORUNUN FAKTORİZASIYA XASSƏLƏRİ İsgəndərov N.Ş., Cəfərova L.N *Bakı Dövlət Universiteti*

Yarımoxda aşağıdakı birtərtibli

$$\frac{\partial U_k(x, t)}{\partial t} - \xi_k \frac{\partial U_k(x, t)}{\partial x} = \sum_{j=1}^n c_{kj}(x, t) U_j(x, t),$$

$$k = \overline{1, n}, x \geq 0, -\infty < t < +\infty, \xi_1 > \dots > \xi_{n-3} > 0 > \xi_{n-2} > \xi_{n-1} > \xi_n;$$

hiperbolik tənliklər sisteminə baxaq; burada $\|c_{kj}(x, t)\|_{k,j=1}^n$ -matris funksiyası ölçülən, kompleksqiymətli, diaqonalı sıfır olan və müəyyən azalma şərtinə malikdir.

$$|c_{kj}(x, t)| \leq c(1 + |x|)^{-1-\varepsilon} (1 + |t|)^{-1-\varepsilon},$$

$$c > 0, \varepsilon > 0, c, \varepsilon = \text{const}, k, j = \overline{1, n}$$

$n-2$ məsələyə birlikdə baxıldıqda gələn $(a_1(t), \dots, a_{n-3}(t))^T$ dalğalarını

$$U_j^k(x, t) = a_j(t + \xi_j x) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad j = \overline{1, n-3}, k = \overline{1, n-2},$$

$$a_k(t) \in L_\infty(R), \quad R = (-\infty, +\infty)$$

səpilən $(b_{n-2}(t), b_{n-1}(t), b_n(t))^T$ dalğalarına

$$U_j^k(x, t) = b_j(t + \xi_j x) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad j = n-2, n-1, n; k = \overline{1, n-2},$$

$$b_j(t) \in L_\infty(R)$$

çevirən $S = (S^1, \dots, S^{n-2})$ operatoru [1] aşağıdakı faktorizasiya xassələrinə malikdir:

$$(\dot{I} + P_1)S_{1,1}^k + \dots + (\dot{I} + P_{n-4})S_{n-4,1}^k + S_{n-3,1}^k = (\dot{I} + R_+)^{-1}(\dot{I} + R_-),$$

$$(\dot{I} + P_1)S_{1,2}^k + \dots + (\dot{I} + P_{n-4})S_{n-4,2}^k + S_{n-3,2}^k = (\dot{I} + R_+)^{-1}(\dot{I} + Q),$$

$$S_{1,n-4}^{n-2} - S_{1,n-4}^j = A_{j+}^k, \quad k = \overline{1, n-2}, j = \overline{1, n-4}$$

$$S_{1,n-4}^{n-2} - S_{1,n-4}^j = I + A_+, \quad j = \overline{1, n-3},$$

burada P_k operatorları S operatorunun elementləri ilə ifadə edilir.

Ədəbiyyat

1. İsgəndərov N.Ş., Cəfərova L.N., Yarımoxda üç səpilən dalğa halında səpilmə məsələsi. Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı 2015, səh. 43-44.

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB YARIMXƏTTİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSIAL TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN KLASSİK HƏLLİNİN VARLIĞI

İsmayilov A.İ.

Bakı Dövlət Univesiteti

İşdə aşağıdakı birölçülü tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlığı məsələsi tədqiq olunmuşdur:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{txx}(t,x) = a(t)b(x)u(t,x) + c(t)d(x) + \\ + f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_t,u_{tx},a(t),c(t)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_x(t,0) = g_1(t) \quad (0 \leq t \leq T), u_x(t,1) = g_2(t) \quad (0 \leq t \leq T), \end{cases} \quad (4)$$

harada ki, $0 < T < +\infty$; $b, d, f, \varphi, \psi, g_i$ ($i=1,2$) - verilmiş funksiyalar, $u(t,x)$, $a(t)$ və $c(t)$ isə axtarılan funksiyalardır.

Tərif. (1)-(4) məsələsinin klassik həlli dedikdə aşağıdakı şərtləri ödəyən $\{u(x,t), a(t), c(t)\}$ funksiyalar üçlüyünü başa düşəcəyik:

a) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x), u_{ttx}(t,x),$

$u_{tt}(t,x) \in C([0,T] \times [0,1]);$

b) $a(t), b(t) \in C([0,T]);$

v) (1)-(4) şərtlərinin hamısı adi klassik mənada ödənilirlər.

Məsələnin verilənləri üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla Furiye üsulunu tətbiq edək. $\{u(x,t), a(t), c(t)\}$ klassik həllinin birinci komponentini

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k\pi x \quad (5)$$

şəklində axtaracağıq, burada $u_k(t)$ ($k=1,2,\dots$) funksiyaları hələlilik naməlum funksiyalardır. (5) münasibətini (1)-də yazsaq, (2) şərtlərindən istifadə etməklə $u_k(t)$ funksiyalarını aşağıdakı kimi taparıq:

$$u_k(t) = \varphi_k + \frac{\psi_k}{(k\pi)^2} (1 - e^{-(k\pi)^2 t}) + \frac{2}{(k\pi)^2} \int_0^t \int_0^1 F(u(\tau, x), a(\tau), c(\tau)) \times \\ \times [1 - e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)}] \sin k\pi x dx d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

harada ki,

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin k\pi x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin k\pi x dx, \\ F(u(t, x), a(t), c(t)) \equiv a(t)b(x)u + c(t)d(x) + \\ + f(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_t, u_{tx}, a(t), c(t)). \quad (7)$$

Aydındır ki, (6) sistemini bir tənlik şəklində yazıa bilərik:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{(k\pi)^2} (1 - e^{-(k\pi)^2 t}) \sin k\pi x + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} \int_0^t \int_0^1 F(u(\tau, x), a(\tau), c(\tau)) \times \\ \times [1 - e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)}] \sin k\pi x dx d\tau \sin k\pi x. \quad (8)$$

Daha sonra, həllin qalan iki $a(t)$ və $c(t)$ komponentlərini tapmaq üçün (8) münasibətini (4) əlavə şərtində yerinə yazırıq və alınan bərabərlikləri formal olaraq t -yə görə iki dəfə diferensiallayaraq alırıq:

$$a(t) = d(1)\Delta^{-1}(t) \left[g_1''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^3 \psi_k e^{-(k\pi)^2 t} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k\pi)^3 \int_0^t \int_0^1 F(u(\tau, x), a(\tau), c(\tau)) e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)} \sin k\pi x dx d\tau \right] - \\ - d(0)\Delta^{-1}(t) \left[g_2''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k\pi)^3 e^{-(k\pi)^2 t} \psi_k - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^k (k\pi)^3 \int_0^t \int_0^1 F(u(\tau, x), a(\tau), c(\tau)) \times \right. \\ \left. \times e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)} \sin k\pi x dx d\tau \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
c(t) = & b(0)g_1(t)\Delta^{-1}(t) \left[g_2''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k\pi)^3 \psi_k e^{-(k\pi)^2 t} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=1} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^k (k\pi)^3 \int_0^t \int_0^1 F(u(\tau, x), a(\tau), c(\tau)) e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)} \sin k\pi x dx d\tau \Big] - \\
& - b(1)g_2(t)\Delta^{-1}(t) \left[g_1''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^3 e^{-(k\pi)^2 t} \psi_k - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k\pi)^3 \int_0^t \int_0^1 F(u(\tau, x), a(\tau), c(\tau)) e^{-(k\pi)^2 (t-\tau)} \sin k\pi x dx d\tau \Big], \quad (10)
\end{aligned}$$

harada ki,

$$\Delta(t) \equiv \begin{vmatrix} b(0)g_1(t) & d(0) \\ b(1)g_2(t) & d(1) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} & \equiv f_x(t, 0, 0, g_1(t), 0, 0, g_1'(t), a(t), c(t)) + \\
& + f_{u_1}(t, 0, 0, g_1(t), 0, 0, g_1'(t), a(t), c(t))g_1(t) + \\
& + f_{u_4}(t, 0, 0, g_1(t), 0, 0, g_1'(t), a(t), c(t))g_1'(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=1} & \equiv f_x(t, 1, 0, g_2(t), 0, 0, g_2'(t), a(t), c(t)) + \\
& + f_{u_1}(t, 1, 0, g_2(t), 0, 0, g_2'(t), a(t), c(t))g_2(t) + \\
& + f_{u_4}(t, 1, 0, g_2(t), 0, 0, g_2'(t), a(t), c(t))g_2'(t),
\end{aligned}$$

$$x = u_0, u = u_1, u_x = u_2, u_{xx} = u_3, u_t = u_4, u_{tx} = u_5.$$

(9), (10) ifadələrini alarkən biz fərz emişik ki,

$$f_{u_3} \Big|_{x=0} = f_{u_3} \Big|_{x=1} = 0.$$

Beləliklə, (1)-(4) məsələsinin klassik həllinin axtarılması naməlum $u(t, x), a(t)$ və $c(t)$ funksiyalarına nəzərən (8), (9), (10) qyri-xətti integro-diferensial tənliklər sisteminə gətirildi. Alınan tənliklər sistemini bir operator tənlik şəklində yazı bilərik:

$$Z = Pz, \quad P = (P_1, P_2, P_3), \quad z = (u, a, c). \quad (12)$$

P operatorunun $P_i(z)$ ($i=1, 2, 3$) komponentləri (8), (9), (10) tənliklərinin sağ tərəfləri ilə təyin olunurlar.

Daha sonra, tərpənməz nöqtə haqqında sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə (12) operator tənliyinin varlığı haqqında teorem isbat olunur [1].

Ədəbiyyat

1. Худавердиев К.И., Исмаилов А.И. О классической разрешимости в малом одномерной обратной краевой задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 1998, №1, с.98-115.

THE INFLUENCE OF RELAXATION AND HYDRODYNAMIC PARAMETERS ON OIL OUTPUT IN A SCHISTOSE STRATA

Jalilova R.Q.

Bakı Dövlət Ünivesiteti

1.Introduction. In the development of oil and gas fields as well as in numerous studies the problems of underground productive formations, there necessity reliability of the analysis, come into force the laws of Newtonian filtration, emerging non-equilibrium effects caused.

2. Formulation of the problem. The article investigates the influence of the relaxation time on the oil output curve in schistose strata consisting of structures of the same porosity, but with a substantially different permeability-overlying, high-power low-permeability layer (H) and an underlying layer of high permeability low power (h) The mathematical model can be represented

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[a_i(P) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[a_i(P) \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} \right) \right], D: &\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq M \\ -h \leq y \leq N \end{array} \right\} i = \overline{1,2} \\ a_i(P) &= \frac{k_i(P) \tilde{h}_i}{\mu_i(P)}, \tilde{h}_i = \begin{cases} h, i = 1 \\ H, i = 2 \end{cases}, \int_{-h}^0 a_1(P) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = Q \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, y > 0 \quad a_2(P) \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=+o} = a_2(P) \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=-0}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x=o} = 0 \quad P(x, y, o) = P_0; \quad \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{t=o} = 0$$

where k, μ_i – permeability and viscosity of i phases ($i = \overline{1,2}$)

3.Method of decision. The approach consists of the synthesis of group-theoretical and numerical analysis, allowing in the framework of group-theoretic methods based on the apparatus of the theory of Lie groups, to create a course difference analog of the original problem and arrange a computational experiment. Research has shown [1], the synthesis of the group analysis of differential equations with computational experiments enables targeted control the results of the calculations and make reliable conclusions regarding the effect of relaxation and hydrodynamic parameters on the process under study, in particular, the oil recovery. For the above tasks by using the theory of Lie allocated classes of relaxation functions $\lambda_i(t)$ ($i = \overline{1,2}$) and found their analytical representation (pp.140-142), and theoretically studied the effect of hydrodynamic parameters of the effective hydraulic conductivity coefficient on the depletion of reservoirs [2]. Computer experiment was organized as part of the analytical results obtained. For this purpose, the original problem with the true (based on the integral-interpolitsional method) approximation has been brought to its finite-difference analogue: where

$$\begin{aligned} A_j P_{j-1}^{n+1} - C_j P_j^{n+1} + B_j P_{j+1}^{n+1} &= F_j \\ \overline{A_m} \overline{P}_{m-1}^{n+1} - \overline{C_m} \overline{P}_m^{n+1} + \overline{B_m} \overline{P}_{m+1}^{n+1} &= \overline{F_m} \quad A_j = P_j^{m_1} \tau^2 (1 + \tau^{s_2-1}) + S_1 \tau^{S_1} \\ C_j &= \tau l_1^2 + P_j^{m_1} \tau^2 (2 + m_1 P_{j+1} / P_j - m_1 + 2\tau^{s_2-1}) + 2s_1 \tau^{S_1} \\ B_j &= P_j^{m_1} \tau^2 (1 + m_1 P_{j+1} / P_j - m_1 + \tau^{s_2-1}) + \tau^{S_1} (S_1 + l_1^2) \\ \overline{A_m} &= s_1 \tau^{S_2} + \overline{P}_m^{m_2} \tau^2 (1 + \tau^{s_2-1}) \\ \overline{C_m} &= \tau l_2^2 + \overline{P}_m^{m_2} \tau^2 (2 + m_2 \overline{P}_{m+1} / \overline{P}_m - m_2 + 2\tau^{s_2-1}) + 2s_1 \tau^{S_1} + \overline{P}_m^{m_2} \tau^2 l_1 / H \\ \overline{B_m} &= \overline{P}_m^{m_2} \tau^2 (1 + m_2 \overline{P}_{m+1} / \overline{P}_m - m_2 + \tau^{s_2-1}) + \tau^{S_1} (S_1 + l_2^2) + \overline{P}_m^{m_2} \tau^2 l_1 / H \\ F_j &= P_{j-1}^2 \tau (1 + 2\tau^{s_1-1}) + (P_{j+1} - 2P_j + P_{j-1}) (P_j^{m_1} \tau^{S_2+1} - s_1 \tau^{S_1}) - l_2^2 \tau^{S_1} P_j^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{F}_m &= \overline{P}_m l_1^2 \tau (1 + 2\tau^{S_1-1}) + (\overline{P}_{m+1} - 2\overline{P}_m + \overline{P}_{m-1}) \left(\overline{P}_m^{m_1} \tau^{S_2+1} - s_1 \tau^{s_1} \right) - l_2^2 \tau^{S_1} P_m^{n-1} \\ \overline{P} &= \int_{-h}^0 \frac{1}{h} P dy; P_j = P_j^n; \overline{P}_m = \overline{P}_m^n; \frac{P^1 - P_0}{\tau} = 0; \overline{P}_m^1 = \overline{P}_m^0 = P_0; P_j^1 = P_j^0 = P_0 \\ \frac{P_N^n - P_{N-1}^n}{l_1} &= 0; \frac{P_M^n - P_{M-1}^n}{l_2} = 0; P_0^{m_1} \frac{\overline{P}_1^n - \overline{P}_0^n}{l_2} = Q\end{aligned}$$

where τ -time step, n-Room sacrificial layer, l_1, l_2 - a step in the space variables, s_1, s_2, m_1, m_2 -performance analytical concepts for the variable relaxation and effective hydraulic conductivity, respectively.

4. Conclusions. In the computational experiments by varying certain parameters have been solved a large number of options. The calculations showed that the difference between elastic and relaxation is observed at the beginning of the process of restoration of pressure in layered strata with the above characteristics. The process of restoring the pressure in the elastic mode is much faster than the relaxation process, and the more the relaxation parameter, the slower the process. Thus, the results show the need to consider the relaxation factor and, in general, non-equilibrium effects in the design of the development of productive oil and gas fields with different technologies or the intensification of the impact of secondary or tertiary methods. The developed method of synthesis of the ideas and the approach of the group analysis of differential equations and numerical analysis to the subsequent organization of the computational experiment identifies promising opportunities and provides the most reliable explore the numerous nonlinear phenomena, and including the effect of non-equilibrium system performance and oil output seams.

References

1. Jalilova R.Q., Shirinov K.F. An application of group-theoretic analysis of the theory of filtration. The news of ANAS, 2004, №3, s.140-142
2. Jalilova R.Q., Shirinov K.F., Gasumov S.Yu. Investigation of influence of some hydrodynamic parameters on oil output. Transactions conf. "Modern problems of information, cybernetics and information technology", 2004, vol.3, p.13 -15

РАЗРАБОТКА КЛИЕНТ-СЕРВЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ORACLE

Алиев И.А.

Бакинский Государственный Университет

В современном обществе в связи с использованием огромных данных требуется минимальное время для обработки этой информации с использованием современных технологий. Колоссальный прорыв в информационном мире в этой сфере деятельности успешно начала и продолжает эту работу всемирная компания “Oracle” [1]. Приоритетами Oracle остаются доступность, ускорение инноваций, безопасность, гибкость развёртывания систем, лёгкость миграции, интеграции и разработки. Любая широкомасштабная компания в сфере финансового, государственного, телекоммуникационного, нефтегазового секторов используют продукты Oracle для хранения своих данных и дальнейших манипуляций с ними.

В связи с этим в работе рассматривается диалект SQL и PL/SQL, предлагаемом фирмой Oracle для работы с базами данных, конструкции языка, касающиеся работы с моделью предметной области и имеющие технологический характер, работа с большими объемами информации и, достаточно новая отрасль Oracle - разработка клиент-серверных приложений на базе Oracle.

В работе рассматриваются такие аспекты Oracle как:

- Основы Oracle SQL. Типы и синтаксис SQL команд
- Основы Oracle PL/SQL
- Обзор типов данных типы данных SQL и PL/SQL
- Программные модули: Создание процедур, функций, пакетов и триггеров базы данных
- Управление транзакциями, обслуживание зависимостей между объектами в БД
- Работа с большими данными и стандартными пакетами
- Разработка клиент-серверных приложений

Литература

1. Гринвальд Р., Стаковьяк Р., Стерн Д. «Oracle 11g. Основы», Издательство «Символ-Плюс», 2009 г.