

Y.C.MƏMMƏDOV

Dərsləyin əlyazmasına Azərbaycan SSR EA-nın Mexanika və Riyaziyyat İnstitutunun əməkdaşları: fizika-riyaziyyat elmləri namizədləri V.K.Kələntərov və **R.Ə.Şəfiyev** rəy vermişlər.

Elmi redaktoru: **C.A.İsmayılov**
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

TƏQRİBİ HESABLAMA ÜSULLARI

Ali məktəblər üçün dərslik

Azərbaycan SSR Ali və Orta İxtisas Təhsili
Nazirliyi tərəfindən təsdiq edilmişdir.

M52.

Məmmədov Y.C. Təqribi hesablama üsulları. Ali məktəblər üçün dərslik. Bakı: «Bakı Universiteti» nəşriyyatı, 2008, 288 səh., şəkilli

Təqdim olunan dərslik üç hissədən ibarətdir. Birinci hissədə analizin təqribi üsulları, ikinci hissədə cəbrin təqribi üsulları, üçüncü hissədə diferensial və integral tənliklərin təqribi üsulları şərh olunur.

Ali məktəblərin riyaziyyat fakültəsinin tələbələri üçün nəzərdə tutulmuş bu dərslikdən texniki ali məktəb tələbələri də dərs vəsaiti kimi istifadə edə bilərlər.

M $\frac{1602010000-06}{M-658(07)-008}$ - 008 - 2008

BAKİ – 2008

© «Maarif» nəşriyyatı, 1986
© «Bakı Universiteti» nəşriyyatı, 2008

GİRİŞ

Hesablama riyaziyyatı fənni. Müasir elm və texnikanın müxtəlif sahələrində elə riyazi məsələlərə rast gəlirik ki, bunların dəqiq həllini ya tapmaq olmur və ya az halda tapılan həllin ifadəsi o qədər mürəkkəbdir ki, təcrübədə ondan istifadə etmək çox çətin olur. Buna görə də son zamanlara qədər məsələlərin riyazi modellərini sadələşdirib həll edirdilər. Elm və texnikanın inkişafı artıq bu yolu qəbul edə bilməzdi - yeni yollar tapılmalı idi. Belə yollardan biri təqribi üsulların yaranmasına gətirdi. Artıq riyazi modellər sadələşdirilmir, onların dəqiq həlləri əvəzinə təqribi həlləri tapılır.

Beləliklə, riyazi analizin, cəbrin, diferensial və integral tənliklərin təqribi üsulları yarandı. Bu isə öz növbəsində riyaziyyatın yeni bir sahəsinin - hesablama riyaziyyatının yaranması ilə nəticələndi.

Elektron-hesablama maşınlarının (EHM) yaranması və sürətlə inkişaf etməsi riyaziyyatda və xüsusən hesablama riyaziyyatında böyük çevrilişə səbəb oldu.

İndi EHM imkan verir ki, mürəkkəb riyazi məsələləri təqribi üsullarla həll etdikdə, onun təqribi həlli lazımi dəqiqliklə tapsın. Buna görə də müasir dövrdə hesablama riyaziyyatı, riyaziyyat elminin ən vacib sahələrindən biri olmaqla elmin bir çox sahələrində müvəffəqiyyətlə tətbiq edilir.

Təqdim edilən dərslik, universitetlərdə keçilən «Hesablama üsulları» fənni üçün SSRİ Ali və Orta İxtisas Təhsili Nazirliyinin Tədris-Metodika İdarəsi tərəfindən təsdiq edilmiş proqram əsasında yazılmışdır. Dərslik üç hissədən ibarətdir. Birinci hissədə riyazi analizin, ikinci hissədə cəbrin, üçüncü hissədə diferensial və integral tənliklərin əsas təqribi üsulları verilir.

Hesablama xətaları

Adətən, verilmiş məsələnin həllini axtardıqda təqribi ədədlərə rast gəlinir. Bu təqribi ədədlər müxtəlif səbəblərdən yaranır. Əvvəlcə, məsələdə verilən məlum ədədlər eksperimentdən alındığından, bu ədədlərin təqribi qiymətləri verilmiş olur. İkinci, verilmiş riyazi məsələ mürəkkəb olduğundan onu daha sadə məsələ ilə əvəz edirlər ki, bu da müəyyən xətanın buraxılmasına səbəb olur. Üçüncü, hesablama prosesində elə ədədlər üzərində əməliyyat aparmaq lazım gəlir ki, onların dəqiq qiymətləri məlum olmur (məsələn, π , e , $\sqrt{2}$ ədədləri). Dördüncü, məsələnin həllinin dəqiq qiymətini praktik olaraq həmişə tapmaq mümkün olmur, həllin təqribi qiyməti götürülür. Beşinci, adi hesablama əməliyyatını apardıqda belə, həmişə dəqiq qiyməti tapmaq mümkün olmur, yuvarlaqlaşdırılmış qiymət götürülür.

Yuxarıda göstərilən xətalardan hər biri çox böyük olmasa da, bir neçə əməliyyat apardıqdan sonra bu xətalər cəmlənib ümumi nəticədə böyük xətanın alınmasına səbəb ola bilər. Buna görə də verilmiş məsələnin həllində göstərilən xətalara diqqət yetirmək zərurəti yaranır.

Əgər α ədədi verilmiş kəmiyyətin dəqiq qiyməti olan A -dan azacıq fərqlənirsə, onda bu ədədə A -nın təqribi ədədi deyilir. Təqribi ədədin xətası

$$\Delta\alpha = A - \alpha$$

ədədinə deyilir. Bu ədədin işarəsi məlum olmadığından $\Delta = |\Delta\alpha|$ ədədi götürülür və bu ədədə mütləq xəta deyilir.

Beləliklə, α ədədinin mütləq xətası $\Delta = |A - \alpha|$ ədədinə deyilir.

Ədədin dəqiq qiymətini bilmədiyimizdən mütləq xətanı da həmişə hesablamaq mümkün olmur. Ancaq mütləq xətanın dəyişmə sərhədini həmişə tapmaq olar. Δ ədədinin yuxarı sərhədlərinin ən kiçiyinə limit mütləq xəta deyilir və Δ_α ilə işarə edilir. Aydındır ki,

$$\alpha - \Delta_\alpha \leq A \leq \alpha + \Delta_\alpha.$$

Limit mütləq xəta hesablamının dəqiqliyini xarakterizə etmək üçün həmişə kifayət deyil. Tutaq ki, müəyyən hesablama prosesi üçün limit mütləq xətanı $\Delta_\alpha = 0,1$ sm almışıq. Əgər otağın həcmi ölçürüksə, bu hesablama ilə kifayətlənmək olar. Kibrit qutusunun həcmi ölçükdə isə bu hesablamayı kafi hesab etmək olmaz. Ona görə də yeni anlayış – nisbi xəta anlayışı da verilir.

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}$$

ədədinə α təqribi ədədinin nisbi xətası deyilir. Nisbi xətanın yuxarı sərhədlərinin ən kiçiyinə limit nisbi xəta deyilir və δ_α ilə işarə edilir. Aydındır ki,

$$\Delta_\alpha = |A|\delta_\alpha$$

qəbul etmək olar.

$A \approx \alpha$ olduğundan, adətən

$$\Delta_\alpha = |\alpha|\delta_\alpha$$

qəbul edilir. Ədədin dəqiq qiyməti $\alpha(1 - \delta_\alpha)$ və $\alpha(1 + \delta_\alpha)$ ədədləri arasında yerləşdiyindən

$$A = \alpha(1 \pm \delta_\alpha)$$

götürülür.

İndi isə təqribi ədədlər üzərində hesab əməlləri apardıqda alınan xətalara qiymətləndirək.

İsbat edək ki, bir neçə təqribi ədədin cəbri cəminin mütləq xətası bu ədədlərin mütləq xətalara cəmindən böyük deyil və bir neçə təqribi ədədin (əgər işarələri eynidirsə) cəminin limit nisbi xətası bu ədədlərin limit nisbi xətalaraının ən böyüyündən böyük deyil.

Tutaq ki, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – verilmiş təqribi ədədlərdir. Bunların cəbri cəminə baxaq:

$$\alpha = \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_n.$$

Aydındır ki,

$$\Delta_\alpha = \Delta\alpha_1 \pm \Delta\alpha_2 \pm \dots \pm \Delta\alpha_n,$$

buradan da

$$|\Delta_\alpha| \leq |\Delta\alpha_1| + |\Delta\alpha_2| + \dots + |\Delta\alpha_n|.$$

Fərz edək ki, $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) və isbat edək ki,

$$\delta_\alpha \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\delta_{\alpha_i}\}.$$

Burada α_i təqribi ədədlərinin dəqiq qiymətlərini A_i ($A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) ilə işarə edək və fərz edək ki, $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ədədi α təqribi ədədinin dəqiq qiymətidir.

Onda

$$\delta_\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{A} = \frac{\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \dots + \Delta\alpha_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$

$$\delta_{\alpha_i} = \frac{\Delta\alpha_i}{A_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olduğundan

$$\Delta\alpha_i = A_i\delta_{\alpha_i}.$$

Buradan

$$\delta_\alpha = \frac{A_1\delta_{\alpha_1} + A_2\delta_{\alpha_2} + \dots + A_n\delta_{\alpha_n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

olduğunu alırıq. Tutaq ki,

$$\bar{\delta} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\delta_{\alpha_i}\}.$$

Onda

$$\delta_\alpha \leq \bar{\delta}.$$

Qeyd edək ki, əgər $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ olarsa, onda

$$\delta_\alpha \leq \delta_{\alpha_1} + \delta_{\alpha_2},$$

burada A ədədi $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ təqribi ədədin dəqiq qiymətidir.

İndi isə hasilin xətasını hesablayaq.

İsbat edək ki, bir neçə təqribi ədədin (sıfırdan fərqli) hasilinin nisbi xətası bu ədədlərin nisbi xətalaraının cəmindən böyük deyil.

Tutaq ki, $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$. Sadəlik üçün fərz edək ki, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ müsbətdirlər. Onda

$$\ln \alpha = \ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \dots + \ln \alpha_n.$$

Burada

$$\Delta(\ln x) \approx d(\ln x) = \frac{dx}{x} \approx \frac{\Delta x}{x}$$

düsturunu nəzərə alsaq:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{\Delta\alpha_n}{\alpha_n}$$

olduğunu alırıq, yaxud

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \leq \left| \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1} \right| + \left| \frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta\alpha_n}{\alpha_n} \right|.$$

A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ilə α_i ədədlərinin dəqiq qiymətlərini işarə etsək:

$$\left| \frac{\Delta\alpha_i}{\alpha_i} \right| \approx \left| \frac{\Delta\alpha_i}{A_i} \right| = \delta_i, \delta = \left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right|.$$

Burada α_i təqribi ədədlərin nisbi xətası - δ_i, α ədədinin nisbi xətası isə δ ilə işarə edilib. Beləliklə,

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n.$$

Bu düstur α_i ədədləri müxtəlif işarələrə malik olanda da doğrudur.

Nəhayət, nisbətənin xətasını hesablayaq. İsbət edək ki, iki ədədin nisbətənin nisbi xətası, bu ədədlərin nisbi xətalərinin cəmindən böyük deyil. Doğrudan da, tutaq ki,

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Sadəlik üçün fərz edək ki, α_1, α_2 müsbətdirlər. Onda

$$\ln \alpha = \ln \alpha_1 - \ln \alpha_2$$

buradan da

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2}$$

və yaxud

$$\left| \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right| \leq \left| \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} \right| + \left| \frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} \right|$$

olduğunu alırıq. Bu isə isbat etmək istədiyimiz düsturdur.

İndi isə daha ümumi məsələyə baxaq.

Tutaq ki, bir neçə kəmiyyətin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ xətası məlumdur və tələb olunur ki, bu kəmiyyətlərin funksiyasının - $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ xətasını hesablayaq.

Aşkardır ki,

$$|\Delta f| = |f(\alpha_1 + \Delta \alpha_1, \dots, \alpha_n + \Delta \alpha_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| \approx$$

$$\approx |df(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right| |\Delta \alpha_i|,$$

$$\Delta f \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right| |\Delta \alpha_i|.$$

Beləliklə funksiyanın limit mütləq xətası üçün

$$\Delta f \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right| |\Delta \alpha_i| \quad (1)$$

düsturunu almış oluruq. (1) bərabərsizliyinin hər tərəfini $|f|$ -ə bölsək funksiyanın nisbi xətası üçün də düstur almış oluruq:

$$\delta \leq \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right) / f \right| |\Delta \alpha_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \ln f \right| |\Delta \alpha_i|.$$

Onda limit nisbi xəta üçün

$$\delta_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \ln f \right| |\Delta \alpha_i|.$$

Təqribi ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması. Müəyyən bir məsələni təqribi üsulla həll etdikdə alqoritm qurulur; bu alqoritm əl ilə və yaxud maşında icra edilir. Bu halda biz ixtiyari həqiqi ədədlərlə yox, yalnız diskret sonlu çoxluqla iş görməli oluruq. Bu çoxluğa müxtəlif say sistemlərində «mərtəbələri» olan ədədlər daxil olur. Tutaq ki, bu çoxluq, aşağıdakı şəkildə ədədlər çoxluğundan ibarətdir:

$$\pm (\alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta^{n-m+1}),$$

burada β – natural ədəddir və hesablama sisteminin əsasıdır: $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_m < \beta$ – tam müsbət ədədlərdir; m – mərtəbələrin sayıdır; nəhayət, n – tam ədəddir.

Bu ədədlər üzərində hesabi əməliyyat apardıqda yeni alınan ədədin mərtəbəsi böyüyə bilər və bu ədədin baxdığımız çoxluqdan kənara çıxması üçün yuvarlaqlaşdırılması zərurəti doğurur.

Tutaq ki, hesablama nəticəsində

$$\pm (\alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \beta^{n-m} + \dots)$$

ədədini almışıq. Əgər

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} \beta^{-1} + \dots < \frac{1}{2} \beta$$

şərti ödənersə, onda nəticəni

$$\pm (\alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta^{n-m+1})$$

ədədi ilə əvəz etmək lazımdır. Əgər

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} \beta^{-1} + \dots > \frac{1}{2} \beta$$

şərti ödənersə, onda nəticəni

$$\pm (\alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + (\alpha_m + 1) \beta^{n-m+1})$$

ədədi ilə əvəz etmək lazımdır. Nəhayət, əgər

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} \beta^{-1} + \dots = \frac{1}{2} \beta$$

şərti ödənersə, onda yuxarıdakı ədədlərin hansı biri ilə nəticəni əvəz etməyin fərqi yoxdur.

Yuvarlaqlaşdırılma prosesində limit mütləq xətanın necə dəyişdiyini öyrənək. Tutaq ki,

$$a = \alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta^{n-m+1} + \dots$$

təqribi ədədi verilib (uyğun dəqiq qiyməti A ilə işarə edək) və yuvarlaqlaşdırmadan sonra alınan ədəd

$$a^* = \alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_{m-1} \beta^{n-m+2} + \gamma_m \beta^{n-m+1}$$

olsun. Burada γ_m ya α_m və ya α_{m+1} ədədinə bərabərdir. Aydındır ki, $|a - a^*|$ ədədi

$$\alpha_{m+1} \beta^{n-m} + \alpha_{m+2} \beta^{n-m+1} + \dots$$

və ya

$$\beta^{n-m+1} - (\alpha_{m+1} \beta^{n-m} + \alpha_{m+2} \beta^{n-m+1} + \dots)$$

ədədlərin ən kiçiyinə bərabər olacaq.

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$$

bərabərsizliyini nəzərə alsaq, a^* təqribi ədədin mütləq xətasının aşağıdakı ədədlərin ən kiçiyinə bərabər olduğunu alırıq:

$$\Delta a + \alpha_{m+1} \beta^{n-m} + \alpha_{m+2} \beta^{n-m+1} + \dots$$

və ya

$$\Delta a + \beta^{n-m-1} - (\alpha_{m+1} \beta^{n-m} + \alpha_{m+2} \beta^{n-m+1} + \dots).$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$\Delta a^* \leq \Delta a + \frac{1}{2} \beta^{n-m+1}.$$

İndi isə təqribi ədədlərin yazılma üsullarından birini, ən çox istifadə edilənini verək.

İxtiyari müsbət $\omega \leq 1$ ədədini götürək və aşağıdakı kimi təqribi ədədə baxaq:

$$a = \alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta^{n-m+1}.$$

Əgər

$$\Delta a \leq \omega \beta^{n-k-1}$$

bərabərsizliyi ödənərsə, onda α_k doğru rəqəm adlanır; əks halda şübhəli rəqəmdir. Aşkardır ki, α_k doğru rəqəmdirsə, ondan qabaqda gələnlər də doğru olacaqdır.

Təqribi ədəd, xətası göstərilmədən yazılırsa, onun bütün yazılan rəqəmləri doğru olmalıdır.

Əgər verilmiş təqribi ədədin şübhəli rəqəmləri varsa, onda onu əv-

vəlcədən yuvarlaqlaşdırmaq lazımdır. Mərtəbələrin sayı çox olduqda da yuvarlaqlaşdırma aparılır. Yuvarlaqlaşdırma ilə əlaqədar olaraq ω ədədini əlavə şərtə tabe edirlər.

ω -nın elə ən kiçik qiymətini tapaq ki, yuvarlaqlaşdırma apardıqdan sonra heç olmasa, axırdan əvvəlki doğru rəqəm, doğru qalsın. Tutaq ki, a_m

$$a = \alpha_1 \beta^n + \alpha_2 \beta^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta^{n-m+1} + \alpha_{m+1} \beta^{n-m} + \dots$$

ədədinin axırıncı doğru rəqəmdir.

Ona görə də

$$\omega \beta^{n-m} < \Delta a < \omega \beta^{n-m+1}.$$

Böyük mərtəbəsi $m-1$ olmaqla yuvarlaqlaşdırma aparsaq limit mütləq xəta

$$\Delta a + \frac{1}{2} \beta^{n-m+2}$$

ədədindən böyük olmaz. ω -nı elə seçək ki,

$$\Delta a + \frac{1}{2} \beta^{n-m+2} \leq \omega \beta^{n-m+2}$$

olsun. Bu bərabərsizlik Δa -nı onun ən böyük qiyməti ilə də əvəz etdikdə ödənməlidir.

$$\omega \beta^{n-m+1} + \frac{1}{2} \beta^{n-m+2} \leq \omega \beta^{n-m+2}.$$

Buradan

$$\omega \geq \frac{1}{2(1-1/\beta)}$$

olduğunu alırıq. ω -nın ən kiçik qiyməti

$$\omega = \frac{1}{2(1-1/\beta)}.$$

Beləliklə, onluq say sistemində, yəni $\beta = 10$ olduqda

$$\omega \approx 0,56$$

götürmək olar. İkilik say sistemində isə ($\beta = 2$)

$$\omega = 1.$$

I HİSSƏ

RİYAZİ ANALİZİN TƏQRİBİ ÜSULLARI

I FƏSİL

YAXINLAŞMALAR NƏZƏRİYYƏSİ

Məlumdur ki, funksiya müxtəlif üsullarla verilir. Belə üsullardan biri cədvəl üsuludur: funksiya, dəyişənin (x) sonlu sayda qiymətlərində verilir ($f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$). Lakin təcrübədə funksiyanın qiymətini dəyişənin başqa qiymətlərində də hesablamaq lazım gəlir. Belə halda elə sadə $P(x)$ funksiyasını qururlar ki,

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

şərtləri ödənilsin və $f(x)$ -in təyin oblastının başqa nöqtələrində $P(x) - f(x)$ kafi qədər kiçik olsun. Belə $P(x)$ funksiyasının qurulmasına *interpolyasiya* məsələsi deyilir. Adətən $P(x)$ funksiyasını çoxhədli şəklində axtarırlar.

Bəzən elə olur ki, funksiya analitik şəkildə verilir, lakin onun qiymətini təyin oblastının ixtiyari nöqtəsində, tapmaq böyük hesablama işi tələb edir. Bu halda da interpolyasiya məsələlərindən istifadə edilir: funksiyanın analitik ifadəsindən istifadə edərək, onun qiymətini, hesablama asan olan bir neçə nöqtədə tapırlar və bu qiymətlərdən istifadə edərək $P(x)$ çoxhədlisini qururlar.

Bu fəsildə, belə interpolyasiya çoxhədlilərinin qurulması üçün müxtəlif üsullar verilir.

§1. İnterpolyasiya məsələsi

$[a, b]$ parçasında təyin olunmuş həqiqi funksiyalar çoxluğuna və bu çoxluğa daxil olan sadə funksiyalar küllisinə baxaq – $\{\varphi_i(x)\}$.

Fərz edək ki, bu çoxluqdan götürülmüş sonlu sayda ixtiyari funksiyalar sistemi xətti asılı deyil.

Adətən, $\varphi_i(x)$ funksiyaları əvəzinə praktikada

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots;$$

və ya

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots;$$

və ya

$$1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}, \dots$$

funksiyaları sistemini götürürlər.

$\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar çoxluğundan $n+1$ sayda olanını götürüb bunların xətti kombinasiyasına baxaq:

$$P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ həqiqi ədədlərdir. $P_n(x)$ funksiyasına $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sisteminə görə ümumiləşmiş çoxhədli deyirlər.

$[a, b]$ parçasından $x_0, x_1, \dots, x_n$ nöqtələr çoxluğunu götürüb qeyd edək. Elə $P_n(x)$ ümumiləşmiş çoxhədliyi götürək ki, bu nöqtələrdə onun qiymətləri uyğun olaraq $f(x)$ -in həmin nöqtələrdə qiymətləri ilə üst-üstə düşsün. $x_0, x_1, \dots, x_n$ nöqtələrinə interpolyasiyanın düyün nöqtələri, $P_n(x)$ -ə isə verilmiş sistemə görə $f(x)$ funksiyasının ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədliyi deyirlər. $f(x)$ və $\varphi_i(x)$ funksiyaları diferensiallandırsa onda tələb edilir ki, düyün nöqtələrində $f(x)$ və $P_n(x)$ -in törəmələrinin də qiymətləri üst-üstə düşsün.

Düyün nöqtələrini və $\varphi_i(x)$ funksiyalarını elə seçək ki, verilmiş $f(x)$ funksiyası üçün yalnız bir ümumiləşmiş çoxhədli qurmaq mümkün olsun.

Əgər $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyalar sistemi üzrə heç olmazsa, bir əmsalı sıfırdan fərqli olan, ixtiyari ümumiləşmiş çoxhədlinin $[a, b]$ parçasında köklərinin sayı n -dən çox deyilsə, onda $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sisteminə Çebişev sistemi deyirlər. Aydındır ki, funksiyalar sisteminin Çebişev sistemi təşkil etməsi üçün bu funksiyaların xətti asılı olmaması zəruri şərtidir. Yenə də aydındır ki, $1, x, x^2, \dots, x^n$ funksiyalar sistemi ixtiyari parçada Çebişev sistemi təşkil edir.

Teorem 1.1. İxtiyari $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiyası və ixtiyari $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($a \leq x_i \leq b, x_i \neq x_j, i \neq j$) düyün nöqtələri üçün

$$P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$$

ümumiləşmiş çoxhədlinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyalarının $[a, b]$ parçasında Çebişev sistemi təşkil etməsidir. Bu halda interpolyasiya çoxhədliyi yeganədir.

İsbatı. Aşkardır ki, ümumiləşmiş çoxhədlinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt ixtiyarı $f(x_i)$ ($i=0,1,...,n$) və ixtiyarı $x_0, x_1, ..., x_n$ üçün

$\alpha_0\varphi_0(x_i) + \alpha_1\varphi_1(x_i) + ... + \alpha_n\varphi_n(x_i) = f(x_i)$ ($i=0,1,...,n$) (1.1) sisteminin ($\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ məhullarına nəzərən) həllinin varlığıdır. (1.1) sisteminin həllinin varlığı üçün isə zəruri və kafi şərt

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0), \varphi_1(x_0), ..., \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1), ..., \varphi_n(x_1) \\ \\ \varphi_0(x_n), \varphi_1(x_n), ..., \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.2)$$

olmasıdır.

İsbat edək ki, (1.2) şərtinin ödənməsi üçün zəruri və kafi şərt $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalarının Çebışev sistemini təşkil etməsidir.

Tutaq ki, $\{\varphi_i\}$ Çebışev sistemi təşkil edir və isbat edək ki, $\Delta \neq 0$. Tərsini fərz edək. Fərz edək ki, müəyyən düyünlər – $\{x_i\}$ üçün $\Delta = 0$. Onda

$$b_0\varphi_0(x_i) + b_1\varphi_1(x_i) + ... + b_n\varphi_n(x_i) = 0, \quad \sum_{i=0}^n b_i^2 > 0, \quad (i=0,1,...,n).$$

Bu o deməkdir ki,

$$P_n(x) = b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + ... + b_n\varphi_n(x)$$

ümumiləşmiş çoxhədlisinin $[a, b]$ parçasında n -dən çox kökü var, yəni $\{\varphi_i(x)\}$ Çebışev sistemi təşkil etmir. Bu isə şərtə ziddir.

Tutaq ki, $\Delta \neq 0$ və isbat edək ki, $\{\varphi_i(x)\}$ Çebışev sistemi təşkil edir.

Tərsini fərz edək. Fərz edək ki, $\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(x)$ ümumiləşmiş çoxhədlisinin $n+1$ müxtəlif kökü var. Bu $n+1$ kökü düyün nöqtələri kimi götürsək:

$$\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(x_j) = 0 \quad (j=0,1,...,n)$$

bircinsli sisteminin sıfırdan fərqli həlli olduğunu almış olarıq. Deməli sistemin determinantı sıfıra bərabərdir. Bu isə fərziyyəmizə ziddir.

Teoremin hökmünün ikinci hissəsi, yəni ümumiləşmiş çoxhədlinin yeganəliyi α_i əmsallarının birqiymətli təyin olunmasından çıxır:

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i=0,1,2,...,n),$$

burada Δ_i determinantı, Δ determinantında i -ci sütunu (1.1) sisteminin sərbəst hədlərilə əvəz edilməklə alınır. Beləliklə,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_k}{\Delta} \varphi_k(x) \quad (1.3)$$

olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

(1.3) ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisini başqa formada yazaq. Δ_i determinantını i -ci sütunun elementlərinə görə ayırsaq,

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta_{ij}$$

olduğunu alırıq, burada Δ_{ij} Δ -determinantının i -ci sütununun cəbri tamamlayıcısıdır. Δ_i -nin bu ifadəsini (1.3)-də nəzərə alsaq:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \varphi_k(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Phi_j(x).$$

Burada

$$\Phi_j(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \varphi_k(x)$$

ümumiləşmiş çoxhədlidir; bu çoxhədli $f(x)$ funksiyasından asılı olmayıb, $x_0, x_1, ..., x_n$ ($x_i \neq x_j, i \neq j$) düyün nöqtələrinin seçilməsilə tam təyin olunur.

İxtiyarı $f(x)$ funksiyası üçün

$$f(x_k) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Phi_j(x_k) \quad (k=0,1,2,...,n)$$

şərti ödəndiyindən $\Phi_j(x)$ çoxhədlisi aşağıdakı xassəyə malik olur:

$$\Phi_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

§ 2. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

1. Çoxhədlinin qurulması. Yuxarıda isbat etdik ki, ixtiyarı $f(x)$ funksiyası və ixtiyarı seçilmiş düyün nöqtələri $x_0, x_1, ..., x_n$

$(x_i \neq x_j, i \neq j)$ üçün dərəcəsi n -dən çox olmayan çoxhədlilər içərisində aşağıdakı şəkildə ifadə olan yeganə interpolyasiya çoxhədli var:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Phi_j(x), \quad \Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (1.4)$$

$\Phi_i(x)$ funksiyasını tapmaq üçün biz elə n dərəcəli çoxhədli tapmalıyıq ki, $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ nöqtələrində sıfıra çevrilsin və x_i nöqtəsində 1-ə bərabər olsun.

Bu funksiyanı

$$\Phi_i(x) = A(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

şəklində axtaraq. A ədədini elə seçək ki, $\Phi_i(x_i) = 1$ olsun:

$$1 = A(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n).$$

Buradan

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Onda

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

(1.4) düsturunda bunu nəzərə alsaq:

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \times \\ \times f(x_1) + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n).$$

Bu düsturla təyin edilən interpolyasiya çoxhədlisinə Laqranj interpolyasiya çoxhədli deyirlər. Bu çoxhədli başqalarından fərqləndirmək üçün $L_n(x)$ ilə işarə edirlər:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)},$$

burada

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

2. Bir-birindən eyni məsafədə duran düyün nöqtələri üçün çoxhədli.

Fərz edək ki,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h.$$

Əgər $\frac{x-x_0}{h} = t$ ilə işarə etsək $\Phi_i(x)$ funksiyası aşağıdakı şəkllə düşər

$$\Phi_i(x) = \Phi_i(x_0 + th) = \frac{th(th-h)\dots[th-(i-1)h][th-(i+1)h]\dots(th-nh)}{ih(i-1)h\dots h(-h)\dots[-(n-i)h]} = \\ = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} = (-1)^{n-1} C_n^i \frac{1}{t-i} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!}.$$

Onda

$$L_n(x) = L_n(x + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{C_n^i}{t-i} f(x_i).$$

Bu düsturdan görünür ki, $f(x_i)$ -nin əmsalı

$$(-1)^{n-i} C_n^i \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)n!}$$

$f(x)$ funksiyasından və h -dan asılı deyil. Buna görə də bu əmsalların qiymətlərini əvvəlcədən cədvəl şəklində verib, ondan istifadə etmək olar.

3. Eytkenin interpolyasiya sxemi. Əgər x_i düyün nöqtələri bir-birindən eyni məsafədə deyilsə və Laqranj çoxhədlisinin analitik ifadəsi əvəzinə bəzi nöqtələrdə qiymətlərini hesablamaq tələb olunursa, onda aşağıda şərh edilən sxemdən istifadə etmək əlverişlidir.

$$L_0(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 - x \\ f(x_1) & x_1 - x \end{vmatrix}$$

ifadəsinə baxaq. Bu birdərəcəli çoxhədlidir.

$$L_{01}(x_0) = f(x_0), \quad L_{01}(x_1) = f(x_1)$$

olduğundan $L_{01}(x)$ iki x_0, x_1 nöqtələri üçün axtarılan çoxhədli olar. Bu qayda ilə $L_{12}(x), L_{23}(x), \dots$ çoxhədlilərini də qurmaq olar.

İndi isə

$$L_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}$$

ifadəsinə baxaq. Bu ikidərəcəli çoxhədlidir.

$$L_{012}(x_0) = f(x_0), L_{012}(x_1) = f(x_1), L_{012}(x_2) = f(x_2)$$

olduğundan $L_{012}(x)$ üç x_0, x_1, x_2 nöqtələri üçün axtarılan çoxhədlidir.

Bu qayda ilə $L_{123}(x), L_{234}(x), \dots$ çoxhədlilərini də qurmaq olar.

Bu prosesi davam etdirsək:

$$L_{012\dots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \left| \begin{matrix} L_{012\dots n-1}(x) x_0 - x \\ L_{123\dots n}(x) x_n - x \end{matrix} \right|$$

çoxhədlisini qurmaq olar. Bu n dərəcəli çoxhədlidir.

$$L_{012\dots n}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

olduğundan $L_{012\dots n}(x)$ çoxhədlisi $x_0, x_1, \dots, x_n$ nöqtələri üçün axtarılan çoxhədli olar.

İnterpolyasiya çoxhədlisinin bu qayda ilə tapılmasına *Eytken sxemi* deyilir.

4. Qalıq həddi. $f(x)$ və $L_n(x)$ funksiyalarının düyün nöqtələrində qiymətləri üst-üstə düşürlər, başqa nöqtələrdə isə müxtəlif qiymətlər alırlar (əgər $f(x)$ n -dərəcəli çoxhədli deyilsə).

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x)$$

işarələməsini aparaq. Burada $R_n(x)$ -ə qalıq həddi deyilir. Aydındır ki,

$$R_n(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında n tərtibədək kəsilməz törəmələri var və $f^{(n)}(x)$ $[a, b]$ -də diferensiasıllanandır. $[a, b]$ parçasından götürülmüş ixtiyari qeyd edilmiş x nöqtəsində qalıq həddini qiymətləndirək.

Aşağıdakı kimi işarələmə aparaq:

$$\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - A(z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_n).$$

Aşkardır ki,

$$\varphi(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

A ədədini elə seçək ki, $x \in [a, b]$ nöqtəsi üçün

$$\varphi(x) = 0$$

şərti ödənsin. Onda

$$A = \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}.$$

Deməli, $\varphi(z)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının $n + 2$ nöqtəsində sıfıra çevrilir. Onda Roll teoreminə əsasən $\varphi'(z)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının ən azı $n + 1$ nöqtəsində sıfıra çevriləcək:

$$\varphi'(\xi_i^{(1)}) = 0 \quad (\xi_i^{(1)} \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n).$$

Yenidən Roll teoremini $\varphi'(z)$ funksiyasına tətbiq etsək

$$\varphi''(\xi_i^{(2)}) = 0 \quad (\xi_i^{(2)} \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

olduğunu alırıq.

Bu prosesi davam etdirsək, heç olmasa bir $\xi \in [a, b]$ nöqtəsinin varlığını hökm edə bilərik ki,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

şərtini ödəsin. Onda

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n + 1)!$$

olduğundan

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}.$$

Deməli, $\varphi(x) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

olduğunu alırıq. Qalıq həddi aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Buradan,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} |\omega_n(x)|,$$

$$M_{n+1} = \sup_{a \leq \xi \leq b} |f^{(n+1)}(\xi)|, \quad \omega_n(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n).$$

5. Qalıq həddinin minimumlaşdırılması. İndi isə düyün nöqtələrini elə seçək ki, $\sup_{[a, b]} |\omega_n(x)|$ ən kiçik qiymət alsın.

Bu məsələni həll etmək üçün Çebışev çoxhədlisinə baxaq:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (|x| \leq 1).$$

Aşağıdakı məlum eyniliyi

$$\cos(n + 1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n - 1)\theta$$

nəzərə alsaq

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

düsturunu alırıq.

Buradan görünür ki, $T_n(x)$ n -dərəcəli çoxhədlidir və x^n -nin əmsalı 2^{n-1} ədədinə bərabərdir.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$$

tənliyindən

$$x_m = \cos \frac{(2m+1)\pi}{2n} \quad (m=0,1,\dots,n-1).$$

Aydındır ki, $|x_m| \leq 1$ və $\max_{|x| \leq 1} |T_n(x)| = 1$.

Əgər $a = -1$, $b = 1$ və düyün nöqtələri əvəzinə Çebişev çoxhədlisinin köklərini götürsək

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x), \quad \max_{|x| \leq 1} |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə, isbat etdik ki, əgər $a = -1$, $b = 1$ və düyün nöqtələri əvəzinə Çebişev çoxhədlisinin köklərini götürsək:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}$$

olduğunu alırıq.

Qeyd edək ki,

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + (b+a)]$$

əvəzləməsini aparmaqla ixtiyari $[a, b]$ parçasını $[-1, 1]$ parçası ilə əvəz etmək olar. Bu halda Çebişev çoxhədlisinin kökləri

$$x_m = \frac{1}{2} \left[(b-a) \cos \frac{2m+1}{2n-2} \pi + (b+a) \right]$$

düsturu ilə təyin edilir və

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Beləliklə isbat etdik ki,

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

çoxhədliyi sıfırdan ən az meyl edən çoxhədlidir.

§ 3. Nyutonun interpolasiya çoxhədliyi

1. Bölünən və sonlu fərqlər. $[a, b]$ parçasında təyin olan ixtiyari $f(x)$ funksiyasını və bu parçaya daxil olan düyün nöqtələrini $x_0, x_1, \dots, x_n$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ götürək.

Aşağıdakı nisbətlərə baxaq:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1),$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1, x_2), \dots, \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}, x_n).$$

Bu nisbətləri birtərtibli bölünən fərqlər adlandırırlar.

İndi isə aşağıdakı nisbətlərə baxaq:

$$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0, x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = f(x_1, x_2, x_3),$$

.....

$$\frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

Bu nisbətlərə iki tərtibli bölünən fərqlər deyirlər.

Bu qayda ilə $(k+1)$ -tərtibli bölünən fərqləri aşağıdakı nisbətlə təyin etmək olar:

$$\frac{f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}} = f(x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k}).$$

Riyazi induksiya üsulu ilə isbat edək ki,

$$\begin{aligned} f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+k})} + \\ &+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \dots + \\ &+ \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i-1}) \dots (x_{i+k} - x_{i+k-1})}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$k=1$ olduqda bu düsturun doğruluğu $f(x_i, x_{i+1})$ -in tərifindən çıxır. Fərz

edək ki, $k = l - 1$ üçün düstur doğrudur və $k = l$ üçün doğruluğunu isbat edək. Aydındır ki,

$$\begin{aligned}
 f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l}) &= \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+l}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l-1})}{x_{i+l} - x_i} = \\
 &= \frac{1}{x_{i+l} - x_i} \left\{ \left[\frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l-1})} + \right. \right. \\
 &\quad + \frac{f(x_{i+2})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3}) \dots (x_{i+2} - x_{i+l-1})} + \dots + \\
 &\quad \left. + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_{i+1})(x_{i+l} - x_{i+2}) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})} \right] - \\
 &\quad - \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+l-1})} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l-1})} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f(x_{i+l-1})}{(x_{i+l-1} - x_i)(x_{i+l-1} - x_{i+1}) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})} \right] \Big\} = \\
 &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{i+l})} + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_i) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})} + \\
 &\quad + \frac{1}{x_{i+l} - x_i} \left\{ \left[\frac{1}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+2} - x_{i+3}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l})} - \right. \right. \\
 &\quad - \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l-1})} \Big] f(x_{i+1}) + \dots + \\
 &\quad + \left[\frac{1}{(x_{i+l-1} - x_{i+1}) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})(x_{i+l-1} - x_{i+l})} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(x_{i+l-1} - x_i)(x_{i+l-1} - x_{i+1}) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})} \right] f(x_{i+l-1}) \Big\} = \\
 &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{i+l})} + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_i) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})} + \\
 &\quad + \frac{1}{x_{i+l} - x_i} \left\{ \frac{x_{i+l} - x_i}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l})} f(x_{i+1}) + \dots + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{x_{i+l} - x_i}{(x_{i+l-1} - x_i) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})(x_{i+l-1} - x_{i+l})} f(x_{i+l-1}) \Big\} = \\
 &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{i+l})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+l})} + \\
 &\quad + \dots + \frac{f(x_{i+l-1})}{(x_{i+l-1} - x_i) \dots (x_{i+l-1} - x_{i+l-2})(x_{i+l-1} - x_{i+l})} + \\
 &\quad + \frac{f(x_{i+l})}{(x_{i+l} - x_i) \dots (x_{i+l} - x_{i+l-1})}.
 \end{aligned}$$

Riyazi induksiya üsuluna əsasən (1.5) düsturunun doğruluğunu istənilən k üçün almış oluruq.

İndi isə sonlu fərqləri təyin edək.

Fərz edək ki, düyün nöqtələri bir-birindən h məsafədə yerləşmişdir:

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh.$$

$$f(x_1) - f(x_0), f(x_2) - f(x_1), \dots, f(x_n) - f(x_{n-1})$$

fərqlərinə birtərtibli sonlu fərqlər deyirlər və aşağıdakı işarələmələri aparırlar:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f^1_{i+1/2} \quad \text{və ya} \quad f(x_{i+1}) - f(x_i) = \Delta f(x_i).$$

Bu paraqrafda biz birinci işarələmədən istifadə edəcəyik.

Birtərtibli sonlu fərqlərdən aşağıdakı ikitərtibli sonlu fərqləri də təyin etmək olar:

$$\frac{f^1_{\frac{3}{2}} - f^1_{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = f^2_{\frac{1}{2}}, \frac{f^1_{\frac{5}{2}} - f^1_{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = f^2_{\frac{3}{2}}, \dots, \frac{f^1_{\frac{2i+1}{2}} - f^1_{\frac{2i-1}{2}}}{\frac{1}{2}} = f^2_i.$$

Analoji olaraq yüksək tərtibli sonlu fərqlər də təyin olunur.

Aşağıdakı düstur sonlu fərqlərlə funksiyanın özünün qiymətləri arasında əlaqə yaradır:

$$f_i^k = f_{i+\frac{k}{2}} - C_k^1 f_{i-1+\frac{k}{2}} + C_k^2 f_{i-2+\frac{k}{2}} - \dots + (-1)^m C_k^m f_{i-m+\frac{k}{2}} + \dots + (-1)^k f_{i-\frac{k}{2}}.$$

Bu düstur riyazi induksiya üsulu ilə asanlıqla isbat olunur.

İndi isə sonlu fərqlərlə bölünən fərqlər arasında əlaqə yaradan aşağıdakı düsturları verək:

$$f(x_i, x_i + h, \dots, x_i + kh) = \frac{f_{i+k/2}^k}{k! h^k},$$

$$f(x_i, x_i - h, \dots, x_i - kh) = \frac{f_{i-k/2}^k}{k! h^k},$$

$$f(x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + kh, x_0 - kh) = \frac{f_0^{2k}}{(2k)!h^{2k}},$$

$$f(x_0, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - (k-1)h, x_0 + kh) = \frac{f_{1/2}^{2k-1}}{(2k-1)!h^{2k-1}}.$$

Bu düsturlar riyazi induksiya üsulu ilə isbat edilir.

Nəhayət, bizə gələcəkdə aşağıdakı düsturlar da lazım olacaq:

$$\frac{1}{2}[f_i^k + f_{-i}^k] = f_0^k, \quad \frac{1}{2}[f_{i+1}^k + f_i^k] = f_{i+\frac{1}{2}}^k.$$

Bəzi interpolyasiya çoxhədlilərini qurduqda yuxarıdakı işarələmələrlə bərabər aşağıdakı işarələmələri də qəbul edirlər:

$$\frac{f_0 + f_1}{2} = f_{\frac{1}{2}}, \quad \frac{f_1 + f_2}{2} = f_{\frac{3}{2}}, \dots, \quad \frac{f_i + f_{i+1}}{2} = f_{i+\frac{1}{2}}, \dots$$

Bu halda asanlıqla yoxlanılır ki,

$$\frac{1}{2}\left[f_{\frac{1}{2}}^{2n-1} + f_{-\frac{1}{2}}^{2n-1}\right] = f_0^{2n-1}, \quad \frac{1}{2}[f_1^{2n} + f_0^{2n}] = f_{\frac{1}{2}}^{2n}.$$

2. Çoxhədlinin qurulması. Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında təyin olunan $f(x)$ funksiyası və bu parçaya daxil olan $x_0, x_1, \dots, x_n$ düyün nöqtələri verilmişdir. $L_n(x)$ bu düyün nöqtələrinə görə $f(x)$ funksiyası üçün Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisidir.

Aşkardır ki,

$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + (L_2(x) - L_1(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)).$ (1.6)
İstənilən $k(1 \leq k \leq n)$ üçün $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ fərqini hesablayaq. Bu fərq $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ nöqtələrində sıfır çevrildiyindən

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

şəklində axtarmaq olar. Sabit A ədədini aşağıdakı tənlikdən tapaq:

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}),$$

$$A = \frac{f(x_k)}{(x_n - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} - \frac{L_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} =$$

$$= \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} - \frac{1}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1}) \dots (x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})} f(x_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)} =$$

$$= f(x_0, x_1, \dots, x_k).$$

Bu düsturu (1.6) da nəzərə alsaq:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0) \times$$

$$\times (x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

olar. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin bu formasına Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi deyirlər.

3. Bir-birindən eyni məsafədə duran düyün nöqtələri üçün çoxhədl.

Düyün nöqtələrini $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) şəklində götürək və bölünən fərqləri sonlu fərqlərlə əvəz edək, onda:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f_{\frac{1}{2}}^2 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!h^3} f_{\frac{3}{2}}^3 + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n!h^n} f_{n/2}^n.$$

$x = x_0 + th$ əvəzləməsini aparsaq:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = f_0 + tf_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_{\frac{1}{2}}^2 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{\frac{3}{2}}^3 + \dots + \frac{t(t-1) \dots [t - (n-1)]}{n!} f_{n/2}^n.$$

Bu düstura irəliyə interpolyasiya üçün Nyuton çoxhədlisi deyilir.

İndi isə düyün nöqtələrini

$$x_i = x_0 - ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

şəklində götürək. Onda Nyutonun interpolyasiya düsturu aşağıdakı şəkli alar:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0 - h) + (x - x_0)(x - x_0 + h) \times$$

$$\times f(x_0, x_0 - h, x_0 - 2h) + \dots + (x - x_0)(x - x_0 + h) \dots$$

$$\dots [x - x_0 + (n-1)h]f(x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - nh).$$

Bölünən fərqləri sonlu fərqlərlə əvəz etsək:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2!h^2} f_{-1}^2 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)\dots[x-x_0+(n-1)h]}{n!h^n} f_{-\frac{n}{2}}^n.$$

$x = x_0 + th$ əvəzləməsini aparaq:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + f_{-\frac{1}{2}}^1 t + f_{-1}^2 \frac{t(t+1)}{2!} + \dots + f_{-\frac{n}{2}}^n \frac{t(t+1)\dots[t+(n-1)]}{n!}.$$

Bu düstura geriye interpolasiya üçün Nyuton çoxhədlisi deyirlər.

3. Qalıq həddi. Bölünən fərqlərin xassəsinə əsasən:

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Buradan

$$f(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \dots + f(x_n) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} + f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Beləliklə,

$$f(x) = L_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

olar ki, buradan da

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

olar. $f(x)$ funksiyasının $(n+1)$ tərtibdən törəməsi olarsa,

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

§ 4. Başqa interpolasiya çoxhədliləri

Qauss çoxhədliləri. $x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh$ düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolasiya çoxhədlisini yazaq:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_0 + h)(x-x_0) + f(x_0, x_0 + h, x_0 - h)(x-x_0) \times (x-x_0-h) + \dots + f(x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh, x_0 + (n+1)h) \times (x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\dots(x-x_0-nh)(x-x_0+nh).$$

Sonlu fərqlərlə bölünən fərqlər arasındakı əlaqə düsturlarından istifadə etsək:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!h^2} f_0^2 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)}{3!h^3} f_{\frac{1}{2}}^3 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\dots[x-x_0+(n-1)h]}{(2n-1)!h^{2n-1}} f_{\frac{1}{2}}^{2n-1} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\dots[x-x_0+(n-1)h](x-x_0-nh)}{(2n)!h^{2n}} f_0^{2n}.$$

$x = x_0 + th$ əvəzləməsini aparsaq:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + t f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_0^2 + \frac{t(t^2-1)}{3!} f_{\frac{1}{2}}^3 + \dots + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n-1} + \frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}.$$

Bu çoxhədlilər irəliyə interpolasiya üçün Gauss çoxhədlisi deyirlər.

İndi isə düyün nöqtələrini aşağıdakı kimi götürək:

$$x_0, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh.$$

Bu düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolasiya çoxhədlisini yazaq:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2!h^2} f_0^2 + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{3!h^3} f_{-\frac{1}{2}}^{2n-1} + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)(x-x_0-h)\dots[x-x_0-(n-1)h]}{(2n-1)!h^{2n-1}} f_{-\frac{1}{2}}^{2n-1} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)(x-x_0-h)\dots[x-x_0+(n-1)h](x-x_0+nh)}{(2n)!h^{2n}} f_0^{2n}.$$

Yenə də $x = x_0 + th$ əvəzləməsini aparsaq:

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + th) &= f_0 + t f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t+1)}{2!} f_0^2 + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} f_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots + \\ &+ \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{-\frac{1}{2}}^{2n-1} + \\ &+ \frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!} f_0^{2n}. \end{aligned}$$

Bu çoxhədliyə isə geriye interpolasiya üçün Qauss çoxhədliyi deyirlər.

Stirling çoxhədliyi. Gauss düsturlarını toplayıb ikiyə bölsək:

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + th) &= f_0 + t \frac{f_{1/2}^1 + f_{-1/2}^1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{t(t-1)}{2!} - \frac{t(t+1)}{2!} \right] f_0^2 + \frac{t(t^2-1^2)}{(3)!} \times \\ &\times \frac{f_{1/2}^3 + f_{-1/2}^3}{2} + \dots + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} \cdot \frac{f_{1/2}^{2n-1} + f_{-1/2}^{2n-1}}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} + \frac{t^2(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!} \right] f_0^{2n}. \end{aligned}$$

Aşkardır ki,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[\frac{(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} + \right. \\ &\left. + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!} \right] = \\ &= \frac{t^2(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən

$$\frac{1}{2} [f_{1/2}^{2n-1} + f_{-1/2}^{2n-1}] = f_0^{2n-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + th) &= f_0 + t f_0^1 + \frac{t^2}{2!} f_0^2 + \dots + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} \times \\ &\times f_0^{2n-1} + \frac{t^2(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!} f_0^{2n}. \end{aligned}$$

Bu çoxhədliyə Stirlingin interpolasiya çoxhədliyi deyirlər.

Bessel çoxhədliyi. x_1 nöqtəsində geriye interpolasiya üçün Qaussun interpolasiya düsturunu yazaq:

$$\begin{aligned} L(x_1 + ht') &= f_1 + t' f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t'(t'+1)}{2!} f_1^2 + \frac{t'(t'^2-1^2)}{3!} f_{\frac{1}{2}}^3 + \dots + \\ &+ \frac{t'(t'^2-1)\dots[t'^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n-1} + \frac{t'(t'^2-1)\dots[t'^2-(n-1)^2](t'+n)}{(2n)!} f_1^{2n}. \end{aligned}$$

Burada $t' = \frac{x-x_1}{h}$. Aydındır ki, $t' = t-1$. Bu əvəzləmədən istifadə edib

t' -dən t -yə keçsək:

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + th) &= f_1 + (t-1) f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{\frac{1}{2}}^3 + \dots + \\ &+ \frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-2)^2](t-n+1)(t-n)}{(2n-1)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n-1} + \\ &+ \frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} f_1^{2n}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Aşkardır ki,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[\frac{t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)}{(2n+1)!} + \frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n+1)(t-n)}{(2n+1)!} \right] = \\ &= \frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-(1/2))}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən

$$\frac{1}{2} [f_1^{2n} + f_0^{2n}] = f_{\frac{1}{2}}^{2n}.$$

Bu iki düsturu nəzərə almaqla (1.7) çoxhədliyi ilə irəliyə interpolasiya üçün Qauss çoxhədliyi toplayıb ikiyə bölsək:

$$L_n(x_0 + th) = f_{\frac{1}{2}} + \left(t - \frac{1}{2}\right) f_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_{\frac{1}{2}}^2 + \dots +$$

$$+ \frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n} +$$

$$+ \frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n+1}.$$

olduğunu alırıq. Bu çoxhədliliyə Bessel çoxhədlisi deyirlər.

Everetta çoxhədlisi. $(2n+1)$ tərtibli sonlu fərqlərin tərifinə əsasən

$$f_{1/2}^{2n+1} = f_1^{2n} - f_0^{2n}.$$

İrəliyə interpoliyası üçün Qauss çoxhədlisində bu düsturdan istifadə edərək tək tərtibdən olan sonlu fərqləri cüt tərtibli sonlu fərqlərlə əvəz etsək f_1^{2n} -nin əmsalı

$$\frac{t(t^2-1^2)\dots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}$$

şəklində, f_0^{2n} -nin əmsalı isə

$$\frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} - \frac{t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n^2)}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{(1-t)[(1-t)^2-1^2]\dots[(1-t)^2-n^2]}{(2n+1)!}$$

şəklində olar. Beləliklə,

$$L_n(x_0 + th) = tf_1 + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} f_1^2 + \dots + \frac{t(t^2-1^2)\dots(t^2-n^2)}{(2n+1)!} f_1^{2n} + \dots +$$

$$+ (1-t)f_0 + \frac{(1-t)[(1-t)^2-1^2]}{3!} f_0^2 + \dots +$$

$$+ \frac{(1-t)[(1-t)^2-1^2]\dots[(1-t)^2-n^2]}{(2n+1)!} f_0^{2n}$$

olduğunu alırıq. Bu çoxhədliliyə Everetta çoxhədlisi deyirlər.

Qalıq hədləri haqqında. Bu paragrafda verilən interpoliyası çoxhədlilərinin çıxarılışından görünür ki, bu çoxhədlilərin qalıq hədləri əsas çoxhədlilərin qalıq hədlərindən asan çevirmələr nəticəsində alınır.

bilər. Məsələn, Qauss çoxhədliləri üçün qalıq həddi aşağıdakı düsturla hesablanı bilər

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1)\dots(t^2-n^2).$$

Bessel çoxhədlisinin qalıq həddi isə aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$R_{2n} = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)\left(t - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \dots \left(n + \frac{1}{2}\right) t(t^2-1^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-n-1).$$

Asanlıqla digər çoxhədlilərin də qalıq hədlərini yazmaq olar.

§5. İnterpoliyası prosesinin yığılması

Tutaq ki, bizə $[a, b]$ parçasına daxil olan

$$x_0^{(0)},$$

$$x_0^{(1)}, x_1^{(1)},$$

$$x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)},$$

$$\dots$$

$$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$$

$$\dots$$

nöqtələr çoxluğu verilmişdir. Bu düyün nöqtələrindən istifadə edərək $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün Laqranjın interpoliyası çoxhədliləri ardıcılığını $L_n(x)$ ($n=0,1,2,\dots$) quraq.

Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.9)$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, interpoliyası prosesi yığılır: belə ki, bu yığılma müntəzəm olduqda prosesin müntəzəm yığıldığını söyləyirlər.

Bernşteyn isbat etmişdir ki, $[-1, 1]$ parçasında eyni məsafədə duran düyün nöqtələri üçün $(x_0^n = -1, x_n^n = 1)$ $f(x) = |x|$ funksiyası üçün qurulmuş Laqranjın interpoliyası çoxhədliləri ardıcılığı $-1, 0, 1$ nöqtələrindən fərqli nöqtələr üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) \neq f(x).$$

Aşağıdakı teorem (1.9)-un müntəzəm ödənilməsi üçün kafi şərtlər verir.

Əgər $f(x)$ funksiyasını x -lərin bütün qiymətlərində yığılan qüvvət sırası

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

şəklində göstərmək mümkünsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası tamdır.

Teorem 1.1. *Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası tamdır. Onda (1.8) şəklində ixtiyari düyün nöqtələri üzrə $f(x)$ funksiyası üçün qurulmuş $L_n(x)$ interpolasiya çoxhədliləri ardıcılığı $[a, b]$ parçasında müntəzəm olaraq $f(x)$ funksiyasına yığılır.*

İsbatı: $f(x)$ funksiyası tam olduğundan onun istənilən tərtibdən törəmələri də vardır. Buna görə də

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|.$$

Burada

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \omega_n(x) = (x - x_0^{(n)})(x - x_1^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}).$$

Aşkardır ki,

$$|\omega_n(x)| \leq (b - a)^{n+1}.$$

Onda

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}.$$

Teoremi isbat etmək üçün kifayətdir ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b - a)^{n+1} = 0$$

olduğunu isbat edək.

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!a_{n+1} + (n+2)(n+1)\dots 2a_{n+2}(x - x_0) + \dots + (n+k)(n+k-1)\dots ka_{n+k}(x - x_0)^{k-1} + \dots$$

olduğundan:

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq (n+1)!|a_{n+1}| + (n+2)(n-1)\dots 2|a_{n+2}||x - x_0| + \dots + (n+k)(n+k-1)\dots k|a_{n+k}||x - x_0|^{k-1} + \dots,$$

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq (n+1)^{n+1}|a_{n+1}| + (n+2)^{n+1}|a_{n+2}||x - x_0| + \dots + (n+k)^{n+1}|a_{n+k}||x - x_0|^{k-1} + \dots.$$

Məlumdur ki,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x \quad (x > 0).$$

Buradan

$$\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} < e^{k-1}.$$

Beləliklə,

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}|(e|x - x_0|) + \dots + |a_{n+k}|(e|x - x_0|)^{k-1} + \dots.$$

Bu bərabərsizliyin hər tərəfini ixtiyari qeyd edilmiş s ədədinin $n+1$ dərəcəsinə vursaq:

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} s^{n+1} \leq |a_{n+1}|s^{n+1} + |a_{n+2}|s^{n+1}(e|x - x_0|) + \dots + |a_{n+k}|s^{n+1}(e|x - x_0|)^{k-1} + \dots$$

olduğunu alırıq.

$$R = \max\{s, \max_{a \leq x \leq b} (e|x - x_0|)\}$$

işarələməsini aparsaq:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)^{n+1}} s^{n+1} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k, \\ \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} s^{n+1} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k. \end{aligned} \quad (1.10)$$

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k$ sırası yığıldığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} s^{n+1} = 0.$$

Digər tərəfdən

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

və

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

olduğundan

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} < \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}[e(b-a)]^{n+1}.$$

Bu axırıncı bərabərsizliyi nəzərə almaqla (1.10)-da $s = e(b-a)$ qəbul etsək:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0$$

olduğunu alırıq. Bu da tələb edilən isbatdır.

§6. Təkrarlanan düyün nöqtələri üçün interpolasiya çoxhədlisi

1. Bölünən fərqlər. Bölünən fərqlərə irəlidə verdiyimiz tərifdə düyün nöqtələrini müxtəlif götürmüşdük, əks halda $\frac{0}{0}$ qeyri-müəyyənliyinə rast gəlmiş olardıq. Düyün nöqtələri təkrarlananda bölünən fərqlər aşağıdakı kimi başa düşülür:

$$\begin{aligned} & f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{k_0}; \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k_1}; \dots; \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{k_n}) = \\ & = \lim_{x_i^{(j)} \rightarrow x_i} f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k_0-1)}; x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k_1-1)}; \dots, x_n, x_n^1, \dots, x_n^{(k_n-1)}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Burada $x_i^{(j)}$ müxtəlifdir.

Bu limitin varlığı üçün $f(x)$ funksiyasının kifayət qədər kəsilməz törəmələrinin varlığı fərz olunur.

Biz irəlidə (bax: § 1) isbat etmişdik ki, ümumiləşmiş interpolasiya çoxhədlisində $\varphi_n(x)$ -in əmsalı Δ_n / Δ ədədinə bərabərdir. Belə ki, xüsusi halda $\varphi_i = x^i$ götürmüş olsaq, alınan interpolasiya çoxhədlisində x^n -nin əmsalı aşağıdakı ədədə bərabər olar:

$$\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}$$

Nyutonun interpolasiya çoxhədlisində x^n -nin əmsalı $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ olduğundan

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}$$

düsturunu almış olarıq.

Kəsrin surətində duran determinantı $D(x_0, x_1, \dots, x_n, f)$, məxrəcini isə $D(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ilə işarə edək, (1.11) limitini hesablamaq üçün

$$\lim_{x_i^{(j)} \rightarrow x_i} \frac{D(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k_1-1)}, \dots, x_n, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(k_n-1)}, f)}{D(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k_1-1)}, \dots, x_n, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(k_n-1)})}$$

hesablayaq. Bunun üçün hər dəyişənə görə növbə ilə Lopital qaydasını tətbiq etmək kifayətdir.

Məsələn, xüsusi halda,

$$f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{k-2} & f(x_0) \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & (k-2)x_0^{k-3} & f'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-2)! & f^{(k-2)}(x_0) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f^{(k-1)}(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{k-2} & x_0^{(k-1)} \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & (k-2)x_0^{k-3} & (k-1)x_0^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-2)! & (k-1)!x_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (k-1)! \end{vmatrix}}$$

düsturunu almış olarıq.

2. Nyutonun ümumiləşmiş interpolasiya çoxhədlisi. Fərz edək ki, $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyasının kafi qədər kəsilməz törəmələri vardır. Bu funksiya və $x_0, x_1, \dots, x_n$ düyün nöqtələri üçün aşağıdakı şərtləri ödəyən $H_m(x)$ çoxhədlisini quraq:

$$\begin{aligned} H_m(x_0) &= f(x_0), \quad H'_m(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0) = f^{(\alpha_0-1)}(x_0), \\ H_m(x_1) &= f(x_1), \quad H'_m(x_1) = f'(x_1), \dots, \quad H_m^{(\alpha_1-1)}(x_1) = f^{(\alpha_1-1)}(x_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$H_m(x_n) = f(x_n), \quad H'_m(x_n) = f'(x_n), \dots, \quad H_m^{(\alpha_n-1)}(x_n) = f^{(\alpha_n-1)}(x_n).$$

Bunun üçün $x_0, x_1, \dots, x_n$ nöqtələri ilə yanaşı $[a, b]$ parçasında

$$x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}$$

düyün nöqtələrini də götürək. Bu nöqtələr elə seçilir ki,

$$x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, x_n, x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}$$

nöqtələrin içində təkrarlanmamı olmasın.

Onda bu nöqtələr üçün Nyutonun interpolasiya çoxhədlisini yazmaq olar:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_0^{(1)}) + (x-x_0)(x-x_0^{(1)})f(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) + \dots + \\ &+ (x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_0^{(\alpha_0-2)})f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}) + \\ &+ \dots + (x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_0^{(\alpha_0-1)})f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1) + \\ &+ (x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_0^{(\alpha_0-1)})(x-x_1)f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_n^{(\alpha_n-2)})f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}) + \\ &+ (x-x_0)(x-x_0^{(1)}) \dots (x-x_n^{(\alpha_n-1)})f(x, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Burada $x_i^j \rightarrow x_i$ şərt ilə limitə keçsək:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_0) + (x-x_0)^2 f(x_0, x_0, x_0) + \dots + \\ &+ (x-x_0)^{\alpha_0-1} f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0}) + (x-x_0)^{\alpha_0} f(\underbrace{x_0, \dots, x_0, x_1}_{\alpha_0}) + \\ &+ (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1) f(\underbrace{x_0, \dots, x_0, x_1, x_1}_{\alpha_0}) + \dots + (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1)^{\alpha_1} \dots \times \\ &\times (x-x_n)^{\alpha_n-1} f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n}) + (x-x_0)^{\alpha_0} \times \\ &\times (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} f(\underbrace{x, x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n}) \end{aligned}$$

olduğunu alarıq. Beləliklə,

$$f(x) = H_m(x) + R_m(x),$$

burada

$$m = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1,$$

$$\begin{aligned} H_m(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_0) + (x-x_0)^2 f(x_0, x_0, x_0) + \dots + (x-x_0)^{\alpha_0} \\ &\times (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_n)^{\alpha_n-1} f(x_0, \dots, x_0, x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$R_m(x) = (x-x_0)^{\alpha_1} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} f(x, x_0, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots, x_n).$$

İsbat edək ki, $H_m(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ funksiyası üçün interpolasiya çoxhədlisidir.

Aşkardır ki,

$$H_m(x_0) = f(x_0), \dots, H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0) = f^{(\alpha_0-1)}(x_0).$$

Biz (1.12) düsturunda x_0 əvəzinə ixtiyari x_i nöqtəsini də götürə bilərik. Bu halda $H_m(x)$ əvəzinə

$$\begin{aligned} &f(x_i) + (x-x_i)f(x_i, x_i) + \dots + (x-x_i)^{\alpha_i-1} f(\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{\alpha_i}) + \\ &+ (x-x_i)^{\alpha_i} f(\underbrace{x_i, \dots, x_i, x_j}_{\alpha_i}) + \dots \end{aligned}$$

$$H_m(x_i) = f(x_i), \dots, H_m^{(\alpha_i-1)}(x_i) = f^{(\alpha_i-1)}(x_i).$$

$$H_m(x_i) = f(x_i), \dots, H_m^{(\alpha_i-1)}(x_i) = f^{(\alpha_i-1)}(x_i).$$

§7. Çoxdəyişənli funksiyalar üçün interpolyasiya çoxhədliləri.

Fərz edək ki, $F(x, y)$ funksiyaının müstəvi üzərində götürülmüş

[illegible]

Əvvəlcə $y = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$) götürüb $F(x, y_i)$ -nin funksiyasını

Məsələn, Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisini (y -ə nəzərən) yazaq:

$$\begin{aligned}
F(x, y) = & F(x, y_0) + (y - y_0)f(x, y_0, y_1) + \dots + (y - y_0) \times \\
& \times (y - y_1) \dots (y - y_{m-1})f(x, y_0, y_1, \dots, y_m) + \\
& + (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_m)f(x, y_0, y_1, \dots, y_m, y). \quad (1.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y_0, y_1, \dots, y_k) &= f(x_0, y_0, y_1, \dots, y_k) + (x - x_0)f(x_0, x_1, y_0, \dots, y_k) + \dots + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_k) + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x, y_0, y_1, \dots, y_k). \end{aligned}$$
$$F(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(y-y_0)(y-y_1)...(y-y_{j-1})f(x_0, x_1, ..., x_i, y_0, y_1, ..., y_j) +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \sum_{i=0}^m (y - y_0)(y - y_1) \dots$$

$$\dots(y - y_{j-1})f(x, x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_j) +$$

$$+ (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_m) f(x, y, y_0, y_1, \dots, y_m).$$

$$f(x, x_0, \dots, x_n, y) = \sum_{j=0}^m (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{j-1}) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_j) + (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_m) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_m, y)$$
$$F(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{i=0}^m (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(y-y_0)(y-y_1)...$$

$$\dots(y - y_{i-1})f(x_0, x_1, \dots, x_i, y_0, y_1, \dots, y_i) + (x - x_0)(x - x_1)\dots$$

$$\dots(x-x_n)f(x,x_0,x_1,\dots,x_n,y)+(y-y_0)(y-y_1)\dots$$

$$\dots(y - y_m)f(x, y_0, y_1, \dots, y_m) - (x - x_0)(x - x_1)\dots$$

$$\dots(x - x_n)(y - y_0)(y - y_1)\dots(y - y_m) \times$$

$$\times f(x, x_0, x_1, \dots, x_n, y, y_0, y_1, \dots, y_m) = L_n(x, y) + R_n(x, y)$$

$$L_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(y - y_0)(y - y_1) \dots$$

$$\dots(y - y_{j-1})f(x_0, x_1, \dots, x_i, y_0, y_1, \dots, y_j)$$

$$\begin{aligned}
R_n(x, y) = & (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n, y) + \\
& + (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_m) f(x, y_0, y_1, \dots, y_m) - \\
& - (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)(y - y_0)(y - y_1) \dots \\
& \dots (y - y_m) f(x, x_1, \dots, x_n, y, y_0, y_1, \dots, y_m)
\end{aligned}$$

Qeyd edək ki, yuxarıda çoxdəyişənli funksiyalar üçün interpolyasiya çoxhədlisinin qurulma üsullarından birini verdik. Başqa üsullarla da

interpolyasiya çoxhədlilərini qurmaq olar. Lakin bu bir çox çətinliklərlə bağlıdır. Məsələn, bu hal üçün interpolyasiya düyünləri ixtiyari seçilə bilməz. Çoxdəyişənli funksiyalar üçün qalığ həddini də qiymətləndirmək xüsusi çətinliklə bağlıdır. Məsələn, burada bir dəyişənli funksiyada olduğu kimi Roll teoremindən istifadə etmək mümkün deyil.

§ 8. Splaynlar vasitəsilə yaxınlaşmalar

İnterpolyasiya çoxhədlilərinin nöqsan cəhətlərindən biri bu çoxhədlilər ardıcılığının interpolyasiya olunan funksiya bəzən yığılmasıdır. Elə sonsuz sayda diferensiallanan funksiya var ki, bunun üçün qurulmuş interpolyasiya çoxhədliləri ardıcılığı yığılmır. Son zamanlar, bu səbəbdən, interpolyasiya çoxhədliləri əvəzinə splaynlardan istifadə edirlər. İnterpolyasiya splaynlarının qiymətləri EHM-də asanlıqla hesablanır və onların ardıcılığı yaxşı yığılma xassəsinə malik olur.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuşdur. Bu parçanı n hissəyə bölək:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (n \geq 2).$$

Tərif. Aşağıdakı şərtləri ödəyən, $S_2 = S_2(x, f)$ funksiyasına $f(x)$ funksiyası üçün interpolyasiya parabolik splaynı deyirlər:

- a) S_2 funksiyası $x \in \left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right]$ kvadrat üçhədlidir;
- b) S_2 funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz diferensiallanandır,
- c) $S_2(x_i, f) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$),
- ç) $S_2'(a) = A$, $S_2'(b) = B$,

burada A, B verilmiş həqiqi ədədlərdir. Bu ədədlərin konkret seçilməsi verilmiş məsələdən asılıdır. Məsələn, əgər $f(x)$ diferensiallanan funksiya dırsa, onda $A = f'(a)$, $B = f'(b)$ götürmək olar.

Aşağıdakı işarəmələri aparaq:

$$m_i = S_2'(x_i, f) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

İsbat edək ki, verilmiş $f(x)$ funksiyası üçün yeganə interpolyasiya parabolik splaynı var.

$$S_2(x, f) = f(x_i) + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)_+^2 \quad (1.15)$$

funksiyasına baxaq. Burada $(x - t)_+ = \max(0, x - t)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$

($i = 0, 1, \dots, n-1$), d_i, c_i ədədlərini elə seçək ki,

$$S_2(x_{i+1}, f) = f(x_{i+1}), \quad S_2'(x_{i+1}, f) = m_{i+1}$$

olsun. Onda:

$$d_i = -4 \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i^2} + 2 \frac{m_i + m_{i+1}}{h_i},$$

$$c_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{2h_i} + 2 \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i^2} - \frac{m_i + m_{i+1}}{h_i}$$

olar.

$$S_2''(x_{i+1} - 0, f) = S_2''(x_{i+1} + 0, f)$$

şərtini nəzərə alsaq:

$$c_i + d_i = c_{i+1}$$

və ya

$$\frac{m_i}{h_i} + 3 \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} m_{i+1} + \frac{m_{i+2}}{h_{i+1}} = 4 \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i^2} + 4 \frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h_i^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (1.16)$$

olduğunu alarıq. Nəhayət, 2) şərtinin ödənməsi üçün

$$m_0 = A, \quad m_n = B \quad (1.17)$$

götürmək lazımdır.

(1.16), (1.17) xətti sistemdir ($m_0, m_1, \dots, m_n$ -ə nəzərən). Bu sistemi həll edib m_i ($i = 0, 1, \dots, n$)-ləri tapmaq olar.

Beləliklə, (1.15) düsturu ilə təyin olunan $S_2(x, f)$ funksiyası yeganə surətdə təyin olunur və interpolyasiya parabolik splaynın şərtlərini ödəyir.

İsbat olunur ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında iki dəfə kəsilməz diferensiallanırsa, onda approksimasiya xətası aşağıdakı düsturla qiymətləndirilir:

$$|f^{(l)}(x) S_2^{(l)}(x, f)| \leq K_l \|\Delta_n\|^{2-l} \alpha_n \quad (x \in [a, b], l = \overline{0, 2}).$$

Burada

$$\alpha_n = \frac{3}{7} \omega(f^n, \|\Delta_n\|) + \max \left\{ \frac{4}{7} \omega(f^n, \|\Delta_n\|), \frac{8}{7} \left| \frac{f(x_0, x_1) - A}{h_0} - \frac{1}{2} f''(x_0) \right|, \frac{8}{7} \left| \frac{f(x_{n-1}, x_n) - B}{h_{n-1}} - \frac{1}{2} f''(x_n) \right| \right\},$$

$$K_0 = \frac{7}{8}, \quad K_1 = K_2 = \frac{7}{2}, \quad \|\Delta_n\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

$$\omega(f, \delta) = \max_{\substack{t, t+h \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x+h) - f(x)|.$$

Əgər $f(x)$ kəsilməz diferensiallanan funksiyadırsa onda,

$$|f^{(l)}(x) - S_2^{(l)}(x, f)| \leq K_l \|\Delta_n\|^{1-l} \alpha_n \quad (l = 0, 1).$$

Burada

$$\alpha_n = \omega(f', \|\Delta_n\|) + \frac{3}{5} \max(|f'(x_0) - A|, |f'(x_n) - B|), \quad K_1 = 2K_0 = 5.$$

İndi isə kub splaynın tərifini verək.

Tərif. Aşağıdakı şərtləri ödəyən $S_3 = S_3(x, f)$ funksiyasına *interpolyasiya kub splaynı* deyirlər:

- a) S_3 funksiyası $(x \in [x_i, x_{i+1}])$ kub çoxhədlidir,
- b) S_3 funksiyası $[a, b]$ parçasında iki tərtibdən kəsilməz diferensiallananır,
- c) $S_3(x_i, f) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$),
- ç) $S_3'(a, f) = A$, $S_3'(b, f) = B$.

Yuxarıdakı qayda ilə asanlıqla yoxlanılır ki,

$$\begin{aligned} S_3(x, f) = & m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2 (x - x_{i-1})}{h_{i-1}^2} - m_i \frac{(x - x_{i-1})^2 (x_i - x)}{h_{i-1}^2} + \\ & + f(x_{i-1}) \frac{(x_i - x)^2 [2(x - x_{i-1}) + h_{i-1}]}{h_{i-1}^3} + \\ & + f(x_i) \frac{(x - x_{i-1})^2 [2(x_i - x) + h_{i-1}]}{h_{i-1}^3} \end{aligned}$$

funksiyası $f(x)$ üçün interpolyasiya kub splayndır. Burada m_i , yeganə olaraq a)- ç) şərtlərindən tapılır.

İsbat edilir ki, əgər $f(x)$ $[a, b]$ parçasında ikinci tərtibdən kəsilməz diferensiallananırsa, onda approksimasiya xətası aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$|f^{(l)}(x) - S_2^{(l)}(x, f)| \leq K_l \|\Delta_n\|^{2-l} \alpha_n \quad (x \in [a, b], l = 0, 1, 2).$$

Burada

$$\begin{aligned} \alpha_n = & \frac{2}{5} \omega(f'', \|\Delta_n\|) + \max \left\{ \frac{4}{5} \omega(f'', \|\Delta_n\|), \frac{6}{5} \left| f(x_0, x_1) - A - \frac{f''(x_0)}{2} \right|, \right. \\ & \left. \frac{6}{5} \left| f(x_{n-1}, x_n) - B + \frac{f''(x_n)}{2} \right| \right\}, \quad K_2 = K_1 = 4K_0 = 5. \end{aligned}$$

Əgər $f(x)$ kəsilməz diferensiallandırsa, onda:

$$|f^{(l)}(x) - S_3^{(l)}(x, f)| \leq K_l \|\Delta_n\|^{1-l} \alpha_n \quad (l = 0, 1), \quad 2K_0 = K_1 = 5,$$

$$\alpha_n = \omega(f', \|\Delta_n\|) + \frac{1}{5} \max \{|f'(x_0) - A|, |f'(x_n) - B|\}.$$

§ 9. Ən yaxşı yaxınlaşmalar

Dərəcəsi n -dən böyük olmayan cəbri çoxhədlilər çoxluğunu $H_n(P)$ ilə işarə edək. $[0, 1]$ parçasında təyin olunan $f(x)$ funksiyası və $P_n(x) \in H_n(P)$ çoxhədlisini götürüb

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)|$$

ədədinə baxaq. Bu ədədə $f(x)$ funksiyasının $P_n(x)$ çoxhədlisindən meyl deyilir və $E_n(f, P_n)$ ilə işarə edilir.

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n} E_n(f, P_n)$$

ədədinə ən kiçik meyl deyilir.

İsbat edilir ki, yeganə $P_n^*(x) \in H_n(P)$ çoxhədlisi var ki,

$$E_n(f, P_n^*) = E_n(f)$$

şərtini ödəyir. Belə $P_n^*(x)$ çoxhədlisinə $f(x)$ funksiyasına ən yaxşı yaxınlaşan çoxhədli deyirlər.

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Bernşteyn çoxhədlisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f, B_n) = 0$$

şərtini ödəyir.

$$0 \leq E_n(f) \leq E_n(f, B_n)$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0.$$

İsbat olunub ki, əgər $f(x)$ funksiyanın $[-1,1]$ parçasında p tərtibdən kəsilməz törəməsi varsa və $f^{(p)}(x)$ Lipsits şərtini ödəyirsə, onda ən kiçik meyl aşağıdakı şərti ödəyir:

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$

Bu fakt göstərir ki, $f(x)$ kafı qədər hamar funksiyadirsə, onda $E_n(f)$ çox böyük sürətlə yığılır, buna görə də bu halda $f(x)$ funksiyasına ən yaxşı yığılan çoxhədlilər qurmaq əlverişlidir.

İndi isə triqonometrik çoxhədlilərlə ən yaxşı yaxınlaşmalara baxaq.

Riyazi analizdən Veyyerştrasın ikinci teoreminə əsasən, 2π periodlu kəsilməz $f(x)$ funksiyasını müntəzəm yığılan triqonometrik çoxhədlilərin limiti kimi götürmək olar. Deməli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f, T_n) = 0,$$

burada $T_n(x)$ triqonometrik çoxhədlidir.

İsbat olunub ki, əgər 2π periodlu $f(x)$ funksiyanın p tərtibdən törəməsi varsa və $f^{(p)}(x)$ Lipsits şərtini ödəyirsə onda ən kiçik meyl

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

şərtini ödəyir. Bu fakt ən yaxşı yaxınlaşan triqonometrik çoxhədlilərin tərtibini təyin edir. Ən yaxşı yaxınlaşan çoxhədliləri qurmaq üçün müxtəlif üsullar məlumdur.

§ 10. Orta kvadratik yaxınlaşmalar

İnterpolyasiya məsələsində elə çoxhədli axtarırdıq ki, bu çoxhədlinin düyün nöqtələrində qiymətləri verilmiş funksiyanın bu nöqtələrindəki qiymətləri ilə üst-üstə düşsünlər. Bir çox məsələlərdə belə interpolyasiya əlverişli olmur. Buna görə də verilmiş funksiya üçün elə çoxhədli axtarırlar ki, bunların fərqi bütün parçada müəyyən mənada sıfıra yaxın olur (düyün nöqtələrdə sıfıra çevrilməyə də bilər).

$[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün elə $P_m(x)$ ümumiləşmiş çoxhədlisini tapmaq lazımdır ki,

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (1.18)$$

inteqralı və ya

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (1.19)$$

cəmi (funksiyanın qiymətləri yalnız düyün nöqtələrində verildikdə) mümkün qədər kiçik qiymət alsın.

Bu məsələyə orta kvadratik yaxınlaşma məsələsi deyirlər.

1. Funksiyanın analitik ifadəsi verildikdə.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında verilmişdir və $a_1, a_2, \dots, a_m$ ədədlərini elə seçək ki, (1.18) ifadəsi kifayət qədər kiçik olsun. Burada $a_1, a_2, \dots, a_m$ ədədləri ümumiləşmiş çoxhədlinin əmsallarıdır:

$$P_n(x) = a_1 \varphi_0(x) + \dots + a_m \varphi_m(x). \quad (1.20)$$

$\{\varphi_i(x)\}$ ($a \leq x \leq b$) xətti asılı olmayan kəsilməz funksiyalar sistemidir.

$$J(a_1, a_2, \dots, a_m) = \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (1.21)$$

işarələnməsini aparaq. Aşkardır ki,

$$\frac{\partial J(a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_k} = -2 \int_a^b [f(x) - P_m(x)] \varphi_k(x) dx \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

a_i -ləri tapmaq üçün aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemini almış oluruq:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - P_m(x)] \varphi_k(x) dx &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m), \\ \sum_{i=0}^m (\varphi_i, \varphi_k) a_i &= (f, \varphi_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (1.22)$$

burada

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx, \quad (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

(1.22) sisteminin determinantı $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ funksiyaları üçün Qramm determinantıdır. $\{\varphi_i(x)\}$ sistemi xətti asılı olmadığından bu determinant sıfırdan fərqlidir. Buna görə də (1.22) sisteminin yeganə həlli var.

Qeyd edək ki, $\{\varphi_i\}$ sistemi ortonormal sistem təşkil etdikdə

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

(1.22) sisteminin həlli

$$a_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Aşkardır ki, a_i -lər üçün tapdığımız bu qiymətləri (1.20) çoxhədli-sində yerinə yazsaq, tapdığımız çoxhədli (1.21) funksiyasına minimum verəcəkdir.

Bəzi xüsusi hallara baxaq. Əvvəlcə fərz edək ki,

$$\varphi_i(x) = x^i \quad (i = 0, 1, \dots, m).$$

Bu halda axtarılan çoxhədli

$$P_m(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + a_m x^m$$

m dərəcəli olar və onun əmsalları aşağıdakı sistemdən təyin edilir:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^m \left(\int_a^b x^i dx \right) a_i &= \int_a^b f(x) dx, \\ \sum_{i=0}^m \left(\int_a^b x^{i+1} dx \right) a_i &= \int_a^b x f(x) dx, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^m \left(\int_a^b x^{i+m} dx \right) a_i &= \int_a^b x^m f(x) dx. \end{aligned} \right\}$$

İndi isə fərz edək ki, $f(x)$ 2π periodlu funksiyadır:

$a = 0, \quad b = 2\pi$ və

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \sin x, \quad \varphi_2(x) = \cos x, \quad \varphi_3(x) = \sin 2x,$$

$$\varphi_4(x) = \cos 2x, \dots, \quad \varphi_{2k-1}(x) = \sin kx, \quad \varphi_{2k}(x) = \cos kx.$$

Bu halda axtarılan çoxhədli

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

trigonometrik çoxhədli olar və onun əmsalları aşağıdakı qayda ilə təyin olunur:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos ix dx, \quad b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix dx.$$

Bu ifadələr riyazi analiz kursundan məlum olan $f(x)$ funksiyası üçün Furiye əmsallarıdır.

2. Funksiyanın düyün nöqtələrində qiymətləri verildikdə. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyasının $x_0, x_1, \dots, x_n$ düyün nöqtələrində qiymətləri verilmişdir və $a_1, a_2, \dots, a_m$ ədədlərini elə seçək ki, (1.19) ifadəsi kifayət qədər kiçik olsun. Bunun üçün

$$J(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2$$

funksiyasına minimum verən a_i -ləri tapmaq.

Bunun üçün a_i -ləri aşağıdakı tənliklər sistemindən tapmaq lazımdır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_k} &= -2 \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)] \varphi_k(x_i) = 0, \\ \sum_{j=0}^m A_{jk} a_j &= F_k \quad (k = 0, 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (1.23)$$

burada

$$A_{jk} = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \quad F_k = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_k(x_i).$$

(1.23) sisteminin determinantı xətti asılı olmayan $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyalar sistemindən düzəlmiş Qramm determinantının diskret analoqu olduğundan sıfırdan fərqlidir. Buna görə də (1.23) sisteminin yeganə həlli var. Tapılan a_i -lərin bu qiymətlərini (1.20)-də yerinə yazsaq, axtarılan çoxhədliyi tapmış olarıq.

Bəzi xüsusi halları nəzərdən keçirək. Əvvəlcə fərz edək ki,

$$\varphi_i(x) = x^i \quad (i = 0, 1, \dots, m).$$

Bu halda axtarılan çoxhədli

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

m dərəcəli cəbri çoxhədli olar və onun əmsalları aşağıdakı sistemdən təyin edilir:

İndi isə fərz edək ki, $f(x)$, 2π -periodlu funksiyadır, $a=0, b=2\pi$,
 $m=2k+1, x_i = \frac{2\pi i}{n} (i=0,1,\dots,n)$ və $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=\sin(x), \varphi_2(x)=\cos x, \dots$,
 $\varphi_{2k-1}(x) = \sin kx, \varphi_{2k}(x) = \cos kx$. Bu halda axtarılan çoxhədli

trigonometrik çoxhədli olar və onun əmsalları aşağıdakı düsturlarla təyin olunur:

Nəhayət, qeyd etmək lazımdır ki, hər iki halda $\varphi_i(x)$ ($i=0,1,\dots,n$) funksiyaları əvəzinə xüsusi ortoqonal çoxhədlilər də götürülür (məsələn, Lejandra, Çebışev, Yakobi və başqa çoxhədlilər). Bu halların hamısında $P_m(x)$ cəbri çoxhədli olur.

ƏDƏDİ DİFERENSİALLAMA VƏ İNTEQRALLAMA

Məlumdur ki, verilmiş funksiyanın törəməsinin lazım olan nöqtədə dəqiq qiymətini və eləcə də bu funksiyanın integralının dəqiq qiymətini həmişə tapmaq mümkün olmur. Buna görə də bu fəsilə funksiyanın törəməsinin və integralının təqribi qiymətlərini tapmaq üçün müxtəlif üsullar verilir.

Funksiyanın analitik ifadəsi mürəkkəb olduqda verilmiş nöqtədə onun törəməsinin dəqiq qiymətini praktikada hesablamaq çox vaxt mümkün olmur. Əgər funksiya «cədvəl üsulu» ilə verilibsə, yəni funksiyanın qiymətləri sonlu sayda nöqtələrdə verilibsə və onun verilmiş nöqtədə törəməsini hesablamaq tələb edilsə, diferensial hesabı kursundan məlum üsullar məsələni həll etmək imkanına malik deyildir. Buna görə də bu məsələləri həll etmək üçün təqribi üsullardan istifadə edilir. Bu üsulların əsas ideyası belədir.

Verilmiş $f(x)$ funksiyasını, interpolasiya funksiyası- $P(x)$ ilə əvəz edirlər və

düsturundan istifadə edib $f(x)$ -in istənilən tərtibdən törəməsinin təqribi qiymətini tapırlar.

Fərz edək ki,

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

burada $R(x)$ qalıq həddidir. $f(x)$ funksiyasını interpolyasiya funksiyası ilə əvəz etdikdə $R(x)$ -in kifayət qədər kiçik olduğunu qəbul etmişdik. Lakin misallar gətirmək olar ki, $R(x)$ -in kafi qədər kiçik olmasına baxmayaraq, $R^{(i)}(x)$ kafi qədər böyük ola bilər. Buna görə də $f^{(i)}(x)$ təqribi hesabladığımızda hər dəfə $R^{(i)}(x)$ -də qiymətləndirmək lazım gəlir.

Bəzi interpolyasiya çoxhədlilərindən istifadə edərək ədədi diferensial-lama düsturlarını verək.

Nyutonun interpolyasiya düsturuna baxaq:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Buradan

$$f(x) \approx f(x_0) + f(x_0, x_1)\omega_0(x) + f(x_0, x_1, x_2)\omega_1(x) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)\omega_{n-1}(x),$$

$$R_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x), \quad \omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Onda

$$f'(x) \approx f(x_0, x_1) + f(x_0, x_1, x_2)\omega'_1(x) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)\omega'_{n-1}(x), \quad (2.1)$$

$$R'_n(x) = \frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x) + f(x, x_0, \dots, x_n)\omega'_n(x)$$

olduğunu alırıq.

Qalıq həddin törəməsini başqa şəkildə yazmaq. Aşkardır ki,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, x_0, \dots, x_n) - f(x, x_0, \dots, x_n)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x, x, x_0, \dots, x_n) = f(x, x, x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Onda

$$R'_n(x) = f(x, x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x) + f(x, x_0, \dots, x_n)\omega'_n(x). \quad (2.2)$$

Bölünən fərqlərlə törəmələr arasında olan əlaqə düsturlarından istifadə etsək:

$$R'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'_n(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} \omega_n(x). \quad (2.3)$$

(2.1) düsturunun köməyiylə $f(x)$ funksiyasının törəməsinin təqribi qiymətini ixtiyari nöqtədə tapmaq olar. Qalıq həddi (2.2) və ya (2.3) düsturu vasitəsilə qiymətləndirilir.

İndi isə (2.1) və (2.2) düsturlarını diferensiallayaq:

$$f''(x) \approx 2f(x_0, x_1, x_2) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)\omega'_2(x) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)\omega'_{n-1}(x), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} R''_n(x) &= \frac{d}{dx} f(x, x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x) + f(x, x, x_0, \dots, x_n)\omega'_n(x) + \\ &+ \frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x) + f(x, x_0, \dots, x_n)\omega'_n(x). \end{aligned}$$

Qalıq həddini başqa şəkildə yazmaq. Aşkardır ki,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x, x, x_0, \dots, x_n) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, x + \Delta x, x_0, \dots, x_n) - f(x, x, x_0, \dots, x_n)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, x + \Delta x, x_0, \dots, x_n) - f(x + \Delta x, x, x_0, \dots, x_n)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, x, x_0, \dots, x_n) - f(x, x, x_0, \dots, x_n)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x, x + \Delta x, x, x_0, \dots, x_n) + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x, x, x, x_0, \dots, x_n) = 2f(x, x, x, x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Onda

$$\begin{aligned} R''_n(x) &= 2f(x, x, x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x) + 2f(x, x, x_0, \dots, x_n)\omega'_n(x) + \\ &+ f(x, x_0, \dots, x_n)\omega''_n(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Bölünən fərqlərlə törəmələr arasında olan əlaqə düsturlarından istifadə etsək:

$$R''_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega''_n(x) + 2 \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \omega'_n(x) + 2 \frac{f^{(n+3)}(\xi)}{(n+3)!} \omega_n(x). \quad (2.6)$$

(2.4) düsturundan istifadə edərək $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtibdən törəməsinin təqribi qiymətini ixtiyari nöqtədə hesablamaq olar. Qalıq həddi (2.5) və ya (2.6) düsturları ilə qiymətləndirilir.

Yüksək tərtibli törəmələrin təqribi qiymətlərini hesablamaq üçün (2.4) düsturundan törəmələr almaq kifayətdir. Qalıq həddini almaq üçün (2.5)-i diferensiallamaq lazımdır.

İndi isə irəliyə interpolasiya üçün Nyutonun interpolasiya çox-hədlisini götürək:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0 + th) &\approx f_0 + f_{1/2}^1 t + f_1^2 \frac{t(t-1)}{2!} + f_{3/2}^3 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} + \\ &+ f_2^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} + \dots + f_{n/2}^n \frac{t(t-1) \dots [t - (n-1)]}{n!}. \end{aligned}$$

Ardıcıl olaraq diferensiallasaq:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left[f_{1/2}^1 + f_1^2 \frac{2t-1}{2!} + f_{3/2}^3 \frac{3t^2-6t+2}{3!} + f_2^4 \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} + \dots \right],$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h_2} \left[f_1^2 + f_{3/2}^3 \frac{6t-6}{3!} + f_2^4 \frac{12t^2-36t+22}{4!} + \dots \right],$$

$$f'''(x) \approx \frac{1}{h^3} \left[f_{3/2}^3 + \frac{24t-36}{4!} f_2^4 + \dots \right],$$

.....
düsturlarını almış olarıq ki, bunlardan istifadə etməklə funksiyanın törəmələrini ixtiyari nöqtədə hesablamaq olar.

Eyni qayda ilə başqa interpolyasiya çoxhədlilərindən də istifadə etmək olar.

Nəhayət, qeyd edək ki, interpolyasiya splaynları vasitəsilə də ədədi diferensiallamaq düsturlarını almaq olar.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası iki dəfə diferensiallanan funksiyadır. Bu funksiyanın törəməsini

$$f'(x) \approx S'_2(x, f), \quad f'(x) \approx S'_3(x, f)$$

düsturları ilə hesablasaq qalığı hədlər uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla qiymətləndirilir (bax: I fəsil, § 8):

$$|f'(x) - S'_2(x, f)| = O(h), \quad |f'(x) - S'_3(x, f)| = O(h).$$

İnterpolyasiya splaynları, onların törəmələri və qalığı hədləri haqda geniş məlumat kitabın axırında verilmiş ədəbiyyat siyahısında [10] verilir.

§ 2. Ədədi integrallama

Məlumdur ki, bir çox halda verilmiş funksiyanın integralını hesablamaq olmur. Buna görə də belə integralları hesablamaq üçün bir çox təqribi üsullar təklif olunur.

1. Nyuton-Kotes düsturu. Tutaq ki.

$$\int_c^d f(x) dx \quad (2.7)$$

integralını hesablamaq tələb olunur.

İnterpolyasiya düyünlərini

$$x_i = a + ih \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

şəklində götürək. Əgər $a=c$ isə onda $d=a+(n+1)h$ götürəcəyik. Bu halda $[c, d]$ parçası $n+1$ bərabər hissəyə bölünür və c, d nöqtələri düyün nöqtələri çoxluğuna daxil olurlar. Əgər $a=c-h$ isə onda $d=a+nh$ götürülür. Bu halda $[c, d]$ parçası $n-1$ hissəyə bölünür və c, d nöqtələri düyün nöqtələri çoxluğuna daxil olurlar.

Birinci halda alınan ədədi integrallama düsturuna açıq tipli düstur, ikinci halda isə qapalı düstur deyirlər. (2.7) integralında $c=a+(1-k)h$, $d=a+(n+k)h$ götürəcəyik. $k=1$ olduqda alınan düstur açıq tipli, $k=0$ olduqda isə qapalı tipli olur.

$F(y)=f(a+hy)$ ilə işarə etsək, (2.7) integralı aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\int_c^d f(x) dx = h \int_{1-k}^{n+k} F(y) dy.$$

Eyni məsafədə duran düyün nöqtələri üçün Laqranjın interpolyasiya düsturunu yazaq:

$$F(y) = L_n(y) + (y-1)(y-2)\dots(y-n)F(y, 1, 2, \dots, n),$$

$$L_n(y) = \sum_{i=1}^n \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-i+1)(y-i-1)\dots(y-n)}{(i-1)(i-2)\dots 1 \cdot (-1)\dots(i-n)} F(i).$$

Onda

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= h \int_{1-k}^{n+k} \sum_{i=1}^n \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-i+1)(y-i-1)\dots(y-n)}{(i-1)(i-2)\dots 1 \cdot (-1)\dots(i-n)} F(i) dy + \\ &+ h \int_{1-k}^{n+k} (y-1)(y-2)\dots(y-n) F(y, 1, 2, \dots, n) dy = \\ &= h \sum_{i=1}^n \left(\int_{1-k}^{n+k} \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-i+1)(y-i-1)\dots(y-n)}{(i-1)(i-2)\dots 1 \cdot (-1)\dots(i-n)} dy \right) F(i) + \\ &+ h \int_{1-k}^{n+k} (y-1)(y-2)\dots(y-n) F(y, 1, 2, \dots, n) dy = \\ &= h \sum_{i=1}^n \left(\int_{1-k}^{n+k} (-1)^{n-i} \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-n)}{(i-1)!(n-i)!(y-i)} dy \right) F(i) + \\ &+ h \int_{1-k}^{n+k} (y-1)(y-2)\dots(y-n) F(y, 1, 2, \dots, n) dy = \\ &= (d-c) \sum_{i=1}^n J_{i,k}^{(n)} f(a+ih) + R_{n,k}, \end{aligned}$$

burada

$$J_{i,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)(i-1)!(n-i)!} \int_{1-k}^{n+k} \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-n)}{y-i} dy,$$

$$R_{n,k} = h \int_{1-k}^{n+k} (y-1)(y-2)\dots(y-n) F(y, 1, 2, \dots, n) dy.$$

Beləliklə,

$$\int_c^d f(x) dx = (d-c) \sum_{i=1}^n J_{i,k}^{(n)} f(a+ih) + R_{n,k}$$

olduğunu alırıq. Bu düstura Nyuton-Kotes düsturu deyirlər.

Qeyd edək ki, $J_{i,k}^{(n)}$ əmsalları c, d və $f(x)$ -dən asılı deyillər və onları bir dəfəlik hesablamaq olar. Onu da qeyd edək ki, bu əmsallar aşağıdakı xassəyə də malikdir:

$$J_{i,k}^{(n)} = J_{n-i+1,k}^n.$$

Doğrudan da,

$$J_{n-i+1,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k)(n-i)!(i-1)!} \int_{1-k}^{n+1} \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-n)}{y-n+i-1} dy$$

integralında $y = n+1-z$ əvəzləməsini aparsaq:

$$\begin{aligned} J_{n-i+1,k}^{(n)} &= \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k)(n-i)!(i-1)!} \int_{n+k}^{1-k} \frac{(n-z)(n-z-1)\dots(-z+1)}{i-z} dz = \\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)(n-i)!(i-1)!} \int_{1-k}^{n+k} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}{z-i} dz = J_{i,k}^{(n)} \end{aligned}$$

olduğunu alırıq.

Aşağıda Nyuton- Kotes düsturunun bəzi xüsusi hallarına baxılır və bu xüsusi hallar üçün $f(x)$ funksiyası üzərinə əlavə şərtlər qoyaraq, qalıq həddinin ifadələri hesablanır.

2. Nyuton-Kotes düsturunun xüsusi halları.

Əvvəlcə fərz edək ki, $n = 1$ ($k = 0$). Bu halda:

$$L_0(x) = f\left(\frac{c+d}{2}\right).$$

Onda

$$\int_c^d f(x) dx = f\left(\frac{c+d}{2}\right)(d-c) + R_1. \quad (2.8)$$

Məlumdur ki, $\int_c^d f(x) dx$ ayrıxətli trapesin sahəsinə bərabərdir. (2.8)

düsturundan alırıq ki,

$$\int_c^d f(x) dx \approx f\left(\frac{c+d}{2}\right)(d-c).$$

Bu onu göstərir ki, ayrıxətli trapesin sahəsi əvəzinə oturacağı $d-c$, hündürlüyü isə $f\left(\frac{c+d}{2}\right)$ olan düzbucaqlının sahəsi götürülür. Buna görə də (2.8) düsturuna düzbucaqlılar düsturu deyirlər. Bu düsturun qalıq həddini hesablayaq.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[c, d]$ parçasında iki dəfə diferensiallandı. Onda Teylor düsturuna əsasən

$$f(x) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f'\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(x - \frac{c+d}{2}\right) + f''(\xi) \frac{\left(x - \frac{c+d}{2}\right)^2}{2}, (\xi \in [c, d]).$$

Buradan

$$\int_c^d f(x) dx = f\left(\frac{c+d}{2}\right)(d-c) + R_1, \quad R_1 = \frac{1}{2} \int_c^d f''(\xi) \left(x - \frac{c+d}{2}\right)^2 dx.$$

Qalıq həddini hesablamaq üçün orta qiymət haqqındakı teoremdən istifadə edək:

$$R_1 = \frac{\mu}{2} \int_c^d \left(x - \frac{c+d}{2}\right)^2 dx = \frac{(d-c)^3}{24} \mu, \quad \mu \in \left[\inf_x f''(x), \sup_x f''(x)\right].$$

Onda

$$R_1 = \frac{(d-c)^3}{24} f''(\eta), \quad \eta \in [c, d].$$

$d-c$ kiçik ədəd olmadıqda (2.8) düsturundan istifadə etmək əlverişli olmur. Buna görə də, adətən, $[c, d]$ parçasını m bərabər hissəyə bölüb, hər kiçik parça üçün bu düsturu tətbiq edirlər. Bu halda

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[f\left(c + \frac{h}{2}\right) + f\left(c + \frac{3h}{2}\right) + \dots + f\left(c + \frac{2m-1}{2}h\right) \right] + \frac{h^3}{24} f''(\eta)$$

olduğunu alırıq. Burada $h = \frac{d-c}{m}$, $\eta \in [c, d]$. İndi isə fərz edək ki,

$n=2$ ($k=0$). Bu halda

$$L_1(x) = \frac{x-c}{d-c} f(d) + \frac{x-d}{c-d} f(c).$$

Onda

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d L_1(x) dx + R_2,$$

$$\int_c^d f(x) dx = \frac{d-c}{2} [f(c) + f(d)] + R_2,$$

$$R_2 = \int_c^d (x-c)(x-d) f(x, c, d) dx = \frac{f''(\eta)}{2!} \times$$

$$\times \int_c^d (x-c)(x-d) dx = -\frac{(d-c)^3}{12} f''(\eta), \eta \in [c, d].$$

Beləliklə,

$$\int_c^d f(x) dx = \frac{d-c}{2} [f(c) + f(d)] - \frac{(d-c)^3}{12} f''(\eta). \quad (2.9)$$

Buradan da

$$\int_c^d f(x) dx \approx \frac{d-c}{2} [f(c) + f(d)].$$

Bu onu göstərir ki, $\int_c^d f(x) dx$ integralın təqribi qiyməti kimi trapesin

sahəsi götürülür. Buna görə də (2.9) düsturuna trapeslər düsturu deyirlər.

Düzbucaqlılar düsturunda olduğu kimi $d-c$ kiçik ədəd olmadıqda $[c, d]$ parçasını m bərabər hissəyə bölüb, hər kiçik parça üçün bu düsturu tətbiq edirlər. Onda

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(c) + 2f(c+h) + 2f(c+2h) + \dots + \\ &+ 2f(c+(m-1)h) + f(d)] - \frac{(d-c)^3}{12m^2} f''(\xi) \quad (\xi \in (c, d)). \end{aligned}$$

Nəhayət, $n=3$ ($k=0$) qəbul edək. Bu halda $c, \frac{c+d}{2}, d$ düyün nöqtələri üçün

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{\left(x - \frac{c+d}{2}\right)(x-d)}{\left(c - \frac{c+d}{2}\right)(c-d)} f(c) + \frac{(x-c)(x-d)}{\left(\frac{c+d}{2} - c\right)\left(\frac{c+d}{2} - d\right)} \times \\ &\times f\left(\frac{c+d}{2}\right) + \frac{(x-c)\left(x - \frac{c+d}{2}\right)}{(d-c)\left(d - \frac{c+d}{2}\right)} f(d). \end{aligned}$$

Onda

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d L_2(x) dx + R_3,$$

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{6} \left[f(c) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d) \right] + R_3, \quad (2.10)$$

$$R_3 = \int_c^d (x-c) \left(x - \frac{c+d}{2} \right) (x-d) f\left(x, c, \frac{c+d}{2}, d\right) dx. \quad (2.11)$$

(2.10) düsturuna Simpson düsturu deyirlər.

İndi isə Simpson düsturunun qalıq həddini hesablayaq. (2.11) düsturu vasitəsilə qalıq həddini sadələşdirmək mümkün deyil. Burada, irəlidə olduğu kimi orta qiymət düsturunu tətbiq etmək olmaz, çünki $(x-c) \left(x - \frac{c+d}{2} \right) (x-d)$ funksiyası $[c, d]$ parçasında öz işarəsini saxlamır. Qalıq həddini başqa üsulla hesablayaq.

Elə üçdərəcəli $H_3(x)$ çoxhədli quraq ki, $c, \frac{c+d}{2}, d$ nöqtələrində qiymətləri $f(x)$ funksiyasının uyğun qiymətləri ilə üst-üstə düşsün və

$$H_3'\left(\frac{c+d}{2}\right) = f'\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

ödənsin. $H_3(x)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$H_3(x) = L_2(x) + K(x-c) \left(x - \frac{c+d}{2} \right) (x-d),$$

burada $L_2(x)$ funksiyası $c, \frac{c+d}{2}, d$ nöqtələri və $f(x)$ funksiyası üçün qurulmuş Laqranj çoxhədlisidir.

Aşkardır ki,

$$H_3(c) = f(c), \quad H_3\left(\frac{c+d}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right), \quad H_3(d) = f(d).$$

K ədədi elə seçilir ki,

$$H_3'\left(\frac{c+d}{2}\right) = f'\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

şerti də ödənilsin.

$$\int_c^d (x-c) \left(x - \frac{c+d}{2} \right) (x-d) dx = 0$$

olduğundan

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d H_3(x) dx + R_3.$$

I fəsildə (§6) isbat etmişdik ki,

$$R_3 = \int_c^d (x-c) \left(x - \frac{c+d}{2} \right)^2 (c-d) f\left(x, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) dx.$$

Bu integrala orta qiymət haqda teoremi tətbiq etsək $((x-c) \times \left(x - \frac{c+d}{2} \right)^2 (x-d))$ vuruğu $[c, d]$ parçasında öz işarəsini dəyişmir:

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_c^d (x-c) \left(x - \frac{c+d}{2} \right)^2 (x-d) dx = \left(\frac{d-c}{2} \right)^5 \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}$$

olduğunu alırıq.

Yuxarıda baxdığımız xüsusi hallarda olduğu kimi, burada da $d-c$ kiçik ədəd olmadıqda, $[c, d]$ parçasını $2m$ bərabər hissəyə bölüb, hər kiçik parça üçün Simpson düsturunu tətbiq etsək:

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \frac{d-c}{6m} [f(c) + 4f(c+h) + 2f(c+2h) + \\ &+ 4f(c+3h) + 2f(c+4h) + \dots + 4f[c + (2m-1)h] + \\ &+ 2f(c+2mh)] - \left(\frac{d-c}{2} \right)^5 \frac{f^{(IV)}(\eta)}{90m^4} \end{aligned}$$

olduğunu alırıq.

3. Qauss düsturu. Fərz edək ki,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + R(f). \quad (2.12)$$

Əgər

$$R(f) \equiv 0$$

isə onda deyirlər ki, (2.12) düsturu dəqiqdir.

Elə $x_1, \dots, x_n (x_i \in [a, b], i=1, 2, \dots, n)$ düyün nöqtələri və $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitləri tapmaq lazımdır ki, dərəcəsi $(2n-1)$ -ə bərabər olan çoxhədli üçün (2.12) düsturu dəqiq olsun. Tutaq ki,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1}. \quad (2.13)$$

Onda fərziyyəmizə əsasən

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n).$$

Bu düsturda $f(x)$ -in yerinə (2.13) çoxhədlisini yazsaq:

$$\omega_n(x) = 0$$

tənliyinin kökləri həqiqi, müxtəlif və $[a, b]$ parçasından olduğu üçün onları interpolasiya düyünləri kimi qəbul etmək olar və bu halda dərəcəsi $2n-1$ olan çoxhədli üçün (2.12) düsturu dəqiq olar.

İndi isə $c_i (i=1,2,\dots,n)$ əmsallarını tapaq. Bu məqsədlə

$$\psi_{k,n}(x) = \frac{\omega_n(x)}{x-x_k}$$

çoxhədlisinə baxaq. Bu çoxhədlinin dərəcəsi $n-1$ olduğundan

$$\int_a^b \psi_{k,n}^2(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \psi_{k,n}^2(x_i) = c_k \psi_{k,n}^2(x_k).$$

Buradan

$$c_k = \frac{\int_a^b \psi_{k,n}^2(x) dx}{\psi_{k,n}^2(x_k)} = \frac{1}{\omega_n'(x_k)} \int_a^b \psi_{k,n}^2(x) dx. \quad (2.17)$$

Aşkardır ki,

$$\int_a^b \psi_{k,n}^2(x) dx = \frac{\omega_n^2(a)}{a-x_k} - \frac{\omega_n^2(b)}{b-x_k} + 2 \int_a^b \frac{\omega_n(x)\omega_n'(x)}{x-x_k} dx.$$

Digər tərəfdən

$$\omega_n(a) = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} (b-a)^n, \quad \omega_n(b) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} (b-a)^n$$

olduğundan

$$\frac{\omega_n^2(a)}{a-x_k} - \frac{\omega_n^2(b)}{b-x_k} = \frac{(n!)(b-a)^{2n+1}}{(x_k-a)(x_k-b)[(2n)!]^2} \cdot \frac{\omega_n(x)\omega_n'(x)}{x-x_k}$$

$2n-2$ dərəcəli çoxhədlidir. Ona görə də

$$2 \int_a^b \frac{\omega_n(x)\omega_n'(x)}{x-x_k} dx = 2 \sum_{i=1}^n c_i \frac{\omega_n(x_i)\omega_n'(x_i)}{x_i-x_k} = 2c_k \omega_n'^2(x_k).$$

Beləliklə,

$$\int_a^b \psi_{k,n}^2(x) dx = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (x_k-a)(x_k-b)} + 2c_k \omega_n'^2(x_k).$$

(2.17)-ni nəzərə alsaq:

$$c_k \omega_n'^2(x_k) = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (x_k-a)(x_k-b)} + 2c_k \omega_n'^2(x_k),$$

$$c_k = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (x_k-a)(b-x_k) \omega_n'^2(x_k)} \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (2.18)$$

Nəhayət, isbat etdik ki, dərəcəsi $2n-1$ olan $f(x)$ çoxhədli üçün

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \quad (2.19)$$

düsturu doğrudur, belə ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ düyünləri (2.16) çoxhədlisinin kökləri, $c_i (i=1,2,\dots,n)$ -lər isə (2.18) düsturları ilə təyin edilir. (2.19) düsturuna Qauss düsturu deyilir.

Qauss düsturunun qalıq həddini hesablayaq. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyanın istənilən tərtibdən törəməsi var. $H(x)$ ilə elə çoxhədliyi işarə edək ki,

$$H(x_i) = f(x_i), \quad H'(x_i) = f'(x_i)$$

şərtlərini ödəsin. Onda məlumdur ki, (bax: I fəsil §6)

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2 f(x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n).$$

Buradan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b H(x) dx + \int_a^b \omega_n^2(x) f(x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) dx.$$

$H(x)$ -in dərəcəsi $2n-1$ olduğundan

$$\int_a^b H(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i H(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

Onda

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + R_n, \quad R_n = \int_a^b \omega_n^2(x) f(x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) dx$$

olduğunu alırıq.

R_n qalıq həddini sadələşdirək:

$$\begin{aligned}
R_n &= f(\xi, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) \int_a^b \omega_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \omega_n^2(x) dx, \\
\int_a^b \omega_n^2(x) dx &= \int_a^b \omega_n(x) \omega_n(x) dx = - \int_a^b \varphi_1(x) \omega_n'(x) dx = \\
&= \int_a^b \varphi_2(x) \omega_n''(x) dx = \dots = (-1)^n \int_a^b \varphi_n(x) \omega_n^{(n)}(x) dx = (-1)^n n! \int_a^b \varphi_n(x) dx, \\
\int_a^b \varphi_n(x) dx &= \frac{n!}{(2n)!} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx = \\
&= - \frac{n!n}{(2n)!} \int_a^b \frac{(x-a)^{n+1} (x-b)^{n-1}}{(n+1)!} dx = \\
&= \dots = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_a^b \frac{(x-a)^{2n}}{(n+1) \dots 2n} dx = \frac{(-1)^n (n!)^3 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (2n+1)}.
\end{aligned}$$

Beləliklə, qalıq həddi üçün

$$\begin{aligned}
R_n &= (-1)^n n! (-1)^n \frac{(n!)^3 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} = \\
&= \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi)
\end{aligned}$$

düsturunu almış oluruq.

Qeyd edək ki, $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında məxsusiyyəti olan halda bu funksiyayı $f(x) = p(x)F(x)$ şəklində yazıb

$$\int_a^b p(x)F(x)dx$$

inteqralı təqribi hesablamaq lazımdır. Bunun üçün Qauss düsturunu $p(x) > 0$ çəki funksiyası üçün tətbiq etmək əlverişlidir. Bu halda

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i F(x_i) + R(F),$$

belə ki, bu düsturun ixtiyari $2n-1$ dərəcəli çoxhədli üçün dəqiq olması üçün zəruri və kafi şərt $x_1, x_2, \dots, x_n$ düyünlərini

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) q(x) dx = 0$$

şərtini ödəyən $\omega_n(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$ çoxhədlisinin kökləri olmasıdır. Burada $q(x)$ dərəcəsi $(n-1)$ -dən böyük olmayan ixtiyari çoxhədlidir.

Bu faktın isbatı, c_i əmsallarının və qalıq həddinin tapılması Qauss düsturunun çıxarılışında olduğu kimidir. Məsələn, $a = -1, b = 1$,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ qəbul etsək:}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n F\left(\cos \frac{2i-1}{2n} \pi\right) + \frac{\pi}{(2n)! 2^{n-1}} F^{(2n)}(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1)$$

olduğunu alırıq. Bu düstura Ermit düsturu deyirlər.

Nəhayət, qeyd edək ki, sonsuz intervalda da inteqralları təqribi hesablamaq üçün kvadratura düsturlarını vermək olar. Məsələn, isbat etmək olar ki,

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} F(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i F(x_i) + \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{(2n)!} F^{(2n)}(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty),$$

burada x_i Çebişev-Laqerra çoxhədlisinin:

$$L_n(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$$

kökləridir. c_i isə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$c_i = \frac{x_i \Gamma(n) \Gamma(\alpha + n)}{n(\alpha + n) [L_{n-1}(x_i)]^2}, \quad \Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Yenə də isbat etmək olar ki,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} F(x) dx &= \frac{2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i)}{H_{n-1}^2(x_i)} + \\
&+ \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} F^{(2n)}(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty),
\end{aligned}$$

burada x_i Çebişev-Ermit çoxhədlisinin

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

kökləridir.

Bu və bu tipli düsturların isbatı, dərslərin axırındakı ədəbiyyatda - N.S. Berezin və N.P. Jidkovun kitabında verilmişdir.

$$\int_a^b f(x)dx$$

inteqralı üçün

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

inteqral cəmləri ardıcılılığına baxaq, burada $c_i^{(n)}$ -lər aşağıdakı sonsuz üçbucaq matrisindən

$$\begin{matrix} c_1^{(1)} \\ c_1^{(2)}, c_2^{(2)} \\ c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, c_3^{(3)}, \\ \dots \\ \dots \end{matrix}$$

$x_i^{(n)} \in [a, b]$ -lər isə başqa bir verilmiş sonsuz üçbucaq matrisindən

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \\ \dots \\ \dots \end{matrix}$$

seçilir.

$c_i^{(n)}$ və $x_i^{(n)}$ -lər üzərinə hansı şərtləri qoymaq lazımdır ki, $[a, b]$ -də təyin olunmuş ixtiyari $f(x)$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.25)$$

ödənsin.

Bu suala aşağıdakı teoremlə cavab vermək olar.

Teorem 2.1. Əgər ixtiyari çoxhədli üçün (2.25) ödənirsə və ixtiyari n üçün

$$\sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}| < M$$

olarsa, onda ixtiyari kəsilməz $f(x)$ ($x \in [a, b]$) funksiyası üçün (2.25) ödənər.

İsbatı. Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, (Veyyerştras teoremi) ixtiyari kəsilməz $f(x)$ ($x \in [a, b]$) funksiyası və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $P_n(x)$ çoxhədli tapmaq olar ki, ixtiyari $x \in [a, b]$ üçün

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad (2.26)$$

ödənsin.

Aşağıdakı fərqə baxaq:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - L_n(f) &= \int_a^b [f(x) - P_n(x)]dx + \\ &+ \left[\int_a^b P_n(x)dx - L_n(P_n) \right] - L_n(f - P_n). \end{aligned}$$

(2.26) bərabərsizliyindən

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)|dx < \varepsilon(b - a),$$

teoremin birinci şərtindən isə

$$\left| \int_a^b P_n(x)dx - L_n(P_n) \right| < \varepsilon$$

olduğunu alırıq. Digər tərəfdən:

$$L_n(f - P_n) = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} [f(x_k^{(n)}) - P_n(x_k^{(n)})]$$

olduğundan, teoremin ikinci şərtinə əsasən:

$$|L_n(f - P_n)| \leq \sum_{k=1}^n |c_k^{(n)}| |f(x_k^{(n)}) - P_n(x_k^{(n)})| \leq \varepsilon M.$$

Beləliklə,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_n(f) \right| \leq \varepsilon(b - a + 1 + M).$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, isbat etdiyimiz teoremin tərsi də doğrudur.

6. Qalıq həddini qiymətləndirmək üçün Runqe üsulu. İnteqralı təqribi hesablamaq üçün yuxarıda verdiyimiz kvadratura düsturlarında qalıq həddinin

$$R(f) = Ch^k f^{(k-1)}(\xi)$$

şəklində olduğunu gördük. İnteqralın dəqiq qiymətini I , təqribi qiymətini isə J ilə işarə etsək:

$$I = J + Ch^k f^{(k-1)}(\xi).$$

İnteqrallama parçasını iki bərabər hissəyə bölək. Hər parça üçün bu düsturu tətbiq edib cəmləsək:

$$I = J_1 + C\left(\frac{h}{2}\right)^k f^{(k-1)}(\xi_1) + C\left(\frac{h}{2}\right)^k f^{(k-1)}(\xi_2)$$

olduğunu alırıq. Burada J_1 , inteqralın təqribi qiymətidir.

Əgər $f^{(k-1)}(x)$ inteqrallama parçasında azacıq dəyişirsə,

$$f^{(k-1)}(\xi_1) = f^{(k-1)}(\xi_2) = f^{(k-1)}(\xi) = M$$

götürmək olar. Onda

$$R(f) = Ch^k f^{(k-1)}(\xi) = \frac{J_1 - J}{1 - 2^{1-k}}.$$

İnteqralın təqribi qiymətini isə

$$J_2 = J_1 + \frac{J_1 - J}{1 - 2^{1-k}}$$

düsturu ilə tapmaq olar.

§3. Ən yaxşı qalıq həddli kvadratura düsturu

Elə kvadratura düsturu tapmaq ki, bunun qalıq həddinin mütləq qiymətinin yuxarı sərhədi, başqa kvadratura düsturlarının qalıq hədlərinin mütləq qiymətlərinin yuxarı sərhədlərindən kiçik olsun.

Bu məsələnin həllini konkret fəzada verək.

Əvvəlcə $C^1(M)$ funksiyalar sinfinə baxaq. $C^1(M)$ -birtərtibli təməsilə $[0,1]$ parçasında kəsilməz olan və $|f'(x)| \leq M (M > 1)$ bərabərsizliyini ödəyən funksiyalar çoxluğu.

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k^n f(x_k^{(n)}) + R_n(f) \quad (x_k^{(n)} \in (0,1)) \quad (2.27)$$

kvadratura düsturuna baxaq. Fərz edəcəyik ki,

$$\sum_{n=1}^n c_k^{(n)} = 1.$$

Yuxarıda qoyduğumuz məsələni $C^1(M)$ -də həll etmək üçün elə kvadratura düsturu tapmalıyıq ki,

$$\sup_{C^1(M)} \left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| = \inf_{C^1(M)} \sup_{C^1(M)} \left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|$$

şərti ödənsin. Aşkardır ki,

$$R_n(f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_0^1 \left(\int_0^x f'(t)dt \right) dx - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \int_0^{x_k^{(n)}} f'(t)dt = \int_0^1 \left(\int_t^1 f'(t)dx \right) dt - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \int_0^1 f'(t)G(x_k^{(n)}, t)dt,$$

burada

$$G(x_k^{(n)}, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq x_k^{(n)}, \\ 0, & x_k^{(n)} < t \leq 1. \end{cases}$$

Onda

$$R_n(t) = \int_0^1 f'(t) \left[1 - t - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} G(x_k^{(n)}, t) \right] dt = \int_0^1 f'(t) K(t) dt,$$

burada

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} G(x_k^{(n)}, t).$$

Şərtə görə

$$|R_n(t)| \leq M \int_0^1 |K(t)| dt.$$

İsbat edək ki,

$$\sup_{C^1(M)} |R_n(f)| = M \int_0^1 |K(t)| dt.$$

Bunun üçün kifayətdir ki, elə $x_k^{(n)} \in (0,1)$ və $c_k^{(n)} \left(\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} = 1 \right)$ seçək ki,

$$\int_0^1 |K(t)| dt$$

ən kiçik qiymət alsın.

Aşkardır ki,

$$\int_0^1 |K(t)| dt = \frac{[x_1^{(n)}]^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} |\xi_k - t| dt + \frac{(1 - x_k^{(n)})^2}{2}, \quad \xi_k = \sum_{i=1}^k c_i^{(n)}.$$

Digər tərəfdən

$$\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} |\xi_k - t| dt \geq \frac{(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^2}{4}.$$

Belə ki, $\xi_k = \frac{(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^2}{4}$ olduqda

$$\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} |\xi_k - t| dt = \frac{(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^2}{4}.$$

Deməli,

$$\int_0^1 |K(t)| dt \geq \frac{1}{4} \left[2(x_1^{(n)})^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^2 + 2(1 - x_n^{(n)})^2 \right].$$

Bərabərsizliyin sağ tərəfi $0 \leq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq 1$

şərti daxilində minimum qiymətini

$$x_1^{(n)} = \frac{1}{2n}, x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} = 2x_1^{(n)} = \frac{1}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

$$1 - x_n^{(n)} = x_1^{(n)} = \frac{1}{2n}$$

olduqda alır və bu qiymət $\frac{1}{4n}$ ədədinə bərabərdir.

Deməli,

$$\int_0^1 |K(t)| dt \geq \frac{1}{4n}$$

olur və bərabərlik işarəsini $x_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}$, $\xi_k = \frac{x_k^{(n)} + x_{k+1}^{(n)}}{2} = \frac{k}{n}$, $c_k^{(n)} =$

$= \xi_k - \xi_{k-1} = \frac{1}{n}$ olduqda alır.

Beləliklə, $C^1(M)$ sinfində «ən yaxşı» kvadratura düsturu

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + R_n \quad (2.28)$$

olar və

$$|R_n| \leq \frac{M}{4n}.$$

Başqa siniflərdə də «ən yaxşı» kvadratura düsturlarını tapmaq olar.

Məsələn, $C_2^1(M)$ sinfində də (2.27) şəklində «ən yaxşı» kvadratura düsturu (2.28) olar. Bu halda qalıq həddi

$$|R_n| \leq \frac{M}{2n\sqrt{3}}$$

bərabərsizliyini ödəyir. Burada $C_2^1(M)$ – $[0,1]$ parçasında törəməsi kvadratı ilə cəmlənən $f(x)$ funksiyalar sinfidir:

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq M^2.$$

§4. Kvadratura düsturunun dəqiqliyinin artırılması

Biz əvvəllər Nyuton-Kotes düsturunun xüsusi hallarına baxdıqda kvadratura düsturunun dəqiqliyini artırmaq üçün verilmiş inteqrallama parçasını kiçik hissələrə böldük. Bu kvadratura düsturlarının qalıq hədlərində inteqrallama parçası uzunluğunun müxtəlif dərəcələri iştirak edirlər. Ona görə də parçanı kiçik hissələrə bölüb və bu hissələrdə kvadratura düsturlarını tətbiq etməklə qalıq həddini dəqiqləşdirmiş oluruq.

Bu paraqrafda kvadratura düsturunun dəqiqliyini artırmaq üçün başqa bir üsul verilir. Verilmiş kvadratura düsturunun dəqiqliyini artırmaq üçün bu düsturun qalıq həddindən müəyyən ifadəni kvadratura cəminə daxil etmək lazımdır. Belə ki, alınan yeni kvadratura düsturu əvvəlkinə nisbətən dəqiq olmalıdır və kvadratura cəminin hesablanması əlavə çətinliklər törətməməlidir. Belə ola bilər ki, bu qaydanı bir dəfə tətbiq etməklə lazımi dəqiqliyə nail olmaq olmur, onda bu prosesi davam etdirmək lazımdır.

İndi isə bu üsulu bir konkret kvadratura düsturu – trapeslər düsturu üçün tətbiq edək.

Trapeslər düsturunu götürək:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + R(f).$$

Bu düsturun qalıq həddini bizə lazım olan şəkllə salmaq üçün

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt = \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + r(x). \end{aligned}$$

Burada

$$r(x) = \int_a^b f(t)(x-t)E(x-t)dt, \quad E(x-t) = \begin{cases} 1 & t \leq x, \\ 0 & t > x. \end{cases}$$

$f(x)$ funksiyasının xətti hissəsi kvadratura düsturu ilə dəqiq hesablandığundan

$$R(f) = R(r).$$

Digər tərəfdən

$$\begin{aligned} R(r) &= \int_a^b r(x)dx - \frac{b-a}{2}[r(a) + r(b)], \\ \int_a^b r(x)dx &= \int_a^b dx \int_a^b f''(t)(x-t)E(x-t)dt = \\ &= \int_a^b f''(t)dt \int_a^b (x-t)E(x-t)dx = \int_a^b f''(t)dt \int_t^b (x-t)dx = \\ &= \int_a^b f''(t) \frac{(b-t)^2}{2} dt, \quad r(a) = 0, \quad r(b) = \int_a^b f''(t)(b-t)dt \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} R(f) &= R(r) = \int_a^b f''(t) \frac{(b-t)^2}{2} dt - \frac{b-a}{2} \int_a^b f''(t)(b-t)dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f''(t)[(b-t) - (b-a)](b-t)dt = -\frac{1}{2} \int_a^b f''(t)(b-t)(t-a)dt. \end{aligned}$$

$t = a + (b-a)u$ ($0 \leq u \leq 1$) əvəzləməsini aparsaq:

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{2} \int_0^1 f''[a + (b-a)u]u(1-u)du.$$

Bu isə trapeslər düsturunun bizə lazım olan formada qalıq həddidir. İndi isə

$$J = \int_0^1 f''[a + (b-a)u]u(1-u)du$$

inteqralından lazım olan həddi ayıraq.

Aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$\varphi(u) = f''[a + u(b-a)], \quad K_0(u) = u(1-u),$$

$$c_0 = \int_0^1 K_0(u)du = \frac{1}{6}.$$

Aşkardır ki, $K_0(u)$ ($0 \leq u \leq 1$) funksiyasının qiymətləri c_0 ətrafında olacaq. Ona görə də

$$K_0(u) = c_0 + [K_0(u) - c_0]$$

götürüb inteqralı ayıraq:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \varphi(u)K_0(u)du = c_0 \int_0^1 \varphi(u)du - \int_0^1 \varphi(u)[c_0 - K_0(u)]du = \\ &= \frac{1}{6(b-a)}[f'(b) - f'(a)] - \int_0^1 \varphi(u)[c_0 - K_0(u)]du. \end{aligned}$$

Hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(u)[c_0 - K_0(u)]du &= \varphi(u)K_1(u) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi'(u)K_1(u)du = \\ &= -(b-a) \int_0^1 f'''[a + (b-a)u]K_1(u)du, \end{aligned}$$

$$K_1(u) = \int_0^u [c_0 - K_0(t)]dt = \frac{1}{3} \left(u^3 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}u \right)$$

olduğunu alırıq.

$$c_1 = \int_0^1 K_1(u)du = \int_0^1 \frac{1}{3} \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt = 0,$$

$$K_2(u) = \int_0^u \left[-\frac{1}{3} \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \right) \right] dt = -\frac{1}{12}(u^4 - 2u^3 + u^2)$$

işarələmələrini aparsaq eyni qayda ilə

$$\begin{aligned} (b-a) \int_0^1 f'''[a + (b-a)u][c_1 - K_1(u)]du &= \\ &= -(b-a)^2 \int_0^1 f^{(4)}[a + (b-a)u]K_2(u)du \end{aligned}$$

olduğunu alırıq. Beləliklə,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{6(b-a)}[f'(b) - f'(a)] + (b-a) \int_0^1 f'''[a + (b-a)u] K_1(u) du = \\
&= \frac{1}{6(b-a)}[f'(b) - f'(a)] - (b-a) \int_0^1 f'''[a + (b-a)u] \times \\
&\quad \times [c_1 - K_1(u)] du = \frac{1}{6(b-a)}[f'(b) - f'(a)] + \\
&\quad + (b-a)^2 \int_0^1 f^{(4)}[a + (b-a)u] K_2(u) du
\end{aligned}$$

olar. Deməli,

$$R(f) = -\frac{(b-a)^2}{12}[f'(b) - f'(a)] - \frac{(b-a)^5}{2} \int_0^1 f^{(4)}[a + (b-a)u] K_2(u) du.$$

Qalıq həddinin yeni ifadəsindəki birinci hədd asanlıqla hesablandıqından onu kvadratura cəminə daxil etmək olar və alınan yeni qalıq hədd, $b-a$ kiçik olduqda, əvvəlkinə nisbətən daha kiçik olacaqdır.

Bu prosesi davam etdirməklə qalıq həddə $(b-a)$ -nın dərəcəsini artırmaq olar.

Nəhayət, qeyd edək ki, əgər $b-a$ kiçik deyilsə, onda $[a, b]$ parçasını kiçik hissələrə bölüb sonra isə hər kiçik hissə üçün yuxarıdakı düsturu tətbiq etmək olar.

§5. Çoxqat inteqralların təqribi hesablanması haqqında

Biz sadəlik üçün ikiqat inteqralların ədədi hesablanmasından söhbət açacağıq. Eyni qayda ilə çoxqat inteqralları da hesablamaq olar. Tutaq ki,

$$J = \iint_G f(x, y) dx dy \quad (2.29)$$

ikiqat inteqralı hesablamaq tələb edilir. Burada $G = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

1. Kvadratura düsturunun tətbiqi.

İnteqralı aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$J = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b F(x) dx, \quad F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Əvvəlcə

$$\int_a^b F(x) dx$$

inteqralı hesablayaq. Bu inteqralı müxtəlif kvadratura düsturlarını tətbiq etməklə hesablamaq olar. Biz Simpson düsturunu tətbiq edək:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{b-a}{6} \left[F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b) \right] + R(F), \\
R(F) &= -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{F^{(4)}(\xi)}{90} = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} \int_c^d \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial x^4} dy = \\
&= -\frac{(b-a)^5 (d-c)}{2^5 \cdot 90} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4} \quad (a < \xi < b, c < \eta < d).
\end{aligned}$$

İndi isə

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

inteqralını hesablamaq üçün Simpson düsturunu tətbiq edək:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{d-c}{6} \left[f(x, c) + 4f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + f(x, d) \right] + R_y(f), \\
R_y(f) &= \int_c^d (y-c) \left(y - \frac{c+d}{2} \right)^2 (y-d) f\left(x, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) dy.
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{(b-a)(d-c)}{36} \{ f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + \\
&\quad + 4 \left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] + \\
&\quad + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \} + R(f), \quad (2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(f) &= R(F) + \frac{b-a}{6} \int_c^d (y-c) \left(y - \frac{c+d}{2} \right)^2 (y-d) \times \\
&\quad \times \left[f\left(a, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) + \right. \\
&\quad \left. + f\left(b, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) \right] dy.
\end{aligned}$$

$R(f)$ -i sadələşdirmək üçün

$$\int_a^b f\left(x, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) dx$$

inteqralı üçün Simpson düsturunu yazaq:

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{6} \left[f\left(a, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) + \right. \\ & \left. + f\left(b, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) \right] = \int_a^b f\left(x, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) dx - \\ & - \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) \times \\ & \times f\left(x, a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b, y, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) dy. \end{aligned}$$

Bu bərabərliyi $R(f)$ -də nəzərə alıb, orta qiymət haqda teoremdən istifadə etsək:

$$\begin{aligned} R(f) &= R(F) + f\left(\xi, \bar{\eta}, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) \times \\ & \times \int_a^b (y-c) \left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2 (y-d) dy (b-a) - \\ & - f\left(\bar{\xi}, a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b, \bar{\eta}, c, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}, d\right) \times \\ & \times \int_c^d (y-c) \left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2 (y-d) dy \times \\ & \times \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx. \end{aligned}$$

$R(F)$ -in qiymətini nəzərə alıb inteqralları hesablasaq

$$\begin{aligned} R(f) &= -\frac{(b-a)^5 (d-c)}{2^5 \cdot 90} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4} - \frac{(b-a)(d-c)^5}{2^5 \cdot 90} \frac{\partial^4 f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)}{\partial y^4} - \\ & - \frac{(b-a)^5 (d-c)}{2^{10} \cdot 90^2} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta_2)}{\partial x^4 \partial y^4} \quad (a < \xi_i < b, \quad c < \eta_i < d, \quad i=1,2). \quad (2.31) \end{aligned}$$

Beləliklə (2.29) inteqralını hesablamaq üçün (2.30) düsturunu almış oluruq; belə ki, qalıq həddi (2.31) düsturu ilə hesablanır.

2. İnteqrallı funksiyayı interpolasiya çoxhədlisi ilə əvəz etmək. İkideyişənli funksiya üçün interpolasiya çoxhədlisini

$$L_n(x, y) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) Q_i(x, y)$$

şəklində göstərmək olar. Burada

$$Q_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Bu düsturdan istifadə etsək:

$$\begin{aligned} J &\approx \iint_G L_n(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i, y_i), \quad (2.32) \\ c_i &= \iint_G Q_i(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Konkret interpolasiya çoxhədlisini götürməklə c_i əmsallarını asanlıqla hesablamaq olar. (2.32) düsturunun qalıq həddi də interpolasiya çoxhədlisinin seçilməsilə hesablanır.

§6. Qeyri-müəyyən inteqralların təqribi hesablanması

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyasının $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, n$; $x_0 = a$, $x_n = b$) nöqtələrində qiymətləri verilmiş və

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (2.33)$$

qeyri-müəyyən inteqralı hesablamaq tələb olunur.

Fərz edək ki, $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_k)$ ($k < n$) ədədlərinin təqribi qiymətləri $y_0, y_1, \dots, y_k$ hər hansı üsulla tapılmışdır. $y(x_{k+1}), \dots, y(x_n)$ ədədlərinin təqribi qiymətlərini $y_{k+1}, \dots, y_n$, məsələn, aşağıdakı düsturla hesablamaq olar:

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^k A_j y_{i-j} + h \sum_{j=0}^k B_j f(x_{i-j}) \quad (i = k, k+1, \dots, n-1). \quad (2.34)$$

Burada A_i, B_i sabitləri müəyyən şərtləri ödəyir (bu şərtlər aşağıda göstəriləcəkdir).

Bu düsturu (2.33) inteqralının təqribi qiymətini hesablamaq üçün tətbiq etdikdə, buraxılan xətanı hesablayaq.

(2.34) kvadratura düsturunda y_i əvəzinə dəqiq $y(x_i)$ qiymətini yazsaq, bərabərlik müəyyən r_i xətası ilə ödənəcək:

$$y(x_{i+1}) = \sum_{j=0}^k A_j y(x_{i-j}) + h \sum_{j=0}^k B_j f(x_{i-j}) + r_i. \quad (2.35)$$

(2.34) və (2.35)-dən $\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$ işarələməni aparmaqla xəta tənliyini alırıq:

$$\varepsilon_{j+1} = \sum_{j=0}^k A_j \varepsilon_{i-j} + r_j. \quad (2.36)$$

Bu, ε_i -yə nəzərən $k+1$ tərtibli xətti sonlu- fərqlər tənliyidir. (2.36) tənliyindən görünür ki, $j = k$ qəbul etsək ε_{k+1} -i tapmış olarıq; $j = k+1$ qəbul etsək ε_{k+2} -ni və sairə, $j = n-1$ qəbul etsək ε_n -i tapmış olarıq. Bu o deməkdir ki, ε_i -lər yeganə surətdə təyin olunurlar. Sonlu- fərqlər tənlikləri nəzəriyyəsiindən istifadə etməklə də (2.36) tənliyinin həllini tapmaq olar [8]. ε_i -lərin tapılmış ifadəsi r_i -lərdən asılı olacaqdır. Bu o deməkdir ki, xətanı qiymətləndirmək üçün r_i -ləri qiymətləndirmək lazımdır.

Teorem 2.2. *Tutaq ki, $\max |\varepsilon_i| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) və $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) ($r(h) = \max_i |r_i(h)|$). Onda $\lim_{h \rightarrow 0} \max_i |\varepsilon_i| = 0$.*

Bu teoremi isbat etmək üçün (2.36) sonlu fərqlər tənliyinin həllini qiymətləndirmək kifayətdir (bax, məsələn, dərsliyin axırında verilən ədəbiyyatda V.İ. Kırlov və başqaları).

Bu teoremdən görünür ki, inteqralın təqribi qiymətini tapdıqda başlanğıc şərtlərinin ($y_0, y_1, \dots, y_n$) və qalıq həddinin $r_i(h)$ xətanı qiymətləndirdikdə böyük təsiri olur. Buna görə də (2.34) hesablama düsturunun dayanıqlığı məsələsi meydana çıxır.

Tərif. *Əgər $r_i = 0$ olduqda elə $M > 0$ ədədi varsa ki, $|i| < E$ ($i = 0, 1, \dots, k$) bərabərsizliklərindən*

$$|\varepsilon_i| \leq ME \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

bərabərsizliklərinin doğru olduğu alınsın, onda deyirlər ki, (2.34) düsturu başlanğıc şərtlərə nəzərən dayanıqlıdır.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, (2.34) düsturunun başlanğıc şərtlərə nəzərən dayanıqlı olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k A_i \lambda^{k-1} = 0$$

tənliyinin köklərinin vahid radiuslu dairəyə daxil olmasıdır (belə ki, modulca vahidə bərabər olan köklər təkrarlana bilməz).

Tərif. *Əgər $\varepsilon_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k$) olduqda elə $M_1 > 0$ ədədi varsa ki,*

$$\frac{r(h)}{h} \leq G, \quad r(h) = \max_i |r_i(h)|,$$

bərabərsizliyindən

$$|\varepsilon_i| \leq M_1 G \quad (i = k+1, \dots, n)$$

bərabərsizlikləri alınsın, onda deyirlər ki, (2.34) düsturu $r_i(h)$ xətasına nəzərən dayanıqlıdır.

Nəhayət, (2.34) düsturunun bir neçə xüsusi hallarına baxaq.

(2.34) düsturunun ən çox işlənən şəklini

$$\int_{-ph}^0 F(x) dx \approx h \sum_{j=0}^k B_j F(-jh)$$

kvadratura düsturu vasitəsilə almaq olar. Burada $F(x) = y'(x_i + x)$ götürsək:

$$\int_{-p}^0 F(x) dx = y(x_i) - y(x_{i-p}) \approx h \sum_{j=0}^k B_j y'(x_{i-j}).$$

Burada $y'(x) = f(x)$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$y(x_i) - y(x_{i-p}) \approx h \sum_{j=0}^k B_j f(x_{i-j})$$

olduğunu alırıq. Buna uyğun sonlu-fərqlər tənliyi

$$y_i = y_{i-p} + h \sum_{j=0}^k B_j f(x_{i-j}) \quad (2.37)$$

şəklində olar. Bu isə (2.34) sonlu-fərqlər tənliyinin xüsusi halıdır.

İndi isə (2.37) tənliyinin xüsusi hallarını nəzərdən keçirək.

Əvvəlcə trapeslər düsturuna baxaq:

$$\int_{-h}^0 f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(0) + f(-h)].$$

Bu halda

$$y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} [f(x_j) + f(x_{j-1})].$$

Simpson düsturunu götürsək:

sonlu-fərqlər tənliyi

$$y_j = y_{j-2} + \frac{h}{3}[f(x_j) + 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})].$$

Nəhayət, düzbucaqlılar düsturunu götürsək:

$$\int_{-h}^0 f(x)dx \approx hf\left(-\frac{h}{2}\right).$$

Bu halda alınan sonlu-fərqlər tənliyi (2.37) şəklində olmayacaq. Lakin h -
 1 $2h$ ilə əvəz etsək:

$$\int_{-2h}^0 f(x)dx \approx 2hf(-h)$$

olar və uyğun tənlik

$$y_i = y_{i-2} + 2hf(x_{i-1})$$

şəklində alınar.

Nəhayət qeyd edək ki, kvadratura düsturlarının qalıq hədləri məlum olduğundan bu xüsusi hallar üçün $\mathcal{E}_j$ -lər asanlıqla qiymətləndirilir.

II HISSƏ

CƏBRİN TƏQRİBİ ÜSULLARI

III FƏSİL

XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN TƏQRİBİ ÜSULLARLA HƏLLİ

Aşağıdakı kimi xətti cəbri tənliklər sisteminə baxaq:

[illegible]

Bu sistemi

$$Ax = b \quad (3.2)$$

şəklində də yazmaq olar. Burada

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

(3.1) sisteminin həllini tapmaq üçün adətən, cəbr kursundan məlum olan Kramer qaydası tətbiq olunur. Bu qayda tətbiq olunduqda çox böyük sayda hesab əməlləri aparıldığından (xüsusən tənliklərin sayı çox olduqda) bu üsul səmərəli sayılmır. Ona görə də (3.1) sistemini həll etmək üçün müxtəlif təqribi üsullar təklif olunur. Bu fəsilə belə üsullardan bir neçəsi verilir.

§1. Yoxetmə üsulu

Bu üsulun əsas ideyası (3.1) sistemini ona ekvivalent «üçbucaq sisteminə» gətirməkdən ibarətdir.

Fərz edək ki, $a_{11} \neq 0$. Onda (3.1) sisteminin birinci tənliyindən

$$x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = b_1^* \quad (3.3)$$

olduğunu alırıq. Əgər $a_{11} = 0$ olarsa, onda birinci tənlik əvəzinə x_1 -in

$$\left. \begin{aligned} & \alpha_{22}^{(1)}x_2 + \alpha_{23}^{(1)}x_3 + \dots + \alpha_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ & \dots\dots\dots \\ & \alpha_{n2}^{(1)}x_2 + \alpha_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + \alpha_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$\alpha_{22}^{(1)} \neq 0$ olduğunu fərz edib, (3.4) sistemindən x_2 -ni yox etsək, $n-2$ sayda tənliklər sistemi almış olarıq. Bu prosesi davam etdirməklə x_n -i tapmaq üçün bir tənlik almaq olar.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n = b_1^*, \\ x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = b_2^*, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + b_{n-1n}x_n = b_{n-1}^*, \\ x_n = b_n^* \end{array} \right\}$$

Qeyd edək ki, əgər məchulları yox etdikdə, yox etdiyimiz məchulun əmsalı kiçik ədəd olarsa, onda hesab əməlləri apardıqda buraxılan xəta böyüyə bilər. Belə olmasın deyər hər bir tənlikdə elə məchulu yox etmək lazımdır ki, onun əmsalı mütləq qiymətə tənliyin yerdə qalan əmsallarının mütləq qiymətlərinin ən böyüyü olsun.

$$s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} + b_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$
$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$
$$b = Ax = BCx = By, \quad y = Cx.$$
$$\left. \begin{array}{l} By = b, \\ Cx = y. \end{array} \right\}$$
$$By = b$$

83

üçbucaq sistemini həll edib x -i tapırıq.

İndi isbat edək ki, əgər

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.6)$$

şerti ödənilirsə, onda A matrisini həmişə (3.5) şəklində göstərmək olar.

(3.6) düsturünün doğruluğunu isbat etmək üçün, (3.5) bərabərliyindən istifadə edərək solda və sağda dayanan elementləri müqayisə edək:

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} \beta_{ik} \gamma_{kj} = \alpha_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.7)$$

İsbat edək ki, (3.6) şərtləri daxilində (3.7)-dən β_{ij} və γ_{ij} -ləri tapmaq olar. (3.7)-də $i = j = 1$ qəbul etsək:

$$\beta_{11}\gamma_{11} = a_{11}.$$

Məchulların birini məlum qəbul edib, digərini buradan tapırıq. Digər tərəfdən $\alpha_{11} \neq 0$ olduğundan $\beta_{11}\gamma_{11} \neq 0$. $i=2, j=1$ və $i=1, j=2$ qəbul edək. Onda uyğun olaraq

$$\beta_{21}\gamma_{11} = a_{21}, \quad \beta_{11}\gamma_{12} = a_{12}.$$

Buradan γ_{12} və β_{21} tapılır. $i = j = 2$ götürsək:

$$\beta_{22}\gamma_{22} + \beta_{21}\gamma_{12} = a_{22}.$$

γ_{22} -ni məlum qəbul edib (sıfırdan fərqli) buradan β_{22} -ni tapırıq.

İndi göstərək ki, $\beta_{22}\gamma_{22} \neq 0$. Onda asanlıqla digər əmsalları da tapmaq olar.

Aşağıdakı determinantlara baxaq:

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \end{vmatrix}.$$

Aşkardır ki,

$$B_2C_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11}\gamma_{11} & \beta_{11}\gamma_{12} \\ \beta_{21}\gamma_{11} & \beta_{21}\gamma_{12} + \beta_{22}\gamma_{22} \end{vmatrix}.$$

Digər tərəfdən

$$A_2 = B_2 C_2$$

olduğundan

$$A_2 = \beta_{11}\gamma_{11}\beta_{22}\gamma_{22}.$$

$A_2 \neq 0$ olduğundan, buradan $\beta_{22}\gamma_{22} \neq 0$ olduğunu alarıq.

(3.7) sistemini həll etdikdə gördük ki, bu sistemin həlli birqiymətli təyin olunmur. Lakin B və ya C matrislərinin hər hansı birinin diaqonal elementləri verilərsə, β_{ij} və γ_{ij} -lər birqiymətli təyin edilir.

Nəhayət qeyd edək ki, əgər A matrisi simmetrik matrisdirsə, onda

$$A = BB'$$

götürmək olar. Burada B' matrisi, B -nin transponirə olunmuşdur və aşağı üçbucaq matrisidir. Bu halda

$$By = b$$

sistemindən y tapılır və sonra

$$B'x = y$$

sistemindən x -i tapırıq.

§3. Ortoqonallaşdırma üsulu

Yenə də (3.2) sisteminə baxaq və fərz edək ki, A simmetrik

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

və müsbət-müəyyən

$$(Ax, x) \geq \gamma^2 (x, x)$$

matrisdir.

Elə

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \\ x^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \\ &\dots\dots\dots \\ x^{(n)} &= (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \end{aligned}$$

vektörler sistemini götürək ki,

$$(Ax^{(k)}, x^{(l)}) = 0 \quad (k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, n) \quad (3.8)$$

şərti ödənsin. Burada (x, y) ədədi

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\y &= (y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

vektorların skalyar hasilidir:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Əvvəlcə (3.8) şərtlərini ödəyən vektorların qurulma qaydasını verək.

Aşağıdakı kimi vektorlar sisteminə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} y^{(1)} &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ y^{(2)} &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned} \right\}$$

$x^{(1)} = y^{(1)}$ qəbul edək və $x^{(2)}$ -ni aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$x^{(2)} = y^{(2)} + \lambda_1^{(2)} x^{(1)}.$$

$\lambda_1^{(2)}$ parametrini elə seçək ki,

$$(x^{(2)}, Ax^{(1)}) = 0$$

olsun. Aşkardır ki, bu halda

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(y^{(2)}, Ax^{(1)})}{(x^{(1)}, Ax^{(1)})}.$$

İndi isə $x^{(3)}$ vektorunu aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$x^{(3)} = y^{(3)} + \lambda_1^{(3)} x^{(1)} + \lambda_2^{(3)} x^{(2)}.$$

Aşkardır ki,

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(y^{(3)}, Ax^{(1)})}{(x^{(1)}, Ax^{(1)})}, \quad \lambda_2^{(3)} = -\frac{(y^{(3)}, Ax^{(2)})}{(x^{(2)}, Ax^{(2)})}$$

götürsək:

$$(x^{(3)}, Ax^{(1)}) = (x^{(3)}, Ax^{(2)}) = 0.$$

Bu qayda ilə digər vektorları da qurmaq olar. İndi isə (3.2) sisteminin həllini

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x^{(k)} \quad (3.9)$$

şəklində axtaraq; burada $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ (3.8) şərtini ödəyən vektorlardır.

(3.2) sisteminin hər tərəfini $x^{(l)}$ vektoruna skalyar vuraq:

$$(Ax, x^{(l)}) = (b, x^{(l)}) \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

x -in yerinə (3.9) ifadəsini yazsaq:

$$(Ax, x^{(l)}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (Ax^{(k)}, x^{(l)}) = (b, x^{(l)}) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

və ya

$$\sum_{k=1}^l (Ax^{(k)}, x^{(l)}) \alpha_k = (b, x^{(l)}) \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

A matrisi simmetrik olduğundan :

$$(Ax^{(k)}, x^{(l)}) = (x^{(k)}, Ax^{(l)}) = (Ax^{(l)}, x^{(k)}),$$

yəni

$$(Ax^{(k)}, x^{(l)}) = 0 \quad (l \neq k; \quad l, k = 1, 2, \dots, n).$$

Onda

$$\alpha_k (Ax^{(k)}, x^{(k)}) = (b, x^{(k)}), \quad \alpha_k = \frac{(b, x^{(k)})}{(Ax^{(k)}, x^{(k)})}.$$

Tapdığımız α_k -ları (3.9)-da yerinə yazsaq, alınan x -i (3.2) sisteminin təqribi həlli kimi qəbul etmək olar.

§4. İterasiya üsulları

Bu paragrafda (3.2) sistemini təqribi həll etmək üçün adi iterasiya və Zeydel üsulları verilir.

Əvvəlcə bəzi köməkçi anlayışları verək.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

vektorunun norması aşağıdakı ədədlərdən birinə deyilir:

$$\|x\|_1 = \max_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Məlumdur ki, bu normalar ekvivalent normalardır. $A = (a_{ij})_{i,j=1,\overline{n}}$ matrisinin norması aşağıdakı ədədlərdən biri ilə təyin edilir:

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|, \quad \|A\|_2 = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|, \quad \|A\|_3 = \sqrt{\lambda_1},$$

burada λ_1 ədədi $A'A$ matrisinin ən böyük məxsusi ədədidir, A' isə A -nin transponirə olunmuş matrisidir. Məlumdur ki, bu normalar da birbirilə ekvivalentdirlər.

Aşağıdakı norma indekssiz yazılsa, bu üç normadan ixtiyari birini götürmək olar.

1. Adi iterasiya üsulu. (3.2) sistemini aşağıdakı ekvivalent sistem ilə əvəz edək:

$$x = Bx + c, \quad (3.10)$$

burada

$$c = Cb, \quad B = I - CA,$$

C – ixtiyari qeyri-məxsusi matris, I isə vahid matrisdir.

(3.10) sistemini təqribi həll etmək üçün aşağıdakı ardıcıl yaxınlaşmaları quraq:

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.11)$$

burada $x^{(0)}$ ixtiyari verilmiş vektordur. Buradan

$$x^{(m)} = B^m x^{(0)} + \left(\sum_{i=0}^{m-1} B^i \right) c. \quad (3.12)$$

Teorem 3.1. Əgər B matrisinin bütün məxsusi ədədlərinin modulu vahiddən kiçikdirsə, onda ümumi həddi (3.12) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(m)}\}$ ardıcılığı (3.2) sisteminin həllinə yığılır.

İsbatı. Aşkardır ki, $\{x^{(m)}\}$ ardıcılığının yığıldığını isbat etməklə teoremi isbat etmiş olur. Bunun üçün (3.11) bərabərliklərində $m \rightarrow \infty$ limitə keçmək kifayətdir. $\{x^{(m)}\}$ ardıcılığının yığıldığını isbat etmək üçün

$$I + B + B^2 + \dots + B^k + \dots \quad (3.13)$$

sırasına baxaq. Xətti cəbr kursundan məlum fakta əsasən B matrisinin məxsusi ədədləri modulca vahiddən kiçik olduğundan, (3.13) yığılır. Buradan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B^m x^{(0)} = 0$$

və

$$(I + B + B^2 + \dots + B^k + \dots)c$$

sırası yığılır. Onda (3.12)-dən $\{x^{(m)}\}$ yığıldığını alırıq. Teorem isbat olundu.

Xətti cəbr kursundan məlumdur ki,

$$\max_i |\lambda_i| \leq \|B\|,$$

burada λ_i , B matrisinin məxsusi ədədləridir. Ona görə

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.15)$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 < 1 \quad (3.16)$$

bərabərsizliklərindən hər biri ödəndikdə B matrisinin bütün məxsusi ədədləri modulca vahiddən kiçik olar; burada b_{ij} ədədləri B matrisinin elementləridir.

(3.14) və (3.15) bərabərsizlikləri ödəndikdə, uyğun olaraq

$$\|B\|_1 < 1, \quad \|B\|_2 < 1$$

bərabərsizliklərinin ödənməsi, normaların tərifindən çıxır. İsbat edək ki, (3.16) bərabərsizliyindən

$$\|B\|_3 < 1$$

olduğu alınır.

$B'B$ matrisinin məxsusi ədədləri mənfi olmadığından

$$\lambda_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

(Burada fərz edirik ki, λ_1 məxsusi ədədlərinin ən böyüyüdür.) Digər tərəfdən məlumdur ki, $B'B$ matrisinin izi aşağıdakı cəmə bərabərdir:

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2.$$

Buradan

$$\|B\|_3 = \sqrt{\lambda_1} \leq \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

olduğunu alırıq.

Teorem 3.2. Əgər

$$\|B\| < 1$$

şərti ödənilirsə, onda (3.12) ardıcılığı aşağıdakı sürətlə (3.2) sisteminin həllinə x^* yığılır:

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \|x^{(0)} - x^*\| \|B\|^m$$

və ya

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|B\|} \|B\|^m.$$

İsbatı. (3.11) yaxınlaşmalarından və

$$x^* = Bx^* + c$$

eyniliyindən

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \|B\| \|x^{(m-1)} - x^*\|$$

və ya

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \|B\|^m \|x^{(0)} - x^*\|$$

olduğunu alırıq.

(3.11) yaxınlaşmalarından və (3.12) - dən alınan

$$x^* = \left(\sum_{i=0}^{\infty} B^i \right) c$$

düsturundan

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \left(\sum_{i=m}^{\infty} \|B\|^i \right) \|c\|$$

və ya

$$\|x^{(m)} - x^*\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|B\|} \|B\|^m$$

olduğunu alırıq. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, $\|B\| < 1$ şərtindən (3.10) sisteminin həllinin yeganəliyi də alınır. Doğrudan da fərz edək ki, sistemin iki həlli var:

Onda

$$x = Bx + b, \quad y = By + b.$$

$$\|x - y\| \leq \|B\| \|x - y\|.$$

Buradan $x = y$ olduğu alınır.

İndi isə a_{ij} -lərin üzərinə elə şərtlər qoyaq ki, (3.14), (3.15) və (3.16)

bərabərsizlikləri ödənilsin.

D ilə elə diaqonal matrisi işarə edək ki, onun diaqonal elementləri A matrisinin diaqonal elementləri ilə üst-üstə düşsün.

(3.10)- da $C = D^{-1}$ qəbul edək. Onda (3.10) əvəzinə

$$x_i = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ii}} x_2 - \dots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}} x_{i-1} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}} x_{i+1} - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

sistemi almış olarıq. Buradan görünür ki,

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.17)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.18)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_{jj}^2} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n |a_{ij}|^2 < 1 \quad (3.19)$$

bərabərsizlikləri ödəndikdə uyğun olaraq (3.14), (3.15) və (3.16) bərabərsizlikləri də ödənər. Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruz.

Teorem 3.3. *Tutaq ki, (3.1) sisteminin a_{ij} əmsalları (3.17), (3.18) və (3.19) bərabərsizliklərindən birini ödəyir. Onda (3.1) sisteminin yeganə həlli var və*

$$x_i^{(m)} = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1^{(m-1)} - \frac{a_{i2}}{a_{ii}} x_2^{(m-1)} - \dots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}} x_{i-1}^{(m-1)} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}} x_{i+1}^{(m-1)} - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n^{(m-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.20)$$

ardıcıl yaxınlaşmaları bu həllə yığılır.

Yığılma sürəti, məsələn, aşağıdakı düsturlarla təyin olunur:

$$\|x^{(m)} - x^*\|_1 \leq \|x^{(0)} - x^*\|_1 \mu^m, \quad (3.21)$$

$$\mu = \max_i \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad \text{və ya} \quad \|x^{(m)} - x^*\|_1 \leq \frac{\max_i \left| \frac{b_i}{a_{ii}} \right|}{1 - \mu} \mu^m.$$

2. Zeydel üsulu. İndi isə (3.1) sisteminin təqribi həllini tapmaq üçün ardıcıl yaxınlaşmaları aşağıdakı qayda ilə quraq:

$$x_i^{(m)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)} + \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (3.22)$$

Fərz edək ki, a_{ij} əmsalları (3.17), (3.18) və (3.19) bərabərsizliklərindən birini ödəyir. Bu o deməkdir ki, adi ardıcıl yaxınlaşmalar, yəni (3.20) yaxınlaşmaları (3.1) sisteminin həllinə yığılır və yığılma sürəti (3.21) düsturu ilə təyin olunur.

İsbat edək ki, Zeydel yaxınlaşmaları da, yəni (3.22) yaxınlaşmaları da, (3.1) sisteminin həllinə yığılır. Yığılma sürətini təyin edək. (3.22) və (3.1)-dən

$$\|x_i^{(m)} - x_i^*\| \leq \beta_i \|x^{(m)} - x^*\| + \gamma_i \|x^{(m-1)} - x^*\|,$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad \gamma_i = \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

və ya

$$\|x^{(m)} - x^*\|_1 \leq \bar{\mu} \|x^{(m-1)} - x^*\|_1 \leq \|x^{(0)} - x^*\|_1 \bar{\mu}^m,$$

$$\bar{\mu} = \max_i \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i}.$$

İsbat edək ki, $\bar{\mu} \leq \mu$. Bu o deməkdir ki, Zeydel yaxınlaşmaları (3.1) sisteminin həllinə adi iterasiyalardan sürətlə yığılır.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \beta_i + \gamma_i \leq \mu < 1 \quad \text{və} \quad \beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} = \frac{\beta_i(1 - \beta_i - \gamma_i)}{1 - \beta_i} \geq 0$$

olduğundan

$$\mu = \max_i (\beta_i + \gamma_i) \geq \max_i \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} = \bar{\mu}.$$

Fərz edək ki, $A = (a_{ij})_{ij=1, n}$ matrisi simmetrik, müsbət-müəyyəndir.

Aşağıdakı iki dərəcəli çoxhədliliyə baxaq

$$F(x) = (Ax, x) - 2(b, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i,$$

burada b, n – ölçülü vektordur.

A matrisi müsbət olduğundan $F(x)$ -in yeganə minimumu olar.

Aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3.4. Əgər n – ölçülü Evklid fəzasının E^n hər hansı bir $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ nöqtəsində $F(x)$ çoxhədlisi minimum alırsa, onda bu vektorun koordinatları $-(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (3.1) sisteminin həlli olar.

İsbatı. Tutaq ki, $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in E^n$ nöqtəsi $F(x)$ çoxhədlisinə minimum verir. Bu vektora $\lambda \Delta x$ artımı verib $F(x)$ -in artımını $\Delta F = F(x^* + \lambda \Delta x) - F(x^*)$ hesablayaq. Burada $\Delta x \in E^n$ ixtiyari vektor, λ isə ədədi parametrdir. Əvvəlcə $F(x^* + \lambda \Delta x)$ - i hesablayaq:

$$\begin{aligned} F(x^* + \lambda \Delta x) &= (Ax^* + \lambda \Delta x, x^* + \lambda \Delta x) - 2(b, x^* + \lambda \Delta x) = \\ &= (Ax^*, x^*) + \lambda(Ax^*, \Delta x) + \lambda(A\Delta x, x^*) + \\ &\quad + \lambda^2(A\Delta x, \Delta x) - 2(b, x^*) - 2\lambda(b, \Delta x). \end{aligned}$$

Digər tərəfdən

$$(A\Delta x, x^*) = (\Delta x, Ax^*) = (Ax^*, \Delta x)$$

olduğundan

$$F(x^* + \lambda \Delta x) = F(x^*) + 2\lambda(Ax^* - b, \Delta x) + \lambda^2(A\Delta x, \Delta x).$$

Buradan

$$\Delta F = 2\lambda(Ax^* - b, \Delta x) + \lambda^2(A\Delta x, \Delta x) \geq 0.$$

Tutaq ki, $\lambda > 0$. Onda

$$2(Ax^* - b, \Delta x) + \lambda(A\Delta x, \Delta x) \geq 0.$$

Burada $\lambda \rightarrow 0$ götürsək:

$$(Ax^* - b, \Delta x) \geq 0. \quad (3.23)$$

İndi isə $\lambda < 0$ götürək. Onda

$$2(Ax^* - b, \Delta x) + \lambda(A\Delta x, \Delta x) \leq 0.$$

Burada $\lambda \rightarrow 0$ götürsək:

$$(Ax^* - b, \Delta x) \leq 0. \quad (3.24)$$

(3.23) və (3.24)-dən

$$(Ax^* - b, \Delta x) = 0.$$

və buradan

$$Ax^* = b$$

olduğunu alırıq ($\Delta x \neq 0$). Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən görünür ki, (3.1) sisteminin həllini tapmaq üçün $F(x)$ çoxhədlisinə minimum verən nöqtəni tapmaq kifayətdir.

Aşağıda belə nöqtəni tapmaq üçün üsullar verilir.

1. Koordinatlar üzrə enmə. $F(x)$ çoxhədlisinə minimum verən nöqtə üçün sıfırıncı yaxınlaşmanı ixtiyari $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ vektoru götürək.

x_1 dəyişəninə nəzərən birdəyişənli $F(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ funksiyasına baxaq və onun minimumunu tapaq. Bunun üçün

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2^{(0)} + \dots + a_{1n}x_n^{(0)} - b_1) = 0$$

tənliyini həll etmək kifayətdir.

Bu tənliyin həllini $x_1^{(1)}$ ilə işarə edib, x_2 dəyişəninə nəzərən birdəyişənli $F(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ funksiyasına baxaq və onun minimumunu tapaq. Bunun üçün

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 2(a_{11}x_1^{(1)} + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n^{(0)} - b_2) = 0$$

tənliyini həll etmək kifayətdir. Bu tənliyin həllini $x_2^{(1)}$ ilə işarə edib, $x_3^{(1)}$ -i, tapmaq olar. Bu prosesi davam etdirib $x_n^{(1)}$ -də tapmaq olar.

İkinci yaxınlaşmaları qurmaq üçün $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ -dən başlayıb yuxarıdakı qaydanı tətbiq etmək lazımdır.

Bu qayda ilə digər yaxınlaşmalar da qurulur.

2.Sürətlə enmə. İxtiyari $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ vektorunu, $F(x)$ -ə minimum verən nöqtəni tapmaq üçün, sıfırıncı yaxınlaşma kimi qəbul edək və birinci yaxınlaşmanı aşağıdakı düsturla təyin edək:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 r^{(0)}, \quad r^{(0)} = b - Ax^{(0)}.$$

α_0 ədədini elə seçək ki, $F[x^{(0)} + \alpha r^{(0)}] = \Phi(\alpha)$ minimum qiymət alsın. Bunun üçün

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = -2(r^{(0)}, r^{(0)}) + 2\alpha(r^{(0)}, Ar^{(0)}) = 0$$

tənliyini həll etmək lazımdır. Buradan

$$\alpha_0 = \frac{(r^{(0)}, r^{(0)})}{(r^{(0)}, Ar^{(0)})}$$

olduğunu alırıq. Bundan sonra $r^{(1)} = b - Ax^{(1)}$ qəbul edib, ikinci yaxınlaşmanı $x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha r^{(1)}$ düsturu ilə təyin edək.

$$\frac{dF}{d\alpha}(x^{(1)} + \alpha r^{(1)}) = 0$$

tənliyini həll etsək:

$$\alpha_1 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(r^{(1)}, Ar^{(1)})}$$

olduğunu alırıq.

Bu qayda ilə

$$x^{(m)} = x^{(m-1)} + \alpha_{m-1} r^{(m-1)}, \quad r^{(m-1)} = b - Ax^{(m-1)},$$

$$\alpha_{m-1} = \frac{(r^{(m-1)}, r^{(m-1)})}{(r^{(m-1)}, Ar^{(m-1)})}$$

yaxınlaşmalarını qurmaq olar.

İsbat edək ki, bu qayda ilə qurulmuş $\{x^{(m)}\}$ ardıcılığı $F(x)$ -ə minimum verən x^* nöqtəsinə yığılır.

Xətti cəbr kursundan məlumdur ki, simmetrik, müsbət-müəyyən A matrisi üçün elə $M_* > 0$, $M^* > 0$ ədədləri tapmaq olar ki,

$$M_*(x, x) \leq (Ax, x) \leq M^*(x, x)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Aşkardır ki,

$$\begin{aligned} F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) &= (Ax^{(1)}, x^{(1)}) - 2(x^{(1)}, b) - (Ax^{(0)}, x^{(0)}) - 2(x^{(0)}, b) = \\ &= (Ax^{(0)}, x^{(0)}) + 2\alpha_0(Ax^{(0)}, r^{(0)}) + \alpha_0^2(Ar^{(0)}, r^{(0)}) - \\ &\quad - 2(x^{(0)}, b) - 2\alpha_0(r^{(0)}, b) - (Ax^{(0)}, x^{(0)}) + 2(x^{(0)}, b) = \\ &= \alpha_0^2(Ar^{(0)}, r^{(0)}) + 2\alpha_0(r^{(0)}, Ax^{(0)}) - 2\alpha_0(r^{(0)}, b) = \\ &= \alpha_0^2(Ar^{(0)}, r^{(0)}) + 2\alpha_0(Ar^{(0)}, r^{(0)}) = \frac{(r^{(0)}, r^{(0)})^2}{(r^{(0)}, Ar^{(0)})}, \end{aligned}$$

$$F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) = -\frac{(r^{(0)}, r^{(0)})^2}{(r^{(0)}, Ar^{(0)})}.$$

Digər tərəfdən

$$\begin{aligned} F(x^{(0)}) - F(x^*) &= (Ax^{(0)}, x^{(0)}) - 2(b, x^{(0)}) - (Ax^*, x^*) + 2(b, x^*) = \\ &= (Ax^{(0)}, x^{(0)}) - (Ax^{(0)}, x^*) - (Ax^*, x^{(0)}) + (Ax^*, x^*) = \\ &= (A(x^{(0)} - x^*), x^{(0)} - x^*) = (A^{-1}r^{(0)}, r^{(0)}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{F(x^{(1)}) - F(x^{(0)})}{F(x^{(0)}) - F(x^*)} = -\frac{(r^{(0)}, r^{(0)})^2}{(r^{(0)}, Ar^{(0)})(A^{-1}r^{(0)}, r^{(0)})}. \quad (3.25)$$

A matrisinin məxsusi ədədlərini

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$$

və uyğun ortonormal məxsusi vektorları $z_1, z_2, \dots, z_n$ ilə işarə edək.

$r^{(0)}$ vektorunu $z_1, z_2, \dots, z_n$ vektorları üzrə ayıraq:

$$r^{(0)} = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots + \gamma_n z_n.$$

Onda

$$\begin{aligned} Ar^{(0)} &= \gamma_1 Az_1 + \gamma_2 Az_2 + \dots + \gamma_n Az_n = \\ &= \gamma_1 \lambda_1 z_1 + \gamma_2 \lambda_2 z_2 + \dots + \gamma_n \lambda_n z_n, \\ A^{-1}r^{(0)} &= \gamma_1 A^{-1}z_1 + \gamma_2 A^{-1}z_2 + \dots + \gamma_n A^{-1}z_n = \\ &= \gamma_1 \lambda_1^{-1} z_1 + \gamma_2 \lambda_2^{-1} z_2 + \dots + \gamma_n \lambda_n^{-1} z_n. \end{aligned}$$

Bu bərabərlikləri nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} (Ar^{(0)}, r^{(0)}) &= \gamma_1^2 \lambda_1 + \gamma_2^2 \lambda_2 + \dots + \gamma_n^2 \lambda_n, \\ (A^{-1}r^{(0)}, r^{(0)}) &= \gamma_1^2 \lambda_1^{-1} + \gamma_2^2 \lambda_2^{-1} + \dots + \gamma_n^2 \lambda_n^{-1}. \end{aligned}$$

Onda (3.25)-dən

$$\begin{aligned} \frac{F(x^{(0)}) - F(x^{(1)})}{F(x^{(0)}) - F(x^*)} &= \\ &= \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2)^2}{(\gamma_1^2 \lambda_1 + \gamma_2^2 \lambda_2 + \dots + \gamma_n^2 \lambda_n)(\gamma_1^2 \lambda_1^{-1} + \gamma_2^2 \lambda_2^{-1} + \dots + \gamma_n^2 \lambda_n^{-1})} \end{aligned}$$

olduğunu alırıq. Burada

$$\frac{\gamma_i^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2} = \delta_i \quad \left(\delta_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \delta_i = 1 \right)$$

işarələməsini aparsaq:

$$\frac{F(x^{(0)}) - F(x^{(1)})}{F(x^{(0)}) - F(x^*)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \delta_i \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \lambda_i^{-1} \right)}. \quad (3.26)$$

Elementar çevrilmələr vasitəsilə asanlıqla isbat etmək olar ki, əgər $0 < M_* < \lambda_i \leq M^*$ ($i = 1, 2, \dots, n$) isə, onda ixtiyari həqiqi

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \quad \left(\delta_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \delta_i = 1 \right) \quad \text{və} \quad \lambda_i > 0 \quad \text{ədədləri üçün}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \delta_i \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \lambda_i^{-1} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{M^*}{M_*}} + \sqrt{\frac{M_*}{M^*}} \right)^2$$

bərabərsizliyi doğru olar. (Bu faktın isbatı oxuculara tapşırıılır).

Bu faktdan istifadə edərək (3.26)-dan

$$\frac{F(x^{(0)}) - F(x^{(1)})}{F(x^{(0)}) - F(x^*)} \geq \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{M^*}{M_*}} + \sqrt{\frac{M_*}{M^*}} \right)^2} = q \quad (0 < q < 1),$$

buradan isə

$$\begin{aligned} F(x^{(1)}) - F(x^*) &= -[F(x^{(0)}) - F(x^{(1)})] + [F(x^{(0)}) - F(x^*)] \leq \\ &\leq -q[F(x^{(0)}) - F(x^*)] + [F(x^{(0)}) - F(x^*)] = \\ &= (1 - q)[F(x^{(0)}) - F(x^*)] = (1 - q)c \end{aligned}$$

alınar. Burada $c = F(x^{(0)}) - F(x^*)$.

Bu prosesi təkrarən davam etdirməklə

$$F(x^{(m)}) - F(x^*) \leq C(1 - q)^m$$

alırıq. Nəhayət, üsulun xətasını qiymətləndirsək:

$$\begin{aligned} \|x^{(m)} - x^*\|_3^2 &\leq (x^{(m)} - x^*, x^{(m)} - x^*) \leq \frac{1}{M_*} (Ax^{(m)} - x^*, x^{(m)} - x^*) = \\ &= \frac{1}{M_*} (Ax^{(m)} - b, x^{(m)} - x^*) = \\ &= \frac{1}{M_*} [(Ax^{(m)}, x^{(m)}) - 2(b, x^{(m)}) - (Ax^*, x^*) + 2(b, x^*)] = \\ &= \frac{1}{m} [F(x^{(m)}) - F(x^*)] \leq \frac{C}{M_*} (1 - q)^m = \frac{C}{M_*} \left(\frac{M^* - M_*}{M^* + M_*} \right)^{2m}, \end{aligned}$$

$$\|x^* - x^{(m)}\|_3 \leq \sqrt{\frac{C}{M_*}} \left(\frac{M^* - M_*}{M^* + M_*} \right)^m$$

olduğunu alırıq ki, bu bərabərsizlik də ən məhsulunun yığılma sürətini təyin edir.

§6. Adi iterasiyanın yığılmasını sürətləndirmək üsulları

Yenə də (3.1) sisteminə baxaq və bu sistemi (3.10) şəklində yazaq:

$$x = Bx + c.$$

Burada

$$B = I - CA, \quad c = Cb.$$

C ixtiyari qeyri-məxsusi matrisdir.

Tutaq ki, (3.10) sistemini təqribi həll etmək üçün hər hansı $x^{(0)}$ -dan başlayaraq adi iterasiya üsulu ilə $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ yaxınlaşmaları

$$x^{(i)} = Bx^{(i-1)} + c$$

qurulmuşdur. Elə y vektoru quraq ki, bu vektor (3.2) sisteminin həllinə $x^{(m)}$ vektoruna nisbətən daha yaxın olsun.

Fərz edək ki, B matrisinin məxsusi ədədləri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ həqiqidir və

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Bu məxsusi ədədlərə uyğun ortonormal məxsusi vektorları $z_1, z_2, \dots, z_n$ ilə işarə edək.

1. Qavurin üsulu. Aşağıdakı kimi

$$y = x_0 + \alpha_0(x_1 - x_0) + \dots + \alpha_{m-1}(x_m - x_{m-1})$$

vektora baxaq. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ parametrlərini elə seçək ki, y vektoru (3.2) sisteminin həllinə kifə qədər yaxın olsun. $x_1 - x_0$ vektorunu $z_1, z_2, \dots, z_n$ sisteminə görə ayıraq:

$$x_1 - x_0 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_n z_n.$$

Onda

$$x_2 - x_1 = B(x_1 - x_0) = c_1 Bz_1 + c_2 Bz_2 + \dots + c_n Bz_n,$$

$$x_2 - x_1 = c_1 \lambda_1 z_1 + c_2 \lambda_2 z_2 + \dots + c_n \lambda_n z_n.$$

Bu qayda ilə

$$x_m - x_{m-1} = c_1 \lambda_1^{m-1} z_1 + c_2 \lambda_2^{m-1} z_2 + \dots + c_n \lambda_n^{m-1} z_n \quad (3.28)$$

olduğunu alırıq.

B matrisinin məxsusi ədədləri mütləq qiymətcə vahiddən kiçik olduqlarından irəlidə isbat etmişdik ki, (3.2) sisteminin həlli aşağıdakı yığılan sıra ilə təyin edilir:

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}).$$

Burada (3.28)-i nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (c_1 \lambda_1^{i-1} z_1 + c_2 \lambda_2^{i-1} z_2 + \dots + c_n \lambda_n^{i-1} z_n) = \\ &= x_0 + c_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} \right) z_1 + c_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_2^{i-1} \right) z_2 + \dots + c_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^{i-1} \right) z_n, \end{aligned}$$

$$x = x_0 + \frac{c_1}{1 - \lambda_1} z_1 + \frac{c_2}{1 - \lambda_2} z_2 + \dots + \frac{c_n}{1 - \lambda_n} z_n. \quad (3.29)$$

(3.28) düsturundan istifadə edərək təqribi həll üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \alpha_1(c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_n z_n) + \alpha_2(c_1 \lambda_1 z_1 + c_2 \lambda_2 z_2 + \\ &\quad + \dots + c_n \lambda_n z_n) + \dots + \alpha_{m-1}(c_1 \lambda_1^{m-1} z_1 + c_2 \lambda_2^{m-1} z_2 + \\ &\quad + \dots + c_n \lambda_n^{m-1} z_n) = y_0 + c_1(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_1 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-1}) z_1 + \\ &\quad + c_2(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_2^{m-1}) z_2 + \dots + \\ &\quad + c_n(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_n + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_n^{m-1}) z_n. \end{aligned}$$

Aşağıdakı işarələməni

$$P_{m-1}(\lambda) = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \dots + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1}$$

aparsaq:

$$y = y_0 + c_1 P_{m-1}(\lambda_1) + c_2 P_{m-1}(\lambda_2) + \dots + c_n P_{m-1}(\lambda_n). \quad (3.30)$$

(3.29) və (3.30)-dan

$$x - y = \sum_{i=1}^n c_i \left[\frac{1}{1 - \lambda_i} - P_{m-1}(\lambda_i) \right] z_i$$

olduğunu alırıq. Tutaq ki,

$$M = \max \{ |\lambda_i| \} < 1.$$

Elə $P_{m-1}(\lambda)$ çoxhədlisini tapmaq lazımdır ki, $[-M, M]$ parçasında $\frac{1}{1 - \lambda}$ funksiyasını ən yaxşı approksimasiya edən çoxhədlisi olsun.

İsbat edilir ki, [2] belə çoxhədli

$$\begin{aligned} P_{m-1}(\lambda) &= \frac{2\alpha^m}{(1 - \alpha^2)^2} \frac{1}{\lambda - 1} \left[T_m\left(\frac{\lambda}{M}\right) - 2\alpha T_{m-1}\left(\frac{\lambda}{M}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 T_{m-1}\left(\frac{\lambda}{M}\right) \right] + \frac{\alpha}{\lambda - 1}, \quad \alpha = \frac{1}{M} - \sqrt{\frac{1}{M} - 1} \end{aligned}$$

şəklində olar. Burada $T_m(\lambda)$ Çebışev çoxhədlisidir.

Əgər tapılan y vektoru bizi qane etmirsə, onda bu vektoru da $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ vektorlarına qoşub, bu qayda ilə yeni y vektorunu tapmaq lazımdır.

2. Lyusternik üsulu. Tutaq ki, B matrisinin məxsusi ədədlərinin mütləq qiymətcə ən böyüyünün təqribi qiyməti $-\lambda_1^*$ məlumdur. Sonrakı

paraqrafda məxsusi ədədlərin təqribi qiymətlərinin tapılma üsulları veriləcəkdir.

Qavurun üsulunda olduğu kimi

$$x_1 - x_0 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_n z_n$$

götürək. Onda

$$x_m - x_{m-1} = c_1 \lambda_1^{m-1} z_1 + c_2 \lambda_2^{m-1} z_2 + \dots + c_n \lambda_n^{m-1} z_n,$$

$$\begin{aligned} x - x_{m-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (x_{m+k} - x_{m+k-1}) = \\ &= \frac{\lambda_1^{m-1}}{1 - \lambda_1} c_1 z_1 + \frac{\lambda_2^{m-1}}{1 - \lambda_2} c_2 z_2 + \dots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{1 - \lambda_n} c_n z_n. \end{aligned}$$

Bu düsturlardan kafi qədər böyük m -lər üçün

$$x - x_{m-1} \approx \frac{\lambda_1^{m-1}}{1 - \lambda_1} c_1 z_1, \quad (3.31)$$

$$x_m - x_{m-1} \approx \lambda_1^{m-1} c_1 z_1 \quad (3.32)$$

olduğunu alırıq. Buradan görünür ki,

$$y = x_{m-1} + \frac{1}{1 - \lambda_1^*} (x_m - x_{m-1})$$

vektoru (3.2) sisteminin dəqiq həllinə x_m -dən daha yaxındır.

Bunu isbat etmək üçün $x - y$ və $x - x_m$ fərqlərini hesablayaq.

Fərz edək ki, $\lambda_1 - \lambda_1^* = \varepsilon = o\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{m-1}\right)$. Burada λ_2 məxsusi ədədi

başqa məxsusi ədədlərin (λ_1 -dən başqa) mütləq qiymətə ən böyüyüdür.

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$\bar{B} = \frac{1}{1 - \lambda_1^*} (B - \lambda_1^* I).$$

Aşkardır ki,

$$\bar{B} = (x - x_{m-1}) = x - y$$

Doğrudan da:

$$\begin{aligned} \bar{B}(x - x_{m-1}) &= \frac{1}{1 - \lambda_1^*} B(x - x_{m-1}) - \frac{1}{1 - \lambda_1^*} (x - x_{m-1}) + \\ &+ (x - x_m) = (x - x_m) + \frac{1}{1 - \lambda_1^*} (Bx - x) - \frac{1}{1 - \lambda_1^*} (Bx_{m-1} - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

$$= (x - x_m) + \frac{1}{1 - \lambda_1} [-b + (b - x_m) + x_{m-1}] =$$

$$= (x - x_m) - \frac{1}{1 - \lambda_1^*} (x_m - x_{m-1}) = x - y.$$

Digər tərəfdən:

$$\begin{aligned} \bar{B}(x - x_{m-1}) &= \frac{1}{1 - \lambda_1^*} B(x - x_{m-1}) - \frac{\lambda_1^*}{1 - \lambda_1^*} (x - x_{m-1}) = \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_1^*} \left[\frac{\lambda_1^m}{1 - \lambda_1} c_1 z_1 + \frac{\lambda_2^m}{1 - \lambda_2} c_2 z_2 + \dots + \frac{\lambda_n^m}{1 - \lambda_n} c_n z_n \right] - \\ &- \frac{\lambda_1^*}{1 - \lambda_1^*} \left[\frac{\lambda_1^{m-1}}{1 - \lambda_1} c_1 z_1 + \frac{\lambda_2^{m-1}}{1 - \lambda_2} c_2 z_2 + \dots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{1 - \lambda_n} c_n z_n \right] = \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_1^*} \left[\frac{\lambda_1^{m-1}}{1 - \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda_1^*) c_1 z_1 + \frac{\lambda_2^{m-1}}{1 - \lambda_2} (\lambda_2 - \lambda_1^*) c_2 z_2 + \right. \\ &+ \dots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{1 - \lambda_n} (\lambda_n - \lambda_1^*) c_n z_n \left. \right] = \frac{1}{1 - \lambda_1^*} \left[\frac{\lambda_1^{m-1} \varepsilon}{1 - \lambda_1} c_1 z_1 + \right. \\ &+ \frac{\lambda_2^{m-1}}{1 - \lambda_2} (\lambda_2 - \lambda_1^*) c_2 z_2 + \dots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{1 - \lambda_n} (\lambda_n - \lambda_1^*) c_n z_n \left. \right] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} x - y &= \frac{1}{1 - \lambda_1^*} \left[\frac{\lambda_1^{m-1} \varepsilon}{1 - \lambda_1} c_1 z_1 + \frac{\lambda_2^{m-1}}{1 - \lambda_2} (\lambda_1 - \lambda_1^*) c_2 z_2 + \dots + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_n^{m-1}}{1 - \lambda_n} (\lambda_n - \lambda_1^*) c_n z_n \right], \quad x - y = O(\lambda_2^{m-1}). \end{aligned}$$

(3.31) və (3.32)-dən alırıq ki,

$$x - x_m \approx O(\lambda^{m-1}).$$

$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ olduğundan, bu axırıncı iki düsturu müqayisə etdikdə y -in x_m -ə nəzərən dəqiq həllə x -ə daha yaxın olduğunu alırıq.

§7. Matrisin məxsusi ədədləri və vektorlarının təqribi üsullarla tapılması

Bu paraqrafda λ parametrimin elə qiymətləri axtarılır ki,

$$Ax = \lambda x$$

xətti bircinsli tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həlli olsun. λ -nın bu qiymətinə A matrisinin məxsusi ədədi, uyğun sıfırdan fərqli həllə isə məxsusi vektoru deyilir. Burada $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ kvadrat matris, x isə n – ölçülü vektordur.

Aşkardır ki, A matrisinin məxsusi ədədləri

$$D(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n) = 0$$

tənliyinin kökləri olacaqdır (I vahid matrisdir). Bu tənliyə A matrisinin xarakteristik tənliyi, $D(\lambda)$ -ya isə xarakteristik çoxhədlisi deyirlər.

Bu paraqrafda A matrisinin məxsusi ədədləri və vektorlarını tapmaq üçün təqribi üsullar şərh olunur.

1. Krlov üsulu. Əvvəlcə A matrisinin məxsusi ədədlərini tapaq. Bunun üçün $p_1, p_2, \dots, p_n$ əmsallarını tapmaq kifayətdir. (Çoxhədlinin təqribi köklərini tapmaq üçün IV fəsildə müxtəlif üsullar veriləcək.)
Əgər

$$\varphi(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I = 0$$

olarsa, onda

$$\varphi(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m$$

çoxhədlisinə A matrisini sıfır çevirən çoxhədli deyirlər.

Xətti cəbr kursundan məlumdur ki, (Hamilton-Keli teoremi) A matrisinin xarakteristik çoxhədlisi, A və A' matrislərini (A matrisi A -nın transponirə edilmiş matrisidir) sıfır çevirən çoxhədlidir, yəni

$$D(A) = 0, \quad D(A') = 0.$$

A matrisini sıfır çevirən çoxhədlilər içərisində ən kiçik dərəcəsi olan və yüksək dərəcəli həddin əmsalı vahid olan yeganə çoxhədli var. Bu çoxhədliyə A matrisinin minimal çoxhədlisi deyilir.

Aşağıdakı kimi vektorlar sistemində baxaq:

$$c^{(i)} = Ac^{(i-1)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_n^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

burada $c^{(0)} = (c_1^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$ ixtiyari götürülmüş vektordur.

Buradan aşkardır ki,

$$c^{(i)} = A^i c^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Hamilton-Keli teoreminə əsasən

$$D(A)^{(0)} = 0$$

olar, yəni:

$$A^n c^{(0)} - p_1 A^{n-1} c^{(0)} - p_2 A^{n-2} c^{(0)} - \dots - p_{n-1} A c^{(0)} - p_n c^{(0)} = 0, \\ p_1 c^{(n-1)} + p_2 c^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} c^{(1)} + p_n c^{(0)} = c^{(n)}. \quad (3.33)$$

Beləliklə, $p_1, p_2, \dots, p_n$ məchullarını tapmaq üçün bircins olmayan xətti cəbri tənliklər sistemini almış oluruq.

Tutaq ki, bu sistemin determinantı sıfırdan fərqlidir, yəni $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(n-1)}$ vektorları xətti asılı deyildir. Onda (3.33) sistemindən $p_1, p_2, \dots, p_n$ yeganə olaraq tapılır.

İndi tutaq ki, $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(n-1)}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır və $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(m)}$ ($m < n$) bu sistemdən götürülmüş maksimal sayda xətti asılı olmayan vektorlardır. Bu halda $D(\lambda)$, çoxhədlisinin əmsalları əvəzinə minimal çoxhədlinin

$$\psi(\lambda) = \lambda^m - \alpha_1 \lambda^{m-1} - \dots - \alpha_{m-1} \lambda - \alpha_m$$

əmsalları tapılır.

Bu halda aşkardır ki, (3.33) əvəzinə

$$\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_{m-1} c_1 + \alpha_m c_0 = c_m$$

sistemini almış oluruq. Bu sistemin determinantı sıfırdan fərqli olduğundan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ yeganə olaraq tapılır, yəni $\psi(\lambda)$ yeganə olaraq tapılır. Bu çoxhədlinin kökləri A matrisinin məxsusi ədədləridir.

İndi isə matrisin məxsusi vektorlarını tapaq.

Fərz edək ki, $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(n-1)}$ xətti asılı deyillər (əks halda xətti asılı olmayan $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(m)}$ ($m < n-1$) vektorlarını götürmək lazımdır). A matrisinin λ_i məxsusi ədədinə uyğun x_i məxsusi vektoru

$$x_i = \gamma_1 c^{(n-1)} + \gamma_2 c^{(n-2)} + \dots + \gamma_n c^{(0)}$$

şəklində axtaraq.

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, c^{(j)} = Ac^{(j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

düsturlarından

$$\gamma_1 c^{(n)} + \gamma_2 c^{(n-1)} + \dots + \gamma_n c^{(1)} = \lambda_i (\gamma_1 c^{(n-1)} + \gamma_2 c^{(n-2)} + \dots + \gamma_n c^{(0)}) \quad (3.34)$$

olduğunu alırıq. Digər tərəfdən

$$D(A)c^{(0)} = c^{(n)} - p_1 c^{(n-1)} - p_2 c^{(n-2)} - \dots - p_{n-1} c^{(1)} - p_n c^{(0)} = 0$$

olduğundan (3.34) əvəzinə

buradan da

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 p_1 - \lambda_i \gamma_1 + \gamma_2 &= 0, \\ \gamma_1 p_2 - \lambda_i \gamma_2 + \gamma_3 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_1 p_{n-1} - \lambda_i \gamma_{n-1} + \gamma_n &= 0, \\ \gamma_1 p_n - \lambda_i \gamma_n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

2. Danilevski üsulu. Frobenius matrisini:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & p_n \end{pmatrix}$$

$$|P - \lambda I| = (-1)\lambda^n + \left(\sum_{i=0}^n p_i \lambda^{i-1} \right)$$

Verilmiş A matrisini oxşar matrislər vasitəsilə P matrisinə gətirək. Xətti cəbr kursundan məlumdur ki, oxşar matrislərin xarakteristik çoxhədliləri eynidir. Ona görə də

$$|A - \lambda I| = (-1)^n \left(\lambda^n \sum_{i=1}^n p_i \lambda^{i-1} \right).$$

$p_2, \dots, p_n$ ədədlərinin tapılmasına gətirilir.

104

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ I_{n-j} & \tau \end{pmatrix}$$

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{a_{3n}}{a_{1n}} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{a_{1n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tau}{t} & I_{n-1} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$$

Asanlıqla yoxlamaq olur ki,

$$A^{(l)} = C_1^{-1} A C_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \cdots & a_{1n-2}^{(l)} & 0 & a_{1n}^{(l)} \\ a_{21}^{(l)} & a_{22}^{(l)} & \cdots & a_{2n-2}^{(l)} & 0 & a_{2n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11}^{(l)} & a_{n-12}^{(l)} & \cdots & a_{n-1n-2}^{(l)} & 0 & a_{n-1n}^{(l)} \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} & \cdots & a_{nn-2}^{(l)} & 1 & a_{nn}^{(l)} \end{pmatrix}$$

Burada $\alpha_{ij}^{(1)}$ ədədləri α_{ij} -lər vasitəsilə tapılır.

Bundan sonra $A^{(1)}$ matrisini sağdan

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{1n}^{(l)} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{2n}^{(l)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{2n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{nn}^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^{(l)} \\ I_{n-1} & \tau^{(l)} \end{pmatrix}$$

matrisə, soldan isə onun tərsinə - C_2^{-1} -ə vuraq. Onda

$$A^{(2)} = C_2^{-1} A^{(1)} C_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n-3}^{(2)} & 0 & 0 & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n-3}^{(2)} & 0 & 0 & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11}^{(2)} & a_{n-12}^{(2)} & \dots & a_{n-1n-3}^{(2)} & 1 & 0 & a_{n-1n}^{(2)} \\ a_{n1}^{(2)} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn-3}^{(2)} & 0 & 1 & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Bu prosesi davam etdirməklə

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2n}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{3n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} = P$$

matrisini alırıq. Beləliklə,

$$\begin{aligned} P &= A^{(n-1)} = C_{n-1}^{-1} A^{(n-2)} C_{n-1} = C_{n-1}^{-1} C_{n-2}^{-1} A^{(n-3)} C_{n-2} C_{n-1} = \\ &= \dots = C_{n-1}^{-1} C_{n-2}^{-1} \dots C_1^{-1} A C_1 \dots C_{n-2} C_{n-1}. \end{aligned}$$

Bu da tələb olunan isbatdır.

İndi isə məxsusi vektorları tapaq. Aşağıdakı işarələməni aparaq:

$$C = C_1 C_2 \dots C_{n-1}.$$

Onda

$$P = C^{-1} A C.$$

Tutaq ki, y vektoru P matrisinin λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektorudur:

$$Py = \lambda y.$$

Onda

$$C^{-1} A C y = P y = \lambda y, \quad A C y = \lambda C y,$$

yəni $x = S y$ vektoru A matrisinin λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektordur.

Beləliklə, A matrisinin məxsusi vektorunu tapmaq üçün P matrisinin məxsusi vektorunu tapmaq kifayətdir.

Tutaq ki, y vektoru P matrisinin λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektorudur:

$$Py = \lambda y.$$

Buradan

$$\left. \begin{aligned} p_1 y_n &= \lambda y_1, \\ y_1 + p_2 y_n &= \lambda y_2, \\ y_2 + p_3 y_n &= \lambda y_3, \\ \dots &\dots \\ y_{n-1} + p_{n-1} y_n &= \lambda y_{n-1}, \\ y_{n-1} + p_n y_n &= \lambda y_n \end{aligned} \right\}$$

olduğunu alırıq. Burada $y_1, y_2, \dots, y_n$ ədədləri y vektorunun koordinatlarıdır. Bu sistemi həll edib y vektorunun koordinatlarını tapırıq.

3. Fırlanma üsulu. Tutaq ki, A matrisi simmetrik matrisdir. Xətti cəbr kursundan məlumdur ki, belə matrislər üçün elə ortoqonal U matrisi var ki,

$$U' A U = D$$

düsturu doğrudur. Burada U' matrisi U -nun transponirə olunmuş matrisi, D isə diaqonal matrisdir. $U' = U^{-1}$ olduğundan D matrisi A -ya oxşar matrisdir. Ona görə də bunların məxsusi ədədləri eynidir. Diaqonal matrisin məxsusi ədədləri onun diaqonal elementləri olduğundan, U matrisini bilməklə, A matrisinin məxsusi ədədlərini tapmış oluruq. Bu halda A matrisinin məxsusi vektorları da asanlıqla tapılır. Doğrudan da, əgər λ_i ədədi D diaqonal matrisinin i -ci diaqonal elementidirsə, onda ona uyğun məxsusi vektor

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$$

şəklində olar, yəni

$$U' A U e_i = \lambda_i e_i, \quad A U e_i = \lambda_i U e_i.$$

Bu o deməkdir ki, $x_r = U e_r$ vektoru A matrisinin λ_r məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektorudur.

Beləliklə, isbat etdik ki, simmetrik A matrisinin məxsusi ədədlərini və vektorlarını tapmaq üçün, A matrisini diaqonal matrisə gətirən ortoqonal U matrisini tapmaq kifayətdir.

İndi isə U matrisini quraq. Tutaq ki, A matrisinin elementlərinin mütləq qiymətcə ən böyüyü $a_{i_0 j_0}$ ($i_0 < j_0$).

Aşağıdakı kimi ortoqonal matrisə baxaq (yazılmayan elementlər sıfırlardır):

$$U = \begin{pmatrix} & i_0 & & j_0 \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ & & 1 & \ddots \\ & \sin \varphi_0 & & 1 \\ & & \cos \varphi_0 & \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i_0 \\ \\ j_0 \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

φ_0 fırlanma bucağını elə seçək ki,

$$A^{(1)} = U'_0 A U_0 = (a_{ij}^{(1)})_{i,j=1,\overline{n}}$$

matrisinin $a_{i_0,j_0}^{(1)}$ elementi sıfıra çevrilsin. Bunun üçün əvvəlcə AU_0 , sonra isə $U_0^{-1}AU_0$ matrisini hesablayıb $a_{i_0,j_0}^{(1)}$ elementini tapmaq lazımdır. Asanlıqla hesablamaq olur ki,

$$a_{i_0,j_0}^{(1)} = (-a_{i_0,i_0} \sin \varphi_0 + a_{i_0,j_0} \cos \varphi_0) \cos \varphi_0 + (-a_{j_0,i_0} \sin \varphi_0 + a_{i_0,j_0} \cos \varphi_0) \sin \varphi_0 = \frac{1}{2}(a_{j_0,j_0} - a_{i_0,i_0}) \sin 2\varphi_0 + a_{i_0,j_0} \cos 2\varphi_0.$$

$a_{i_0,j_0}^{(1)} = 0$ şərtindən

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2a_{i_0,j_0}}{a_{i_0,i_0} - a_{j_0,j_0}} \left(|2\varphi_0| \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

olduğunu alırıq.

s_0 və s_1 ilə uyğun olaraq A və $A^{(1)}$ matrislərinin diaqonaldan kənarda olan elementlərinin kvadratları cəmini işarə edək. $s_0 - s_1$ fərqi hesablayaq. A və $A^{(1)}$ matrisləri bir-birindən yalnız i_0 və j_0 sətir və sütun elementləri ilə fərqləndiklərindən

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \quad (i \neq i_0, j_0; j \neq i_0, j_0).$$

Digər tərəfdən məlumdur ki, A matrisini soldan ortoqonal matrisə

vursaq, sətir elementlərinin kvadratları cəmi dəyişməz. Ona görə də

$$a_{i_0,i_0}^2 + a_{j_0,j_0}^2 = [a_{i_0,i_0}^{(1)}]^2 + [a_{j_0,j_0}^{(1)}]^2 \quad (i \neq i_0, j_0),$$

$$a_{i_0,j}^2 + a_{j_0,j}^2 = [a_{i_0,j}^{(1)}]^2 + [a_{j_0,j}^{(1)}]^2 \quad (j \neq i_0, j_0).$$

Axırıncı üç bərabərlikləri nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} s_0 - s_1 &= \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}^2 + \sum_{j \neq j_0} a_{j_0,j}^2 + \sum_{i \neq i_0, j_0} a_{i,i_0}^2 + \sum_{i \neq i_0, j_0} a_{i,j_0}^2 - \\ &- \sum_{j \neq i_0} [a_{i_0,j}^{(1)}]^2 - \sum_{j \neq j_0} [a_{j_0,j}^{(1)}]^2 - \sum_{j \neq i_0, j_0} [a_{j_0,i_0}^{(1)}]^2 - \sum_{i \neq i_0, j_0} [a_{i,j_0}^{(1)}]^2 = \\ &= a_{i_0,j_0}^2 + a_{j_0,i_0}^2 - ([a_{i_0,j_0}^{(1)}]^2 + [a_{j_0,i_0}^{(1)}]^2) = a_{i_0,j_0}^2 + a_{j_0,i_0}^2 \geq \frac{2s_0}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Buradan da

$$s_1 \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)} \right) s_0 = q s_0 \left(q = 1 - \frac{2}{n(n-1)} < 1 \right)$$

olduğunu alırıq. Fərz edək ki, bu qayda ilə $A^{(k-1)}$ matrisini də qurmuşuq, belə ki,

$$a_{i_{k-1},j_{k-1}}^{(k-1)} = 0, \quad \operatorname{tg} 2\varphi_{k-2} = \frac{2a_{i_{k-2},j_{k-2}}^{(k-2)}}{a_{i_{k-2},i_{k-2}}^{(k-2)} - a_{j_{k-2},j_{k-2}}^{(k-2)}}, \quad S_{k-1} \leq q S_{k-2}.$$

Burada s_{k-2} və s_{k-1} ilə uyğun olaraq, $A^{(k-2)}$ və $A^{(k-1)}$ matrislərinin diaqonaldan kənarda olan elementlərinin kvadratları cəmi işarə edilib.

Uyğun xassələrə malik olan $A^{(k)}$ matrisini qurmaq üçün, bu matrisin mütləq qiymətcə ən böyük elementini $-a_{i_{k-1},j_{k-1}}^{(k-1)}$ ($i_{k-1} < j_{k-1}$) tapırıq.

Bundan sonra aşağıdakı kimi ortoqonal matrisi qururuq (yazılmayan elementlər sıfırlardır):

$$U_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & \cos \varphi_{k-1} & -\sin \varphi_{k-1} \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & 1 \\ & \sin \varphi_{k-1} & & \cos \varphi_{k-1} & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{i_{k-1}j_{k-1}}^{(k)} = 0$$
$$\operatorname{tg} 2\varphi_{k-1} = \frac{2a_{i_{k-1}j_{k-1}}^{(k-1)}}{a_{i_{k-1}i_{k-1}}^{(k-1)} - a_{j_{k-1}j_{k-1}}^{(k-1)}}.$$
$$s_k \leq qs_{k-1},$$

Beləliklə, elə $\{A^{(n)}\}_{k=0,1,2,\dots}$ matrislər ardıcılığını qurmuş oluruq ki,

bərabərsizlikləri ödənilir. Bu bərabərsizliklərdən

olduğunu alırıq. İsbat edək ki,

burada D elə diaqonal matrisdir ki, onun elementləri həmin matrisin məxsusi ədədləridir.

110

Bu matrisin məxsusi ədədləri $a_{ii}^{(k)}$, məxsusi vektorları isə

$A^{(k)}$ matrisi üçün elə ortoqonal V matrisi tapmaq olar ki,

olsun. Burada D_k elə diaqonal matrisdir ki, onun diaqonal elementləri A matrisinin məxsusi ədədləridir. İşarələmələrə görə

Əgər $a_{ii}^{(k)} I - A^{(k)}$ məxsusi matrisdirsə, onda $a_{ii}^{(k)}$ ədədləri $A^{(k)}$

$$\begin{aligned} e_i &= (a_{ii}^{(k)} I - A^{(k)})^{-1} (D_k - A^{(k)}) e_i = (a_{ii}^{(k)} I - V D_k V)^{-1} (D_k - A^{(k)}) e_i = \\ &= [V (a_{ii}^{(k)} I - D_k) V']^{-1} (D_k - A^{(k)}) e_i = V [a_{ii}^{(k)} I - D_k]^{-1} V' (D_k - A^{(k)}) e_i. \end{aligned}$$
$$\|e_i\|_3 \leq \|V'\|_3 \left\| [a_{ii}^{(k)} I - D_k]^{-1} \right\|_3 \|V'\|_3 \|D_k - A^{(k)}\|_3 \|e_i\|_3.$$

olduğundan: $1 \leq \left\| [a_{ii}^{(k)} I - D_k]^{-1} \right\|_3 \|D_k - A_k\|_3.$

$$\left\| [a_{ii}^{(k)} I - D_k]^{-1} \right\|_3 = \max_j \frac{1}{|a_{ii}^{(k)} - \lambda_j|}.$$

111

$$\max_j \frac{1}{|a_{ii}^{(k)} - \lambda_j|} = \frac{1}{|a_{ii}^{(k)} - \lambda_s|}.$$

Onda

$$|a_{ii}^{(k)} - \lambda_s| \leq \|D_k - A^{(k)}\|_3 \leq \sqrt{s_k}.$$

Burada

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$$

olduğunu nəzərə alsaq:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = D$$

olduğunu alırıq.

4. Məxsusi ədədlərin qismən tapılması. Tutaq ki, A matrisi həqiqi və simmetrik matrisdir. Bu matrisin məxsusi ədədlərini aşağıdakı qaydada düzək:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Bu məxsusi ədədlərə uyğun ortonormal məxsusi vektorları $z_1, z_2, \dots, z_n$ ilə işarə edək.

Yuxarıda verdiyimiz üsullarda məxsusi ədədlər və vektorların hamısı birdən tapılırdı. İndi verəcəyimiz üsulda bu məsələ qismən həll olunur, yəni birincini (mütləq qiymətcə ən böyüyünü) tapdıqdan sonra digərini, özü də başqa üsulla, tapmaq olur.

İxtiyari $v^{(0)}$ vektoru götürüb onu $z_1, z_2, \dots, z_n$ vektorları üzrə ayıraq

$$v^{(0)} = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n.$$

Bu vektoru sıfırıncı yaxınlaşma qəbul edib digər yaxınlaşmaları aşağıdakı qayda ilə quraq:

$$v^{(k)} = A^k v^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k z_1 + \alpha_2 \lambda_2^k z_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k z_n.$$

Əvvəlcə fərz edək ki, λ_1 sadə məxsusi ədəddir. Onda

$$v^{(k)} = \lambda_1^k \left[\alpha_1 z_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k z_n \right]$$

düsturundan görsənir ki, kafi qədər böyük k üçün $v^{(k)}$ və z_1 vektorlarının istiqamətləri bir-birinə yaxın olacaqdır (çünki $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k$ kafi qədər kiçik olacaqlar). $z_1, z_2, \dots, z_n$ vektorları ortonormal sistem təşkil etdiklərindən z_1 məxsusi vektorunun təqribi

qiyməti

$$z_1^* = \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|_3}$$

düsturu ilə təyin olunur.

z_i və $v^{(k)}$ vektorlarının $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis vektorlarına nəzərən koordinatlarını uyğun olaraq $z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in}$ və $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}$ ilə işarə etsək

$$v_j^{(k)} = \alpha_1 z_{j1} \lambda_1^k + \alpha_2 z_{j2} \lambda_2^k + \dots + \alpha_n z_{jn} \lambda_n^k$$

olar. Onda

$$\frac{v_j^{(k+1)}}{v_j^{(k)}} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 z_{j1} + \alpha_2 z_{j2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{k+1} + \dots + \alpha_n z_{jn} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{k+1}}{\alpha_1 z_{j1} + \alpha_2 z_{j2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k + \dots + \alpha_n z_{jn} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k} = \lambda_1 + 0 \left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right).$$

Kafi qədər böyük k -lar üçün

$$\lambda_1^* = \frac{v_j^{(k+1)}}{v_j^{(k)}}.$$

Belə ki,

$$\lambda_1^* = \lambda_1 + 0 \left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right).$$

İndi fərz edək ki, λ_1 məxsusi ədədi r – qat təkrarlanandır, yəni

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r \text{ və}$$

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq |\lambda_{r+2}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Bu halda

$$\frac{v_j^{(k+1)}}{v_j^{(k)}} = \lambda_1 + 0 \left(\left| \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1} \right|^k \right).$$

İndi ikinci məxsusi ədədi tapmaq qaydasını verək:

$$v_j^{(k)} = \alpha_1 z_{j1} \lambda_1^k + \alpha_2 z_{j2} \lambda_2^k + \dots + \alpha_n z_{jn} \lambda_n^k$$

düsturunu

$$v_j^{(k)} = b_{j1} \lambda_1^k + b_{j2} \lambda_2^k + \dots + b_{jn} \lambda_n^k, \quad b_{ji} = \alpha_i z_{ji}$$

şəklində yazaq.

Tutaq ki,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Aşağıdakı determinanta baxaq:

$$\beta_{rs}^{(k)} = \begin{vmatrix} \nu_r^{(k)} & \nu_s^{(k)} \\ \nu_r^{(k+1)} & \nu_s^{(k+1)} \end{vmatrix}.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\beta_{rs}^{(k)} = \lambda_1^k \lambda_2^k \left[(b_{r2}b_{s1} - b_{r1}b_{s2})(\lambda_1 - \lambda_2) + 0 \left(\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right|^k \right) \right].$$

Buradan

$$\frac{\beta_{rs}^{(k+1)}}{\beta_{rs}^{(k)}} = \lambda_1 \lambda_2 + 0 \left(\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right| \right), \quad \lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1^*} \frac{\beta_{rs}^{(k+1)}}{\beta_{rs}^{(k)}}.$$

Əgər

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r+p} \\ |\lambda_1| > |\lambda_{r+1}| > |\lambda_{r+p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n| \end{aligned} \right\}$$

isə onda

$$\frac{\beta_{rs}^{(k+1)}}{\beta_{rs}^{(k)}} = \lambda_1 \lambda_{r+1} + 0 \left(\left| \frac{\lambda_{r+p+1}}{\lambda_{r+1}} \right|^k \right).$$

Bu qayda ilə digər məxsusi ədədləri də tapmaq olar.

IV FƏSİL

QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ ÜSULLARLA HƏLLİ

Bu fəsildə qeyri-xətti tənliklərin təqribi həllərini tapmaq üçün müxtəlif üsullar verilir.

§1. Sıxılmış inikas prinsipi

Qeyri-xətti tənliklərin təqribi həllərini tapmaq üçün qurulmuş yaxınlaşmaların yığıldığını isbat etdikdə, funksional analiz kursundan məlum sıxılmış inikas prinsipindən tez-tez istifadə edilir. Ona görə də bu paragrafda sıxılmış inikas prinsipi və onun bəzi nəticələri verilir.

Tutaq ki, R – tam metrik fəza, $A(x)$ isə bu fəzada təyin olunmuş operatorudur. R fəzasına daxil olan, mərkəzi x^* və radiusu r olan kürəni $S(x^*, r)$ ilə işarə edək:

$$S(x^*, r) = \{x \in R; \rho(x, x^*) \leq r\},$$

burada $\rho(x^*, x)$ ilə x^* və x nöqtələri arasındakı məsafə işarə edilmişdir.

Əgər ixtiyari $x \in R$ ($x \in S(x^*, r)$) üçün $A(x) \in R$ ($A(x) \in S(x^*, r)$) olarsa, onda deyirlər ki, $A(x)$ operatoru R fəzasında $(S(x^*, r))$ kürəsində təsir edir.

Əgər ixtiyari $x, y \in R$ ($x, y \in S(x^*, r)$) üçün

$$\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y), \quad \alpha < 1$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, $A(x)$ operatoru R fəzasında $(S(x^*, r))$ kürəsində) sıxan operatorudur.

Teorem 4.1 (sıxılmış inikas prinsipi).

Tutaq ki, $A(x)$ operatoru R fəzasında $(S(x^*, r))$ kürəsində təsir edir və sıxan operatorudur. Onda

$$x = A(x) \quad (4.1)$$

operator tənliyinin R fəzasında $(S(x^*, r))$ -də yeganə həlli var, bu həll

$$x^{(k)} = A(x^{(k-1)}) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4.2)$$

burada $x^{(0)} \in R$ ($x^{(0)} \in S(x^*, r)$ ixtiyari elementidir), ardıcıl yaxınlaşmalarının limitidir və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur

$$\rho(x^{(k)}, \bar{x}) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}),$$

burada $\bar{x}$ (4.1) tənliyinin həllidir.

İsbatı. Əvvəlcə isbat edək ki, $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı fundamental ardıcılıq təşkil edir.

Tutaq ki, $m > k$. Onda

$$\rho(x^{(m)}, x^{(k)}) = \rho(A(x^{(m-1)}), A(x^{(k-1)})) \leq \alpha \rho(x^{(m-1)}, x^{(k-1)}),$$

$$\rho(x^{(m-1)}, x^{(k-1)}) \leq \alpha \rho(x^{(m-2)}, x^{(k-2)}),$$

.....

.....

$$\rho(x^{(m-k+1)}, x^{(1)}) \leq \alpha \rho(x^{(m-k)}, x^{(0)}),$$

buradan

$$\rho(x^{(m)}, x^{(k)}) \leq \alpha^k \rho(x^{(m-k)}, x^{(0)}).$$

Digər tərəfdən

$$\begin{aligned} \rho(x^{(m-k)}, x^{(0)}) &\leq \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) + \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) + \dots + \\ &+ \rho(x^{(m-k-1)}, x^{(m-k)}) \leq \rho(x^{(0)}, x^{(1)})(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \\ &+ \alpha^{m-k-1}) \leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\rho(x^{(m)}, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \quad (4.3)$$

Bu bərabərsizlikdən $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığının fundamental olduğunu almış oluruq. R fəzası tam olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{\bar{x}}$$

alırıq.

$$\rho(A(x^{(k)}), A(\bar{\bar{x}})) \leq \alpha \rho(x^{(k)}, \bar{\bar{x}})$$

bərabərsizliyindən

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A(x^{(k)}), A(\bar{\bar{x}})) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A(x^{(k)}) = A(\bar{\bar{x}}).$$

Nəhayət, (4.2)-dən

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}$$

olar. Deməli, $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı (4.1) tənliyinin həllinə yığılır.

(4.3) bərabərsizliyində $k \rightarrow \infty$ götürsək $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığının həllə yığılma sürətini təyin edən bərabərsizliyi alırıq.

İsbat edək ki, (4.1) tənliyinin həlli yeganədir. Tutaq ki, bu tənliyin iki həlli var:

$$x = A(x), \quad y = A(y).$$

Onda

$$\rho(x, y) = \rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Burada $\alpha < 1$ olduğundan, bu bərabərsizlik yalnız $x = y$ olduqda ödənər, yəni (4.1) tənliyinin həlli yeganədir.

Nəhayət, qeyd edək ki, əgər fəza əvəzinə kürəni götürsək teoremin isbatı eyni qayda ilə aparılır. Bu halda S kürəsinə eyni metrika ilə tam fəza kimi baxılır. (4.1) tənliyinin həllinin S kürəsinə daxil olduğu

$$\rho(x^{(k)}, x^*) \leq r$$

bərabərsizliyindən alınır. Doğrudan da,

$$\rho(\bar{x}, x^*) = \rho(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}, x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, x^*) \leq r.$$

Teorem tamamilə isbat olundu.

Sıxılmış inikas prinsipinin başqa şəklinə baxaq.

Teorem 4.2. Tutaq ki, $A(x)$ operatoru $S(x^*, r)$ kürəsində təyin olunub və sıxan operatorudur. Əlavə fərz edək ki,

$$\rho(A(x^*), x^*) \leq (1-\alpha)r.$$

Onda (4.1) operator tənliyinin $S(x^*, r)$ -də yeganə həlli var və bu həll (4.1) ardıcıl yaxınlaşmalarının limitidir və yığılma sürəti teorem 4.1-də olduğu kimi qalır.

Teoremi isbat etmək üçün $A(x)$ operatorunun $S(x^*, r)$ -də təsir etdiyini göstərmək kifayətdir (teorem 4.1-ə əsasən).

Tutaq ki, $\rho(x, x^*) \leq r$. Onda

$$\begin{aligned} \rho(A(x), x^*) &\leq \rho(A(x), A(x^*)) + \rho(A(x^*), x^*) \leq \\ &\leq \alpha \rho(x, x^*) + (1-\alpha)r \leq \alpha r + (1-\alpha)r = r. \end{aligned}$$

§ 2. Ardıcıl yaxınlaşma üsulları

1. Adi iterasiya üsulu. Aşağıdakı kimi qeyri-xətti tənliyə baxaq:

$$x = \varphi(x). \quad (4.4)$$

Bu tənliyin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl yaxınlaşmalar quraq

$$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) \quad (k=1,2,\dots) \quad (4.5)$$

burada $x^{(0)}$ ixtiyari ədəddir.

Teorem 4.3. Tutaq ki, x^* ədədi (4.4) tənliyinin köküdür və $\varphi(x)$ funksiyası

$$S(x^*, r) = \{x; |x - x^*| \leq r\}$$

parçasında Lipşits şərtini:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \alpha |x - y| \quad (x, y \in S(x^*, r))$$

ödəyir, belə ki $\alpha < 1$.

Onda ixtiyari $x^{(0)} \in S(x^*, r)$ üçün (4.5) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı x^* həllinə yığılır və yığılma sürəti

$$|x^{(k)} - x^*| \leq \alpha^k |x^{(0)} - x^*| \quad (4.6)$$

düsturu ilə təyin olunur.

İsbati. R fəzası əvəzinə (teorem 4.1-də) bir ölçülü Evklid fəzasını götürək və məsafəni

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

düsturu ilə təyin edək.

İsbat edək ki,

$$A(x) \equiv \varphi(x)$$

operatoru $S(x^*, r)$ parçasında sıxılmış inikas prinsipinin şərtlərini ödəyir.

Tutaq ki, $x \in S(x^*, r)$. Onda

$$\rho(A(x^*), x) = |\varphi(x) - x| \equiv |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq \alpha |x - x^*| \leq r,$$

yəni $A(x) \in S(x^*, r)$ olar. Deməli, $A(x)$ operatoru $S(x^*, r)$ -də təsir edir.

İndi isə tutaq ki, $x, y \in S(x^*, r)$. Onda

$$\rho(A(x), A(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \alpha |x - y| = \alpha \rho(x, y),$$

yəni $A(x)$ operatoru $S(x^*, r)$ -də sıxan operatorudur.

Sıxılmış inikas prinsipinin şərtləri ödəndiyindən (4.4) tənliyinin həlli x^* yeganədir və (4.5) yaxınlaşmaları bu həllə yığılır. Aşkardır ki, yığılma sürəti

$$|x^{(k)} - x^*| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} |x^{(0)} - x^{(1)}| \quad (4.7)$$

düsturu ilə təyin olunur. İsbat edək ki, yığılma sürəti (4.6) düsturu ilə də təyin olunur. Doğrudan da

$$|x^{(k)} - x^*| = |\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*)| \leq \alpha |x^{(k-1)} - x^*|,$$

$$|x^{(k)} - x^*| \leq \alpha |x^{(k-1)} - x^*| \leq \alpha^3 |x^{(k-2)} - x^*| \leq \dots \leq \alpha^k |x^{(0)} - x^*|.$$

Teorem isbat olundu.

Biz yuxarıdakı teoremdə (4.4) tənliyinin həllinin varlığını qəbul edib, adi iterasiyaların ona yığıldığını isbat etdik.

Aşağıdakı teoremdə, sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edərək həllin varlığı da isbat edilir.

Teorem 4.4. Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası $S(x^*, r)$ parçasında Lipşits şərtini ödəyir və Lipşits sabiti $-\alpha$ vahiddən kiçikdir ($\alpha < 1$). Əlavə olaraq fərz edək ki, x aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir

$$|x^* - \varphi(x^*)| \leq (1 - \alpha)r.$$

Onda $S(x^*, r)$ parçasında (4.4) tənliyinin yeganə həlli var, bu həll (4.5) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığının limitidir. Yığılma sürəti (4.7) düsturu ilə təyin olunur.

İsbati. Teoremi isbat etmək üçün sıxılmış inikas prinsipində R fəzası əvəzinə bir ölçülü Evklid fəzasını, kürə əvəzinə $S(x^*, r)$ parçasını, $A(x)$ operatoru əvəzinə $\varphi(x)$ funksiyasını götürüb, bu prinsipin şərtlərini yoxlamaq kifayətdir.

Tutaq ki, $x \in S(x^*, r)$. Onda

$$\begin{aligned} \rho(A(x), x^*) &= |\varphi(x) - x^*| \leq |\varphi(x) - \varphi(x^*)| + |\varphi(x^*) - x^*| \leq \\ &\leq \alpha |x - x^*| + (1 - \alpha)r \leq \alpha r + (1 - \alpha)r = r, \end{aligned}$$

yəni $A(x) \equiv \varphi(x)$ operatoru $S(x^*, r)$ -də təsir edir.

İndi tutaq ki, $x, y \in S(x^*, r)$. Onda

$$\rho(A(x), A(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \alpha|x - y| = \alpha\rho(x, y),$$

yəni $A(x) \equiv \varphi(x)$ operatoru $S(x^*, r)$ -də sıxan operatorudur. Teorem isbat oldu.

2. Adi iterasiya üsulunun başqa formaları. Təcrübədə bəzən elə olur ki, (4.4) tənliyinin dəqiq həllini tapmaq olmur, lakin φ funksiyasını

$$\varphi(x) = \Phi(x, x)$$

şəklində yazdıqda ixtiyari qeyd edilmiş y üçün

$$x = \Phi(x, y)$$

tənliyinin dəqiq həllini tapmaq olur. Bu halda (4.4) tənliyi üçün (4.5) yaxınlaşmaları əvəzinə

$$\tilde{x}^{(k)} = \Phi(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(k-1)}) \quad (k=1, 2, \dots)$$

yaxınlaşmalarını qurmaq əlverişli olur.

Tutaq ki, $\Phi(x, y)$ funksiyası öz təyin oblastında hər iki dəyişənə görə Lipşits şərtini ödəyir:

$$|\Phi(x, y) - \Phi(\bar{x}, \bar{y})| \leq \alpha_1|x - \bar{x}| + \alpha_2|y - \bar{y}|$$

və $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Aşkardır ki,

$$|\tilde{x}^{(k)} - \bar{x}| = |\Phi(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(k-1)}) - \Phi(\bar{x}, \bar{x})| \leq \alpha_1|\tilde{x}^{(k)} - \bar{x}| + \alpha_2|\tilde{x}^{(k-1)} - \bar{x}|,$$

$$|\tilde{x}^{(k)} - \bar{x}| \leq \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} |\tilde{x}^{(k-1)} - \bar{x}|.$$

Burada $\bar{x}$ (4.4) tənliyinin həllidir.

(4.4) tənliyi üçün adi iterasiya üsulunu yazaq:

$$x^{(k)} = \Phi(x^{(k-1)}, x^{(k-1)}).$$

Onda

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq (\alpha_1 + \alpha_2)|x^{(k-1)} - \bar{x}|$$

olduğunu alırıq.

$$\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} < \alpha_1 + \alpha_2$$

olduğundan $\{\tilde{x}^{(k)}\}$ ardıcılığı (4.4) tənliyinin həllinə adi iterasiyaya nisbətən daha tez yığılır.

Adi iterasiya üsulunun daha bir başqa formasını verək. (4.4) tənliyi üçün iki $\{x^{(k)}\}$ və $\{y^{(k)}\}$ ardıcılığını quraq:

$$\left. \begin{aligned} x^{(0)} &= y^{(0)}, x^{(1)} = y^{(1)} = \varphi(x^{(0)}), \\ y^{(k+1)} &\equiv \varphi(x^{(k+1)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k+1)} - \frac{(y^{(k+1)} - y^{(k)})(y^{(k+1)} - x^{(k)})}{(y^{(k+1)} - y^{(k)}) - (x^{(k)} - x^{(k-1)})}, \\ (k &= 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\}$$

İsbat etmək olar ki, bu qayda ilə qurulmuş, $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı (4.4) tənliyinin həllinə adi iterasiya üsuluna nisbətən daha tez yığılır. Bundan başqa isbat etmək olar ki, $\varphi(x)$ funksiyasının Lipşits sabiti vahiddən böyük olduqda da bu ardıcılıq yığılır.

3. Yüksək tərtibli iterasiya üsulları. İndi isə iterasiyanın tərtibi anlayışını verək və yüksək tərtibli iterasiyaların yığılma sürətini təyin edək.

(4.4) tənliyinin həllini $\bar{x}$ ilə işarə edək. Əgər

$$\varphi'(\bar{x}) = \varphi''(\bar{x}) = \dots = \varphi^{(m-1)}(\bar{x}) = 0, \varphi^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$$

şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, (4.5) yaxınlaşmalarının tərtibi m ədədinə bərabərdir.

Fərz edək ki, (4.5) yaxınlaşmalarının tərtibi m -dir və bu yaxınlaşmaların yığılma sürətini təyin edək.

$\varphi(x)$ funksiyası üçün ($\bar{x}$ nöqtəsi ətrafında) Teylor düsturunu yazaq:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \bar{x} &= (x - \bar{x})\varphi'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!}\varphi''(\bar{x}) + \dots + \\ &+ \frac{(x - \bar{x})^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi). \end{aligned}$$

Buradan

$$\varphi(x) - \bar{x} = \frac{(x - \bar{x})^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi)$$

və yaxud $x = x^{(k-1)}$ qəbul etsək:

$$x^{(k)} - \bar{x} \equiv \frac{(x^{(k-1)} - \bar{x})^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi)$$

olduğunu alırıq.

$$M_m = \max_x |\varphi^{(m)}(x)|$$

ilə işarə edək. Burada maksimum $\bar{x}$ -nin yaxın ətrafındakı nöqtələr üçün götürülür. Onda

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \frac{M_m}{m!} |x^{(k-1)} - \bar{x}|^m,$$

yaxud

$$\begin{aligned} |x^{(k)} - \bar{x}| &\leq \left(\frac{M_m}{m!}\right)^{1+m+m^2+\dots+m^{k-1}} |x^{(0)} - \bar{x}|^{m^k} = \\ &= \left(\frac{M_m}{m!}\right)^{\frac{m^k-1}{m-1}} |x^{(0)} - \bar{x}|^{m^k} = \\ &= \left(\frac{M_m}{m!} |x^{(0)} - \bar{x}|\right)^{\frac{m^k-1}{m-1}} |x^{(0)} - \bar{x}|^{\frac{m^{k+1}-2m^k+1}{m-1}}. \end{aligned}$$

Əgər

$$|x^{(0)} - \bar{x}| < 1, \frac{M_m}{m!} |x^{(0)} - \bar{x}| = \alpha < 1$$

olarsa,

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \alpha^{\frac{m^k-1}{m-1}}$$

olduğunu alırıq. Bu da $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığının həllə yığılma sürətini təyin edir.

4. Yüksək tərtibli iterasiya qurmaq üçün Eytken üsulu. Yuxarıda gördük ki, $x = \varphi(x)$ tənliyi üçün $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ($n=1,2,\dots$) iterasiyaları, x_0 (sıfırıncı yaxınlaşma) dəqiq həllə- x^* yaxın olduqda və $|\varphi'(x^*)| < 1$ şərti ödəndikdə, aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \varepsilon_n = x_n - x^* \approx [\varphi'(x^*)]_{\varepsilon_0}^n.$$

Deməli,

$$x_n \approx x^* + \varepsilon_0 q^n, q = \varphi'(x^*),$$

x_n -nin yığılma sürətini gücləndirən çevirməni tapmaq üçün

$$S_n = S + Aq^n (|q| < 1; n = 0, 1, \dots)$$

üstlü funksiya baxaq. Aşkardır ki,

$$\frac{S_n - S}{S_{n-1} - S} = q, \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = q.$$

Onda

$$(S_{n+1} - S)(S_{n-1} - S) = (S_n - S)^2.$$

$$S = \frac{S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2}{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}.$$

Aldığımız bu çevirmə S_n ardıcılığını σ_n ardıcılığına çevirir:

$$\sigma_n = \frac{S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2}{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}.$$

Bu çevirməyə Eytken çevirməsi deyirlər. $S_n = S + Aq^n$ ardıcılığına bu çevirməni tətbiq etsək, ixtiyari n üçün $\sigma_n = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ olar. Əgər S_n ardıcılığı üstlü funksiya yaxın qaydada yığılsa, onda Eytken çevirməsini tətbiq etdikdə alınan yeni ardıcılıq $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ -ə, S_n

ardıcılığından sürətlə yığılar.

Buna görə də adi iterasiya üsulu ilə tapılan x_n -ə Eytken çevirməsini tətbiq etsək, yeni alınan ardıcılığın yığılma sürəti artar. Aşağıdakı qayda ilə x'_n və x''_n yaxınlaşmalarını quraq:

$$x'_n = \varphi(x_n), x''_n = \varphi(x'_n) = \varphi[\varphi(x_n)].$$

x_n, x'_n, x''_n üçün Eytken çevirməsini yazaq:

$$x_{n+1} = \frac{x_n x'_n - [x'_n]^2}{x''_n - 2x'_n + x_n} = \frac{x_n \varphi[\varphi(x_n)] \varphi^2(x_n)}{\varphi[\varphi(x_n)] - 2\varphi(x_n) + x_n}$$

olduğunu alırıq. Bu yaxınlaşmalara Stefenson yaxınlaşmaları deyilir. Aşkardır ki,

$$\Phi(x) \equiv \frac{x\varphi[\varphi(x)] - \varphi^2(x)}{\varphi[\varphi(x)] - 2\varphi(x) + x}$$

işarələməsini aparsaq, Stefenson yaxınlaşmalarını

$$x = \Phi(x)$$

tənliyi üçün adi yaxınlaşmalar şəklində:

$$x_n = \Phi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

yazmaq olar.

İsbat etmək olur ki, [2], əgər $x_n = \varphi(x_{n-1})$ yaxınlaşmaları r tərtiblidirə, onda Stefenson yaxınlaşmalarının tərtibi r -dən böyükdür.

5. Vətlər üsulu (xətti interpolasiya üsulu). Aşağıdakı şəkildə tənliyə baxaq:

$$f(x) = 0. \quad (4.8)$$

Tutaq ki, $f(x)$ həqiqi dəyişənli həqiqi funksiyadır, $\bar{x}$ isə (4.8) tənliyinin həqiqi köküdür.

Tutaq ki, $f(x), f'(x), f''(x)$ funksiyaları $\bar{x}$ nöqtəsinin ətrafında kəsilməzdir və $f'(x), f''(x)$ funksiyaları bu ətrafda öz işarələrini saxlayırlar. Bu o deməkdir ki, $f(x)$ funksiyası $\bar{x}$ ətrafında işarəsini dəyişir və bu nöqtə $f(x)$ -in sadə köküdür.

Fərz edək ki, $x^{(0)}$ elə nöqtədir ki,

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$$

şərti ödənilir.

(4.8) tənliyinə ekvivalent olan

$$x = \varphi(x) = x - \frac{x - x^{(0)}}{f(x) - f(x^{(0)})} f(x) = \frac{x^{(0)}f(x) - xf(x^{(0)})}{f(x) - f(x^{(0)})} \quad (4.9)$$

tənliyinə baxaq. Aşkardır ki, $\bar{x}$ bu tənliyin də kökü olar. (4.9) tənliyi üçün adi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq.

Birinci yaxınlaşma olaraq $\bar{x}$ nöqtəsinin yaxın ətrafından elə $x^{(1)}$ nöqtəsi götürək ki,

$$f(x^{(1)})f(x^{(0)}) < 0$$

şərti ödənsin.

Digər yaxınlaşmalar aşağıdakı kimi qurulur:

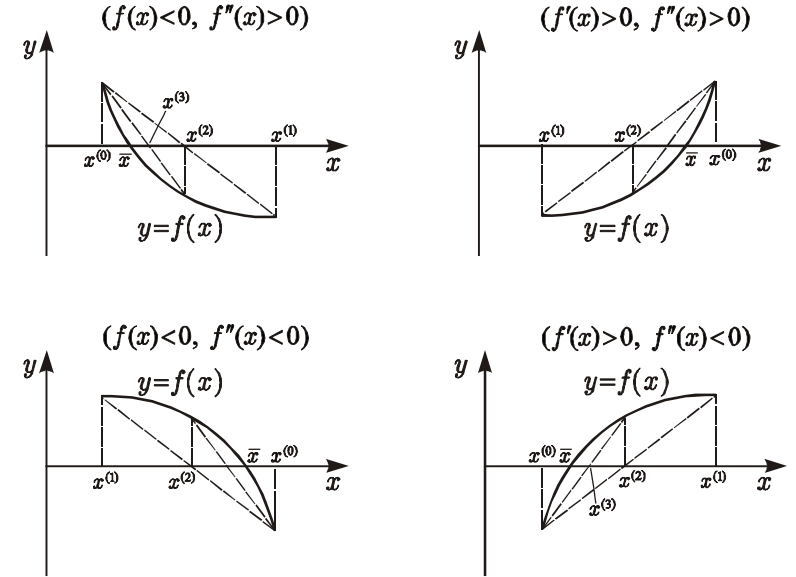
$$x^{(k)} = \frac{x^{(0)}f(x^{(k-1)}) - x^{(k-1)}f(x^{(0)})}{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(0)})} \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (4.10)$$

Əgər $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ və $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapsaq, bu tapılan nöqtənin absisi (4.10) düsturu ilə təyin olunan $x^{(k)}$ olar (şəkil 1). $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ və $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ nöqtələrindən keçən düz xətt $y = f(x)$ əyrisinin vətəri olduğundan, bu üsula vətərlər üsulu deyirlər. Digər tərəfdən $x^{(k)}, f(x)$ funksiyasının $x^{(0)}, x^{(k-1)}$ nöqtələrindəki qiymətlərə görə qurulmuş xətti interpolasiya çoxhədlisinin kökü kimi tapıldığından, bu üsula xətti interpolasiya üsulu da deyirlər.

İsbat edək ki, (4.10) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı yığılandır.

Aşkardır ki,

$$\begin{aligned} \varphi'(\bar{x}) &= \frac{[x^{(0)}f'(x) - f(x^{(0)})][f(\bar{x}) - f(x^{(0)})] - f'(\bar{x})[x^{(0)}f(\bar{x}) - \bar{x}f(x^{(0)})]}{[f(\bar{x}) - f(x^{(0)})]^2} = \\ &= \frac{f(x^{(0)}) + (\bar{x} - x^{(0)})f'(\bar{x})}{f(x^{(0)})}. \end{aligned}$$



Şəkil 1.

Taylor düsturuna əsasən

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!}f''(\xi)$$

olduğundan

$$f(x^{(0)}) = f(\bar{x}) + (x^{(0)} - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x^{(0)} - \bar{x})^2}{2}f''(\xi^{(0)}),$$

$$f(x^{(0)}) + (\bar{x} - x^{(0)})f'(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x^{(0)})^2}{2}f''(\xi^{(0)}).$$

Onda

$$\varphi'(x) = \frac{f''(\xi^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \frac{(\bar{x} - x^{(0)})^2}{2}.$$

$x^{(0)}$ kafi qədər $\bar{x}$ -ə yaxın olduqda, $x = \bar{x}$ nöqtəsinin ətrafında

$$|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \alpha|x - y|$$

olar. $x^{(1)}$ nöqtəsini də bu ətrafda götürsək, teorem 4.3-ə əsasən (4.10) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı (4.8) tənliyinin həllinə yığılacaq.

Nəhayət, qeyd edək ki,

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \frac{|f(x^{(k)})|}{m}, \quad m = \min_{x^{(0)} \leq x \leq x^{(1)}} |f'(x)| \quad (4.11)$$

düsturu vasitəsilə hər addımda buraxılan xətanın qiymətini tapmaq olar.

(4.11) düsturunun doğruluğu

$$f(x^{(k)}) = f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(x^{(k)} - \bar{x})$$

bərabərliyindən çıxır. Nəhayət, qeyd edək ki, vətərlər üsulu bir tərtibli iterasiya üsuludur.

6. Toxunanlar üsulu (Nyuton üsulu). Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında (4.8) tənliyinin yalnız bir həlli var və bu parçada $f'(x), f''(x)$ kəsilməzdir və sıfır çevrilmirlər.

Fərz edək ki, $x^{(0)}$ elə nöqtədir ki,

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$$

şərti ödənilir.

(4.8) tənliyinə ekvivalent olan

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4.12)$$

tənliyinə baxaq. Aşkardır ki, $\bar{x}$ bu tənliyin də kökü olar.

(4.12) tənliyi üçün adi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.13)$$

Əgər $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasına çəkilmiş toxunanın absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapsaq, bu tapılan nöqtənin absisi (4.13) düsturu ilə təyin olunan $x^{(k)}$ olar (şəkil 2). Ona görə də bu üsula toxunanlar üsulu deyirlər. Bu üsulu ilk dəfə Nyuton verdiyindən, ona Nyuton üsulu da deyirlər.

İsbat edək ki, (4.13) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı yığılındır.

Aşkardır ki,

$$\varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Ona görə də $\bar{x}$ -in yaxın ətrafında

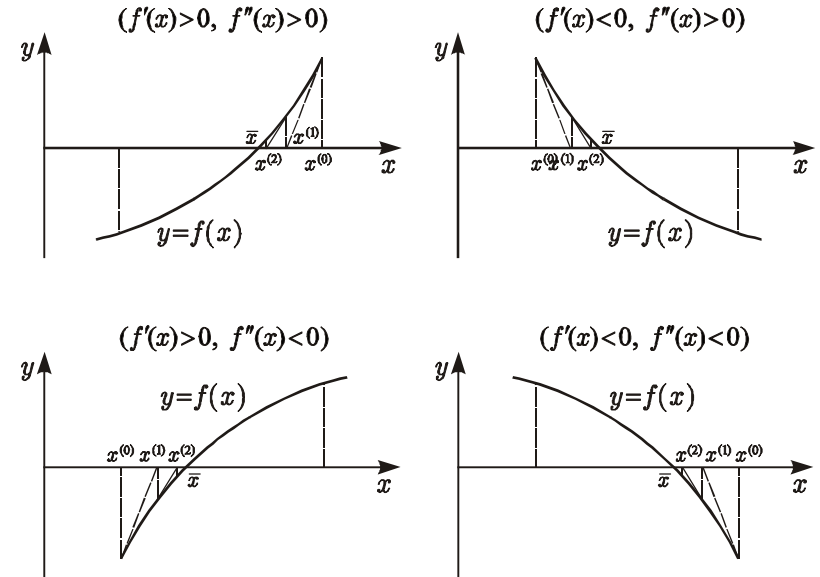
$$|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1.$$

Əgər $x^{(k)}$ nöqtəsinin bu ətrafdan götürsək, onda (4.13) düsturu ilə təyin olunan $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığı (4.8) tənliyinin həllinə yığılar (teorem 4.3-ə əsasən).

İndi isə $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığının həllə yığılma sürətini tapaq.

Teylor düsturuna əsasən:

$$f(x) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})(x - x^{(k-1)}) + \frac{1}{2}f''(\xi^{(k)})(x - x^{(k-1)})^2.$$



Şəkil 2.

Buradan

$$0 = f(\bar{x}) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})(\bar{x} - x^{(k-1)}) + \frac{1}{2}f''(\xi^{(k)})(\bar{x} - x^{(k-1)})^2,$$

$$\frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} = x^{(k-1)} - \bar{x} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi^{(k)})}{f'(x^{(k-1)})} (\bar{x} - x^{(k-1)})^2.$$

Bu düsturu (4.13)-də nəzərə alsaq:

$$x^{(k)} - \bar{x} = x^{(k-1)} - \bar{x} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} (\bar{x} - x^{(k-1)})^2 \text{ ol}$$

duğunu alırıq. Buradan

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^{(k-1)} - \bar{x}|^2,$$

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

və yaxud

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^k - 1} |x^{(0)} - \bar{x}|^{2^k} = \left(\frac{M_2 |x^{(0)} - \bar{x}|}{2m_1} \right)^{2^k} \frac{2m_1}{M_2}.$$

Əgər

$$\frac{M_2}{m_1} |x^{(0)} - \bar{x}| = \alpha < 1$$

olarsa,

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \alpha^{2^k} \frac{2m_1}{M_2}$$

alırıq. Bu da $\{x^{(k)}\}$ ardıcılığının həllə yığılma sürətini təyin edir.

Nəhayət qeyd edək ki, toxunanlar üsulu iki tərtibli iterasiya üsuludur.

Nyuton üsulu ilə yaxınlaşmaları hesablamaq üçün hər dəfə $f(x)$ funksiyasının törəməsini hesablamaq lazımdır. Hesablamanı azaltmaq üçün yaxınlaşmaları bəzən aşağıdakı düsturlarla (Nyuton şəklini dəyişmiş üsulu)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(0)})} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

hesablayırlar. Bu üsulun xətasını $\varepsilon_k = x^{(k)} - \bar{x}$ hesablamaq üçün

$$f(x^{(k)}) = f(\bar{x} + \varepsilon_k) = \varepsilon_k f'(\bar{x}) + \frac{1}{2} \varepsilon_k^2 f''(\bar{x}) + \dots$$

düsturundan istifadə etsək:

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \left[1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x^{(0)})} \right] - \frac{1}{f'(x^{(0)})} \left[\frac{f''(\bar{x})}{2} \varepsilon_k^2 + \dots \right]$$

olduğunu alırıq.

$x^{(k)}, x^{(k+1)}$ yaxınlaşmalarının $\bar{x}$ -yə yaxın olduğunu qəbul etsək, xəta üçün aşağıdakı düsturu almış olarıq:

$$\varepsilon_{k+1} \approx \left[1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x^{(0)})} \right] \varepsilon_k = q \varepsilon_k.$$

Aşkardır ki, bu üsulun yığılma sürəti Nyuton üsuluna nəzərən zəifdir.

7. Hesablama xətasının iterasiyanın yığılmasına təsiri. Məlumdur ki, verilmiş tənliyi həll etmək üçün təqribi üsullardan hər hansı birini tətbiq etdikdə üsulun xətasından başqa, hesablama xətasını da nəzərə almaq lazımdır, yəni yalnız üsulun xətasını deyil, tam xətanı (üsulun xətası və hesablama xətası) qiymətləndirmək lazımdır.

İndi adi iterasiya üçün tam xətanı hesablayaq. Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası $S(x^{(0)}, r)$ parçasında Lipşits şərtini ödəyir və Lipşits əmsalı $\alpha < 1$ -dir. Əlavə olaraq fərz edək ki,

$$|x^{(0)} - \varphi(x^{(0)})| \leq (1 - \alpha)r - \rho$$

$$0 \leq \rho_0 < (1 - \alpha)r.$$

İrəlidə isbat etdik ki, (teorem 4.4) (4.8) tənliyinin

$S(x^{(0)}, r)$ -də yeganə həlli var və (4.9) yaxınlaşmaları bu həllə yığılır:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}.$$

İndi isə aşağıdakı yaxınlaşmalara baxaq:

$$\tilde{x}^{(k)} = \varphi(\tilde{x}^{(k-1)}) + \rho, \quad \tilde{x}^{(0)} = x^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

burada ρ_k ədədi $\varphi(\tilde{x}^{(k-1)})$ hesabladıqda buraxılan xətadır.

Fərz edək ki,

$$|\rho_k| \leq \rho_0 q^{k-1} \quad (0 < q < 1).$$

İsbat edək ki, ixtiyari k üçün $\tilde{x}^{(k)} \in S$ və

$$|\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}| \leq \rho_0 (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} q + \dots + \alpha q^{k-2} + q^{k-1}) \quad (4.14)$$

doğrudur. Aşkardır ki,

Deməli, əgər (4.15) tənliyinin kökləri (4.16) şərtini ödəyirsə, onda bu tənliyin kökləri (4.18) düsturları ilə təyin olunur.

Lobaçevski üsulunu tətbiq etmək üçün (4.15) tənliyini

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0$$

şəklində yazmaq. Onda

$$a_0(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)=0$$

tənliyinin kökləri (4.15) tənliyinin köklərinin əks işarəsinə bərabərdir.

Bu axırıncı iki tənlikdən

$$a_0^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\cdots(x^2-x_n^2)=0$$

olduğunu alarıq. Burada $z = -x^2$ götürsək, yeni aldığımız tənliyin kökləri

$$-x_1^2, -x_2^2, \dots, -x_n^2$$

olar. Bu tənliyi yazmaq üçün (4.15)-i

$$a_0x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x + (-1)^na_n = 0$$

tənliyinə vuraq:

$$a_0^2 x^{2n} - (a_1^2 - 2a_0 a_2) x^{2n-2} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4) x^{2n-4} + \cdots + (-1)^n a_n^2 = 0.$$

Burada $z = -x^2$ əvəzləməsini aparsaq:

$$a_0^2 z^n + (a_1^2 - a_0 a_2) z^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4) z^{n-2} + \cdots + a_n^2 = 0.$$

olduğunu alarık.

İndi isə fərz edək ki, (4.15) tənliyinin kompleks kökləri də var:

$$x_2 = \rho(\cos \varphi + l \sin \varphi), x_3 = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Fərz edək ki, qalan köklər

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > |x_4| > \cdots > |x_n|$$

şərtini ödəyir.

Lobaçevskinin yuxarıda şərh etdiyimiz üsulunu (4.15) tənliyinə m dəfə tətbiq edib, alınan tənliyin kökləri üçün (4.17) asılılıqlarını yazaq:

$$\left. \begin{aligned} x_1^k + x_2^k + x_3^k + \cdots + x_n^k &= \frac{c_1}{c_0}, \\ x_1^k x_2^k + x_1^k x_3^k + \cdots + x_{n-1}^k x_n^k &= \frac{c_2}{c_0}, \\ x_1^k x_2^k x_3^k + x_1^k x_2^k x_4^k + \cdots + x_{n-2}^k x_{n-1}^k x_n^k &= \frac{c_3}{c_0}, \\ &\vdots \\ x_1^k x_2^k \cdots x_n^k &= \frac{c_n}{c_0}, \end{aligned} \right\}$$

burada $k = 2^m$.

Fərz edək ki,

$$x_1^k \gg \rho^k \gg x_4^k \gg \dots \gg x_n^k.$$

Onda

$$\begin{aligned} x_1^k &\approx \frac{c_1}{c_0}, \\ 2x_1^k \rho^k \left(\cos k\varphi + \frac{x_1^k x_4^k}{2x_1^k \rho^k} + \dots \right) &= \frac{c_2}{c_0}, \\ x_1^k \rho^{2k} &\approx \frac{c_3}{c_0}, \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ x_1^k \rho^{2k} x_4^k \dots x_n^k &= \frac{c_n}{c_0}. \end{aligned}$$

Bu sistemi həll edib bütün həqiqi kökləri və kompleks köklərin modulunu tapmaq olar. Kompleks köklərin argumenti

$$x_1 + 2\rho \cos \varphi + x_4 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

tənliyindən tapılır.

Nəhayət, əgər (4.15) tənliyinin köklərindən bəziləri bir-birinə çox yaxın olduqda, məsələn, $x_2 \approx x_3$ olarsa, onda

$$(x_1 x_2 x_3)^k + \dots = \frac{c_3}{c_0}$$

tənliyindən x_2x_3 hasilini tapırıq. x_2 və x_3 məchullarını tapmaq üçün ikinci tənlik $x_1 + x_3 = p$ götürülür. Burada p ədədi $x^2 - px + x_2x_3$ üçhədlisinin $f(x)$ -in böləni olması şərtindən tapılır.

8. İnterpolyasiya üsulu. Fərz edək ki, $L_n(x)$ çoxhədlisi $x_0, x_1, \dots, x_n$ düyün nöqtələri və $f(x)$ funksiyası üçün interpolyasiya çoxhədlisidir:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

(4.8) tənliyinin həllini x^* ilə işarə edək:

$$f(x^*) = 0.$$

Bu həlli tapmaq üçün

$$L_n(x) = 0$$

cəbri tənliyinə baxaq və bunun həllini $\bar{x}$ ilə işarə edək. $L_n(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ funksiyasına yaxın olduğu üçün $\bar{x}$ -ni (4.8) tənliyinin təqribi həlli kimi qəbul etmək olar. Bu halda buraxılan xəta aşağıdakı qayda ilə qiymətləndirilir.

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(x^*)$$

bərabərliyindən

$$(\bar{x} - x^*) f'(\eta) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n),$$

$$|\bar{x} - x^*| = \frac{M_{n+1}}{m_1(n+1)!} |(\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n)|,$$

burada

$$M_{n+1} = \max_x |f^{(n+1)}(x)|, \quad m_1 = \min_x |f(x)| \neq 0.$$

Burada biz fərz etdik ki,

$$L_n(x) = 0$$

tənliyinin dəqiq həllini tapmaq olar. Təcrübədə bu həmişə mümkün olmadığından bu tənliyin də təqribi həllini tapırlar. Bunun üçün $L_n(x)$ çoxhədlisinin xətti hissəsini ayıraraq, xətti tənliyi həll edirlər:

$$L_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + F_n(x) = 0,$$

$$f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) = -F_n(x),$$

$$x = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} [f(x_n) + F_n(x)]$$

və bundan sonra bu tənliyin təqribi həllin tapmaq üçün iterasiya üsullarından birini tətbiq edirlər.

§4. Qeyri-xətti tənliklər sisteminin təqribi üsulları haqqında

1. Adi iterasiya üsulu. Aşağıdakı kimi qeyri-xətti tənliklər sistemini nəzərdən keçirək:

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.19)$$

Bu sistemi vektor şəklində yazaq:

$$x = \varphi(x),$$

burada $x \in E^n$ (E^n n -ölçülü Evklid fəzasıdır),

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Sıxılmış inikas prinsipində $R = E^n$,

$$S(x^*, r) = \{x \in E^n, \|x - x^*\|_{E^n} \leq r\}$$

və $A(x) \equiv \varphi(x)$ qəbul etsək (4.19) sistemi üçün uyğun teoremi söyləmək olar.

Teorem 4.5. Tutaq ki, $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty$) funksiyaları Lipşits şərtini ödəyirlər:

$$|\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |x_j - y_j|$$

və

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} < 1.$$

Onda (4.19) sisteminin yeganə həlli var və bu həll

$$x_i^{(k)} = \varphi_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.20)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunan $\{x_i^{(k)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ardıcılıqlarının limitidir. Belə ki, yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1.$$

Teorem 4.6. Tutaq ki, $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ ($|x_i - x_i^*| \leq r$) funksiyaları Lipsits şərtini ödəyirlər:

$$|\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |x_j - y_j|$$

və $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} < 1$. Bundan başqa, fərz edək ki,

$$|\varphi_i(x_1^*, \dots, x_n^*) - x_i^*| \leq (1 - \alpha)r \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Onda (4.19) sisteminin yeganə həlli var və bu həll (4.20) düsturları ilə təyin olunan $\{x_i^{(k)}\}$ ($i=1,2,\dots,n$) ardıcılıqlarının limitidir. Belə ki, yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\|x^{(k)} - x\|_1 \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1.$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1^{(k)} &= \varphi_1(\tilde{x}_1^{(k-1)}, \tilde{x}_2^{(k-1)}, \tilde{x}_3^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{n-1}^{(k-1)}, \tilde{x}_n^{(k-1)}), \\ \tilde{x}_2^{(k)} &= \varphi_2(\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k-1)}, \tilde{x}_3^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{n-1}^{(k-1)}, \tilde{x}_n^{(k-1)}), \\ \tilde{x}_3^{(k)} &= \varphi_3(\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}, \tilde{x}_3^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{n-1}^{(k-1)}, \tilde{x}_n^{(k-1)}), \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ \tilde{x}_n^{(k)} &= \varphi_k(\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}, \tilde{x}_3^{(k)}, \dots, \tilde{x}_{n-1}^{(k)}, \tilde{x}_n^{(k-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Fərz edək ki, teorem 4.5-in şərtləri ödənilir. Bu o deməkdir ki, (4.19) sisteminin yeganə həlli var və

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 \leq \alpha \|x^{(k-1)} - \bar{x}\|_1, \quad (4.22)$$

burada $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ yaxınlaşmaları (4.20) ilə təyin edirlər; $\bar{x}$ isə (4.19) sisteminin həllidir.

İndi isə (4.21) yaxınlaşmalarının (Zeydel üsulunun) yığılma sürətini tapaq.

Aşkardır ki,

$$x_i^{(k)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Ona görə də

$$\begin{aligned} |x_i^{(k)} - \bar{x}_i| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} |x_j^{(k)} - \bar{x}_j| + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |x_j^{(k-1)} - \bar{x}_j|, \\ |x_i^{(k)} - \bar{x}_i| &\leq \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \right) \|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 + \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right) \|x^{(k-1)} - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Tutaq ki,

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 = |x_{i_0}^{(k)} - \bar{x}_{i_0}| \quad (1 \leq i_0 \leq n).$$

Onda

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 &\leq \left(\sum_{j=1}^{i_0-1} \alpha_{i_0 j} \right) \|x^{(k)} - x\|_1 + \left(\sum_{j=i_0}^n \alpha_{i_0 j} \right) \|x^{(k-1)} - \bar{x}\|_1, \\ \|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 &\leq \frac{\sum_{j=i_0}^k \alpha_{i_0 j}}{1 - \sum_{j=1}^{i_0-1} \alpha_{i_0 j}} \|x^{(k-1)} - \bar{x}\|_1, \\ \|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 &\leq \alpha_* \|x^{(k)} - \bar{x}\|_1. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Burada

$$\alpha_* = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=i}^n \alpha_{ij}}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}}.$$

Bu da Zeydel yaxınlaşmalarının yığılma sürətini təyin edir.

Aşkıdır ki, $\alpha_* < \alpha$. Ona görə də (4.22) və (4.23)-ü müqayisə etdikdə görürük ki, xətti sistemlərdə olduğu kimi, qeyri-xətti sistemlərdə də Zeydel yaxınlaşmaları, adi ardıcıl yaxınlaşmalara nisbətən daha sürətlə həllə yığılır (teorem 4.5-in şərtləri daxilində).

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 4.7. Tutaq ki, $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ ($-\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < \infty$) funksiyaları Lipsits şərtini ödəyirlər:

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_n) - \varphi_i(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |x_j - y_j| \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

və

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} < 1.$$

Onda (4.21) düsturları ilə təyin olunan $\bar{x}_i^{(k)} (i=1,2,\dots,n)$ Zeydel yaxınlaşmaları (4.19) sisteminin yeganə həllinə yığılır və yığılma sürəti

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \alpha^{(k)} \|x^{(0)} - \bar{x}\|$$

düsturu ilə təyin olunur. Belə ki, Zeydel yaxınlaşmaları adi ardıcıl yaxınlaşmalara nəzərən daha sürətlə yığılır.

3. Nyuton üsulu. Aşağıdakı kimi qeyri-xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (4.24)$$

yaxud

$$f(x) = 0,$$

burada

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Fərz edək ki, n -ölçülü Evklid fəzasının (4.24) sisteminin həllinin daxil olduğu hər hansı qabarıq G çoxluğunda, $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir, birinci tərtibindən kəsilməz törəmələri var və

$$f_x(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

matrisi $x = \bar{x}$ nöqtəsində ($\bar{x}$ ilə (4.24) sisteminin həlli işarə olunur) qeyri-məxsusi matrisdir. Onda aşkardır ki, bu matrisin, $\bar{x}$ nöqtəsinin yaxın ətrafında, tərsi var və bu tərs matrisi $f_x^{-1}(x)$ ilə işarə edək.

(4.24) sistemini aşağıdakı sistem ilə əvəz edək:

$$x = \varphi(x) \equiv x - f_x^{-1}(x)f(x). \quad (4.25)$$

Aşkardır ki, $\bar{x}$ eyni zamanda (4.25)-in də həlli olacaq. (4.25) sistemini həll etmək üçün adi iterasiya üsulunu quraq:

$$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) \equiv x^{(k-1)} - f_x^{-1}(x^{(k-1)})f(x^{(k-1)}) \quad (k=1,2,\dots), \quad (4.26)$$

burada $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ vektoru G -ə olan ixtiyari vektordur.

(4.26) yaxınlaşmalarını

$$x^{(k)} - x^{(k-1)} = -f_x^{-1}[x^{(k-1)}]f[x^{(k-1)}]$$

və yaxud

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i[x^{(k-1)}]}{\partial x_j} [x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}] = -f_i[x^{(k-1)}] \quad (i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots) \quad (4.27)$$

şəklində də yazmaq olar.

(4.27) sistemi $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ məchullarına nəzərən bircinsli olmayan xətti cəbri tənliklər sistemidir. Bu sistemi həll etməklə $\{x_i^{(k)}\}$ ardıcılığını tapmaq olar. (4.27) ardıcılığının qurulmasına Nyuton üsulu deyirlər. $\{x_i^{(k)}\} (i=1,2,\dots,n)$ yaxınlaşmalarının tapılma üsulundan görünür ki, hər yaxınlaşmanı tapmaq üçün xətti cəbri tənliklər sistemini həll etmək lazımdır. Təcrübədə bu çətinlik törətdiyindən $\{x_i^{(k)}\}$ yaxınlaşmalarını aşağıdakı tənliklər sistemindən tapırlar:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i[x^{(0)}]}{\partial x_j} [x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}] = -f_i[x^{(k-1)}] \quad (i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots). \quad (4.28)$$

Təbiidir ki, (4.28) sistemindən tapılmış yaxınlaşmaların həllə yığılma sürəti (4.27) sistemindən tapılmış yaxınlaşmalara nisbətən daha zəifdir.

(4.27) və (4.28) yaxınlaşmalarını (4.24) sisteminin həllinə yığılması üçün kafi şərtlərin tapılması və bu yaxınlaşmaların yığılma sürətlərinin qiymətləndirilməsi L.V. Kantoroviç və Q.P. Akilovun, dərslərin axırında verilmiş ədəbiyyatdakı kitabda geniş şərh edilmişdir.

III HİSSƏ

DİFERENSİAL VƏ İNTEQRAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ ÜSULLARI

V FƏSİL

ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN ƏDƏDİ ÜSULLARI

Məlumdur ki, diferensial tənliklərin dəqiq həllini çox vaxt tapmaq mümkün olmur (xüsusən qeyri-xətti diferensial tənliklərin). Buna görə də belə tənlikləri həll etmək üçün müxtəlif təqribi üsullar vardır. Diferensial tənlikləri həll etmək üçün verilmiş təqribi üsulları iki qrupa ayırmaq olar: analitik və ədədi üsullar. Analitik təqribi üsullarda axtarılan həllə yaxın funksiya tapılır və bu funksiyanı diferensial tənliyin təqribi həlli kimi qəbul edirlər. Ədədi təqribi üsullarda isə həllin verilən nöqtələrdə dəqiq qiymətləri əvəzinə təqribi qiymətləri tapılır.

Biz bu fəsildə əsasən ədədi üsulları verəcəyik. Analitik üsullar haqqında geniş məlumatı, məsələn, dərslərin axırında verilmiş ədəbiyyatda göstərilən Y.C. Məmmədovun kitabından almaq olar.

§ 1. Analitik təqribi üsullar

Tutaq ki,

$$y' = f(x, y) \quad (5.1)$$

bir tərtibli qeyri-xətti diferensial tənliyin elə həllini tapmaq tələb olunur ki, aşağıdakı başlanğıc şərtini ödəsin:

$$y(x_0) = y_0. \quad (5.2)$$

1. Adi iterasiya üsulu. (5.1), (5.2) məsələsinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə yaxınlaşmaları quraq:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y_{n-1}(x)] dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

Burada $y_0(x)$ sıfırıncı yaxınlaşması $f(x, y)$ -in təyin oblastından götürülmüş ixtiyari funksiya.

Sıxılmış inikas prinsipində

$$R = C[x_0, x_0 + X], \quad S = S(y_0, r) = \{y; \|y - y_0\|_C \leq r\},$$

$$A(y) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx$$

götürsək, aşağıdakı teoremin doğruluğunu almış olarıq.

Teorem 5.1. Tutaq ki, $f(x, y)$ ($x_0 \leq x \leq x_0 + X, |y - y_0| \leq r$) funksiyası kəsilməzdir və y -ə nəzərən Lipsits şərtini ödəyir:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|.$$

Bundan başqa, fərz olunur ki,

$$X \max(L, M) < 1, \quad M = \max_{(x, y)} |f(x, y)| \quad (5.4)$$

şərti də ödənilir.

Onda (5.1), (5.2) məsələsinin $[x_0, x_0 + X]$ parçasında təyin olunan yeganə həlli var, bu həll (5.3) yaxınlaşmalarının limitidir və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$|y_n(x) - \bar{y}(x)| \leq \frac{(LM)^n}{1 - LM} \max_x |y_1(x) - y_0(x)|.$$

Doğrudan da (5.4) şərtindən $A(y)$ operatorunun S kürəsində təsir etdiyi, Lipsits şərti və (5.4)-dən isə sıxan operator olduğu alınır.

Qeyd edək ki, sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edib, yüksək tərtibli diferensial tənliklərin həllini tapmaq üçün də ardıcıl yaxınlaşma üsulunun yığıldığını isbat etmək olar. Məsələn,

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0$$

məsələsinin həlli üçün sıxılmış inikas prinsipini tətbiq etmək üçün

$$A(y) \equiv y'_0 + (x - x_0)y_0 + \int_{x_0}^x (x - s)f[s, y(s)] ds$$

götürüb, kəsilməz funksiyalar fəzasında bu prinsipin şərtlərini yoxlamaq kifayətdir.

Nəhayət, qeyd edək ki, (5.1), (5.2) məsələsini həll etmək üçün bəzən adi iterasiya üsulunun şəklini dəyişib tətbiq etmək əlverişli olur. Məsələn, tutaq ki,

$$f(x, y) = F(x, y, y)$$

və $F'(x, y, z)$ elə funksiya ki, ixtiyari qeyd edilmiş $z^*(x)$ funksiyası üçün

$$y' = F[x, y, z^*(x)], \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

məsələsinin dəqiq həllini tapmaq olar. Bu halda yaxınlaşmaları aşağıdakı şəkildə qurmaq əlverişlidir:

$$y'_n = F(x, y_n, y_{n-1}), \quad y_n(x_0) = y_0, \quad y'_n(x_0) = y'_0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

İsbat etmək olar ki, müəyyən şərtlər daxilində bu yaxınlaşmalar, məsələnin həllinə adi iterasiyalara nəzərən daha tez yığılır.

2. Çaplığın üsulu. Bu üsulun şərhində diferensial bərabərsizliklər haqda aşağıdakı teorem əsas rol oynayır [12].

Teorem 5.2. Tutaq ki, $f(x, y)$ ($x_0 \leq x \leq x_0 + X, -\infty < y < \infty$) kəsilməz funksiyadır. Əgər diferensiallanan $V(x)$ ($x_0 \leq x \leq x_0 + X$) funksiyası

$$\frac{dV(x)}{dx} < f[x, V(x)], \quad V(x_0) = y_0$$

diferensial bərabərsizliyini ödəyirsə, onda

$$V(x) < u(x) \quad (x_0 < x < x_0 + X)$$

olar. Burada $u(x)$ (5.1), (5.2) məsələsinin həllidir.

Bu teoremdə “<” işarəsini “≤” işarəsi ilə əvəz etsək, yenə teorem doğrudur. Çaplığın üsulu ilə (5.1), (5.2) məsələsini həll etmək üçün yaxınlaşmaları quraq. Fərz edək ki, $f(x, y)$ ($x_0 \leq x \leq x_0 + X, -\infty < y < \infty$) kəsilməz funksiyadır. $y_0(x)$ və $\bar{y}_0(x)$ ($x_0 \leq x \leq x_0 + X$) ilə elə diferensiallanan funksiyaları işarə edək ki, uyğun olaraq, aşağıdakı bərabərsizlikləri ödəsinlər:

$$\frac{dy_0(x)}{dx} < f[x, y_0(x)], \quad y_0(x_0) = y_0,$$

$$\frac{d\bar{y}_0(x)}{dx} > f[x, \bar{y}_0(x)], \quad \bar{y}_0(x_0) = y_0.$$

Teorem 5.2-yə əsasən

$$y_0(x) < \bar{y}_0(x) \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + X).$$

Tutaq ki,

$$y_0 = \min_x y_0(x), \quad \bar{y}_0 = \max_x \bar{y}_0(x), \\ \Omega = [x_0, x_0 + X] \times [y_0, \bar{y}_0].$$

Fərz edək ki, $f(x, y)$ funksiyası Ω düzbucaqlısında y -ə nəzərən iki dəfə kəsilməz diferensiallandıqda və bu ikinci tərtib törəmə öz işarəsini saxlayır.

$y_0(x)$ funksiyasını aşağı sıfırıncı yaxınlaşma, $\bar{y}_0(x)$ funksiyasını isə yuxarı sıfırıncı yaxınlaşma kimi qəbul edək.

Əvvəlcə fərz edək ki, $f''_{y^2}(x, y) > 0$. birinci aşağı və yuxarı yaxın-

laşmaları uyğun olaraq aşağıdakı xətti məsələlərin həlli kimi götürək:

$$\frac{dy_1}{dx} = L_1^{(0)}[y_1], \quad y_1(x_0) = y_0, \quad (5.5_1)$$

$$\frac{d\bar{y}_1}{dx} = L_2^{(0)}[\bar{y}_1], \quad \bar{y}_1(x_0) = y_0. \quad (5.6_1)$$

Burada

$$L_1^{(0)}[y] \equiv f'_y[x, y_0(x)][y - y_0(x)] + f[x, y_0(x)],$$

$$L_2^{(0)}[y] \equiv \frac{f[x, \bar{y}_0(x)] - f[x, y_0(x)]}{\bar{y}_0(x) - y_0(x)}[y - y_0(x)] + f[x, y_0(x)].$$

Aşkardır ki,

$$L_1^{(0)}[y_0(x)] = f[x, y_0(x)] > \frac{dy_0(x)}{dx},$$

$$L_2^{(0)}[\bar{y}_0(x)] = f[x, \bar{y}_0(x)] < \frac{d\bar{y}_0(x)}{dx}.$$

Teorem 5.2-ni tətbiq etsək

$$y_0(0) < y_1(x), \quad \bar{y}_0(x) > \bar{y}_1(x) \quad (5.7_1)$$

olduğunu alırıq.

Digər tərəfdən

$$\frac{d[\bar{y}_1(x) - y_0(x)]}{dx} > \frac{f[x, \bar{y}_0(x)] - f[x, y_0(x)]}{\bar{y}_0(x) - y_0(x)}[\bar{y}_1(x) - y_0(x)] \quad (5.1)$$

bərabərsizliyindən

$$y_0(x) < \bar{y}_1(x)$$

olduğu alınır.

(5.7₁), (5.8₁) və $f''_{y^2}(x, y) > 0$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_1}{dx} &= \frac{f(x, \bar{y}_0) - f(x, y_0)}{\bar{y}_0 - y_0}(\bar{y}_1 - y_0) + f(x, y_0) = \\ &= \left[\frac{f(x, \bar{y}_0) - f(x, y_0)}{\bar{y}_0 - y_0} - \frac{f(x, \bar{y}_1) - f(x, y_0)}{\bar{y}_1 - y_0} \right] (\bar{y}_1 - y_0) + f(x, \bar{y}_1) > f(x, \bar{y}_1), \\ \frac{dy_1}{dx} &= f'_y(x, y_0)(y_1 - y_0) + f(x, y_0) = \\ &= \left[f'_y(x, y_0) - \frac{f(x, y_1) - f(x, y_0)}{y_1 - y_0} \right] (y_1 - y_0) + f(x, y_1) < f(x, y_1). \end{aligned}$$

$$\frac{dy_1}{dx} < f(x, y_1), \quad y_1(x_0) = y_0, \quad (5.9_1)$$

$$\frac{d\bar{y}_1}{dx} < f(x, \bar{y}_1), \quad \bar{y}_1(x_0) = y_0. \quad (5.10_1)$$

Sonrakı yaxınlaşmaları aşağıdakı xətti məsələlərin həlli kimi təyin edək:

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = L_1^{(n)}[y_{n+1}], \quad y_{n+1}(x_0) = y_0, \quad (5.5_{n+1})$$

$$\frac{d\bar{y}_{n+1}}{dx} = L_2^{(n)}[\bar{y}_{n+1}], \quad \bar{y}_{n+1}(x_0) = y_0. \quad (5.6_{n+1})$$

Burada

$$L_1^{(n)}[y] = f'_y[x, y_n(x)][y - y_n(x)] + f[x, y_n(x)],$$

$$L_2^{(n)}[y] = \frac{f[x, \bar{y}_n(x)] - f[x, y_n(x)]}{\bar{y}_n(x) - y_n(x)}[y - y_n(x)] + f[x, y_n(x)].$$

Fərz edək ki,

$$y_{n-1}(x) < y_n(x), \quad \bar{y}_{n-1}(x) > \bar{y}_n(x), \quad (5.7_n)$$

$$y_{n-1}(x) < \bar{y}_n(x), \quad (5.8_n)$$

$$\frac{dy_n}{dx} < f[x, y_n(x)], \quad y_n(x_0) = y_0, \quad (5.9_n)$$

$$\frac{d\bar{y}_n(x)}{dx} > f[x, \bar{y}_n(x)], \quad \bar{y}_n(x_0) = y_0. \quad (5.10_n)$$

İsbat edək ki, $y_{n+1}(x), \bar{y}_{n+1}(x)$ funksiyaları da bu xassələrə malikdirlər.

(5.9_n) və (5.10_n)-dən

$$\frac{dy_n(x)}{dx} < f[x, y_n(x)] = L_1^{(n)}[y_n(x)],$$

$$\frac{d\bar{y}_n(x)}{dx} > f[x, \bar{y}_n(x)] = L_2^{(n)}[\bar{y}_n(x)].$$

Teorem 5.2-ni tətbiq etsək

$$y_n(x) < y_{n+1}(x); \quad \bar{y}_n(x) > \bar{y}_{n+1}(x) \quad (5.7_{n+1})$$

olduğunu alırıq.

Aşkıdır ki,

$$\frac{d[\bar{y}_{n+1}(x) - y_n(x)]}{dx} > \frac{f[x, \bar{y}_n(x)] - f[x, y_n(x)]}{\bar{y}_n(x) - y_n(x)}[\bar{y}_{n+1}(x) - y_n(x)],$$

$$[\bar{y}_{n+1}(x) - y_n(x)]|_{x=x_0} = 0.$$

Yenə də diferensial bərabərsizlik haqqında teoremi tətbiq etsək:

$$y_n(x) < \bar{y}_{n+1}(x). \quad (5.8)$$

Nəhayət, (5.5_{n+1}), (5.6_{n+1}) tənliklərindən $f''_{y^2}(x, y) > 0$ olduğunu

nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \frac{dy_{n+1}}{dx} &= f'_y(x, y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n) = \\ &= \left[f'_y(x, y_n) - \frac{f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)}{y_{n+1} - y_n} \right] (y_{n+1} - y_n) + \\ &\quad + f(x, y_{n+1}) < f(x, y_{n+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_{n+1}}{dx} &= \frac{f(x, \bar{y}_n) - f(x, y_n)}{\bar{y}_n - y_n}(\bar{y}_{n+1} - y_n) + f(x, y_n) = \\ &= \left[\frac{f(x, \bar{y}_n) - f(x, y_n)}{\bar{y}_n - y_n} - \frac{f(x, \bar{y}_{n+1}) - f(x, y_n)}{\bar{y}_{n+1} - y_n} \right] (\bar{y}_{n+1} - y_n) + \\ &\quad + f(x, \bar{y}_{n+1}) > f(x, \bar{y}_{n+1}). \end{aligned}$$

Buradan (teorem 5.2-ni tətbiq etsək)

$$\frac{dy_{n+1}(x)}{dx} < f[x, y_{n+1}(x)], \quad y_{n+1}(x_0) = y_0, \quad (5.9_{n+1})$$

$$\frac{d\bar{y}_{n+1}(x)}{dx} > f[x, \bar{y}_{n+1}(x)], \quad \bar{y}_{n+1}(x_0) = y_0, \quad (5.10_{n+1})$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə, biz isbat etdik ki, aşağı yaxınlaşmalar- $\{y_n(x)\}$ artır və yuxarıdan $\bar{y}_0(x)$ ilə məhduddur; yuxarı yaxınlaşmalar $\{\bar{y}_n(x)\}$ azalır və aşağıdan $y_0(x)$ ilə məhduddur, yəni

$$[y_0, \bar{y}_0] \supset [y_0(x), \bar{y}_0(x)] \supset \dots \supset [y_n(x), \bar{y}_n(x)] \supset \dots \quad (5.11)$$

Əgər $f''_{y^2}(x, y) < 0$ isə, onda Çaplığın yaxınlaşmalarını aşağıdakı tənliklərdən tapmaq lazımdır:

$$\begin{aligned}\frac{dy_{n+1}}{dx} &= L_1^{(n)}[\underline{y}_{n+1}], \quad \underline{y}_{n+1}(x_0) = y_0, \\ \frac{d\bar{y}_{n+1}}{dx} &= \bar{L}_2^{(n)}[\bar{y}_{n+1}], \quad \bar{y}_{n+1}(x) = y_0,\end{aligned}$$

burada

$$\bar{L}_2^{(n)}[y] \equiv f'_y(x, \bar{y}_n(x))[y - \bar{y}_n(x)] + f[x, \bar{y}_n(x)].$$

Eyni qayda ilə isbat edilir ki, bu halda da Çaplığın yaxınlaşmaları (5.11) xassələrinə malikdir.

(5.11)-dən çıxır ki,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{y}_n(x) &= \underline{y}(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n(x) &= \bar{y}(x).\end{aligned}$$

(5.5_{n+1}) və (5.6_{n+1}) məsələlərini ekvivalent inteqral tənliklərlə əvəz edib, $n \rightarrow \infty$ -da limitə keçsək $\underline{y}(x)$ və $\bar{y}(x)$ funksiyalarının (5.1), (5.2) məsələsinin həlli olduğunu almış oluruq.

Teorem 5.3. Tutaq ki, $f(x, y)$ funksiyası Ω -da kəsilməz funksiyadır, y -ə nəzərən iki tərtibdən kəsilməz törəməsi var və bu törəmə öz işarəsini saxlayır.

Onda aşağı və yuxarı yaxınlaşmalar müntəzəm olaraq (5.1), (5.2) məsələsinin yeganə həllinə yığılır və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\bar{y}_n(x) - \underline{y}_n(x) \leq \frac{2C}{2^{2^n}}, \quad (2.12)$$

burada

$$\begin{aligned}\bar{y}_0(x) - \underline{y}_0(x) &\leq C = \frac{1}{2KX}, \quad K = \mu e^{\lambda T}, \\ \lambda &= \max_{\Omega} |f'_y(x, y)|, \quad \mu = \max_{\Omega} |f''_{y^2}(x, y)|.\end{aligned}$$

İsbatı. $f''_{y^2} \geq 0$ halına baxaq ($f''_{y^2} \leq 0$ olduqda teoremin isbatı anoloji). Aşağıdakı işarələməni aparaq:

$$V_n(x) = \bar{y}_n(x) - \underline{y}_n(x).$$

Aşkıdır ki,

$$\begin{aligned}L_2^{(n)}[y] &\equiv f'_y(x, \underline{y}_n)(y - \underline{y}_n) + f(x, \underline{y}_n) + f''_{y^2}(x, \xi)(z - \underline{y}_n)(y - \underline{y}_n), \\ z &\in (\underline{y}_n, \bar{y}_n), \quad \xi \in (\underline{y}_n, z).\end{aligned}$$

Onda (5.5), (5.6)-dan alırıq:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{n+1}}{dx} &= f'_y(x, \underline{y}_n)V_{n+1} + f''_{y^2}(x, \xi)(z - \underline{y}_n)(\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n), \\ \frac{dV_{n+1}}{dx} &\leq \lambda V_{n+1}(x) + \mu V_n^2(x), \quad V_{n+1}(x_0) = 0.\end{aligned} \quad (5.13)$$

Aşağıdakı kimi köməkçi diferensial tənliklərə baxaq:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{n+1}(x) &= \lambda \varepsilon_{n+1}(x) + \mu \varepsilon_n^2(x), \\ \varepsilon_{n+1}(x_0) &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Burada $\varepsilon_0(x)$ aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir:

$$V_0(x) \leq \varepsilon_0(x) \leq C.$$

Riyazi induksiya üsulu ilə asanlıqla isbat edilir ki,

$$V_n(x) \leq \varepsilon_n(x),$$

Onda (5.13)-dən

$$\frac{dV_{n+1}(x)}{dx} \leq \lambda V_{n+1}(x) + \mu \varepsilon_n^2(x), \quad V_{n+1}(x_0) = 0$$

olduğunu alırıq.

Diferensial bərabərsizliklər haqqında teoremdən istifadə etsək,

$$V_{n+1}(x) \leq \varepsilon_{n+1}(x)$$

olar.

Digər tərəfdən

$$\varepsilon_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x \mu e^{\lambda(x-s)} \varepsilon_n^2(s) ds,$$

$$\varepsilon_n(x) \leq \mu e^{\lambda x} \int_{x_0}^x \varepsilon_n^2(s) ds, \quad \varepsilon_n(x) \leq C(\alpha x)^{2^n - 1}.$$

Burada $\alpha = \frac{1}{2x}$.

Beləliklə, isbat etdik ki,

$$V_n(x) \leq C(\alpha x)^{2^n - 1} C \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} = \frac{2C}{2^{2^n}},$$

yəni (2.12) bərabərsizliyinin doğruluğu isbat olundu. Həllin yeganəliyi bu bərabərsizlikdən çıxır.

Teorem tamam isbat olundu.

§2. Runqe-Kutta üsulu

Fərz edək ki, $f(x, y)$ funksiyanın n tərtibli xüsusi törəmələri var. Bu o deməkdir ki, (5.1), (5.2) məsələsinin həllinin $n+1$ tərtibdən törəməsi olar. Bu həlli aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$y(x) \approx y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}y_0^{(n+1)},$$

burada $y_0^{(i)} = y^{(i)}(x_0)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). $x - x_0 = h$ işarə etsək,

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y_0^{(n+1)}. \quad (5.14)$$

Bu düstura daxil olan törəmələri hesablamaq olar. Doğrudan da, (5.2) başlanğıc şərtini nəzərə alaraq (5.1) tənliyindən

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = f_0,$$

yenə də (5.1) tənliyindən

$$y''_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x} + f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y},$$

$$y''_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} \right)^2 f_0 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} f_0^2$$

olduğunu alırıq.

Bu düsturlardan görünür ki, təcrübədə onların köməkliyi ilə törəmələri hesablamaq əlverişli deyil. Buna görə də, (5.1), (5.2) məsələsinin təqribi həllini (5.14) düsturu ilə hesablamaq təcrübədə əlverişli deyil.

Runqe (5.14) düsturu əvəzində

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + P_{r1}K_1 + P_{r2}K_2 + \dots + P_{rr}K_r \quad (5.15)$$

düsturunu götürməyi təklif etmişdir. Burada

$$K_1(h) = hf(\xi_i, \eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

$$\xi_i = x_0 + \alpha_i h, \eta_i = y_0 + \beta_{i1}K_1(h) + \beta_{i2}K_2(h) + \dots + \beta_{ii-1}K_{i-1}(h),$$

$\alpha_i, \beta_{ij}, P_{ri}$ ($\alpha_1 = 0$) parametrləridir.

Aşkardır ki, α_i, β_{ij} parametrlərini bilməklə və h addımını seçməklə $K_i(h)$ -ləri tapmaq olar:

$$K_1(h) = hf(x_0, y_0),$$

$$K_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}K_1),$$

$$K_3(h) = hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31}K_1 + \beta_{32}K_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$K_r(h) = hf(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r1}K_1 + \beta_{r2}K_2 + \dots + \beta_{rr-1}K_{r-1}).$$

$P_{ri}, \alpha_i, \beta_{ij}$ parametrlərini elə seçmək lazımdır ki, kafi qədər böyük l üçün

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y_0 - [P_{r1}K_1(h) + P_{r2}K_2(h) + \dots + P_{rr}K_r(h)]$$

funksiyası

$$\varphi_r(0) = \varphi'_r(0) = \varphi''_r(0) = \dots = \varphi_r^{(l)}(0) = 0, \quad \varphi_r^{(l+1)}(0) \neq 0$$

şərtlərini ödəsin.

Aşkardır ki, (5.4) düsturunun hər addımda xətası

$$R_r(h) = \frac{\varphi_r^{(l+1)}(\xi)}{(l+1)!} h^{l+1} \quad (0 \leq \xi \leq h)$$

düsturu ilə təyin olar.

Nəhayət, qeyd edək ki, $\varphi_r(0) = 0$ şərti həmişə ödənilir. $\varphi_r^{(s)}(0) = 0$ ($s = 1, 2, \dots, l$) şərtləri isə

$$y_0^{(s)} = P_{r1}K_1^{(s)}(0) + P_{r2}K_2^{(s)}(0) + \dots + P_{rr}K_r^{(s)}(0) \quad (s = 1, 2, \dots, l)$$

bərabərliklərinə ekvivalentdir. Bu sistemdən məchulları təyin etmək üçün $K_i^{(s)}(0)$ ($i = 1, 2, \dots, r; s = 1, 2, \dots, l$) və $y_0^{(l)}$ tapmaq lazımdır. $y_0^{(l)}$ -i tapmaq üsulunu yuxarıda şərh etdik. $K_i^{(l)}$ -isə aşağıdakı düsturlar vasitəsilə tapılır:

$$K'_1(h) = f_0, K_1^{(s)}(h) \equiv 0 \quad (s \geq 2),$$

$$K'_i(h) = f(\xi_i, \eta_i) + h \left[\alpha_i \frac{\partial f(\xi_i, \eta_i)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + (\beta_{i1}K'_1 + \beta_{i2}K'_2 + \dots + \beta_{ii-1}K'_{i-1}) \frac{\partial f(\xi_i, \eta_i)}{\partial y} \right] \quad (i > 1).$$

Bu üsulu Runqe təklif etmiş, Kutta isə təkmilləşdirdiyindən, ona Runqe-Kutta üsulu deyirlər. Runqe-Kutta üsulu ilə $y(x + h)$ -ı tapdıqda yalnız $y(x)$ -dən istifadə olunduğundan bu üsula biraddımlı üsul deyirlər.

İndi bu üsulun bəzi xüsusi hallarına baxaq:

1. $r = 1$ götürək. Onda

$$\begin{aligned}\varphi_1(h) &= y(x_0 + h) - y(x_0) - P_{11}hf_0, \\ \varphi'_1(h) &= y'(x_0 + h) - P_{11}f_0, \\ \varphi'_1(0) &= y'_0 - P_{11}f_0.\end{aligned}$$

$\varphi'_1(0) = 0$ tənliyindən $P_{11} = 1$ olduğunu alırıq.

Ümumiyyətlə,

$$\varphi''_1(0) = y''_0 \neq 0$$

olduğundan təqribi həlli hesablama düsturu

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf_0$$

şəklində olar. Bu halda xəta

$$R_1(h) = \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_0 + h)$$

düsturu ilə qiymətləndirilir. Bu düsturla (5.1), (5.2) məsələsinin təqribi həllinin tapılma üsuluna Eyler üsulu da deyirlər.

2. $r = 2$ götürək. Onda

$$\begin{aligned}\varphi_2(h) &= y(x_0 + h) - y_0 - [P_{21}K_1(h) + P_{22}K_2(h)], \\ \varphi'_2(0) &= y'_0 - [P_{21}K'_1(0) + P_{22}K'_2(0)] = f_0 - (P_{21}f_0 + P_{22}f_0).\end{aligned}$$

$\varphi'_2(0) = 0$ tənliyindən

$$P_{21} + P_{22} = 1$$

olduğunu alırıq.

$$\varphi''_2(0) = y''_0 - [P_{21}K''_1(0) + P_{22}K''_2(0)] = 0$$

tənliyindən

$$2P_{22}\alpha_2 = 1, 2P_{22}P_{21} = 1$$

olduğunu alırıq.

Ümumiyyətlə, $\varphi'''_2(0) \neq 0$ olduğundan, alınan təqribi həlli hesablama düsturunun xətasının tərtibi h^3 olacaq.

Beləliklə, $P_{21}, P_{22}, \alpha_2, \beta_{21}$ məchullarını tapmaq üçün

$$\left. \begin{aligned}P_{21} + P_{22} &= 1, & P_{22}\alpha_2 &= \frac{1}{2}, \\ P_{22}\beta_{21} &= \frac{1}{2}\end{aligned} \right\}$$

sistemi alırıq. Aşkardır ki, bu sistemin sonsuz sayda həlli var. Təbiidir ki, bu həllərdən eləsinə götürmək lazımdır ki, alınan hesablama düsturu

sadə olsun. Məsələn, $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$ götürsək, $P_{21} = P_{22} = \frac{1}{2}$ olar. Onda

düstur

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

şəklində olar. Burada

$$K_1 = hf_0, \quad K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right).$$

3. $r = 3$ götürsək, alınan təqribi həlli hesablama düsturlarından birini aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3),$$

burada

$$K_3 = hf(x_0 + h, y_0 - K_1 + 2K_2).$$

Bu düsturun xətası

$$R_3(h) = \frac{\varphi_3^{(4)}(\xi)}{24} h^4$$

düsturu ilə qiymətləndirilir.

4. Nəhayət, $r = 4$ götürsək, təcrübədə ən çox istifadə olunan düsturlardan biri aşağıdakı şəkildə olar:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2\tilde{K}_3 + K_4),$$

burada

$$\tilde{K}_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3).$$

Bu düsturun xətası

$$R_4(h) = \frac{\varphi_4^{(5)}(\xi)}{120} h^5$$

şəklində olar.

§ 3. Adams üsulu

Runqe-Kutta üsulunun əsas nöqsanı ondan ibarətdir ki, məsələnin həllini hər yeni nöqtədə bu üsulla tapmaq üçün diferensial tənliyin sağ tərəfini hər dəfə bir neçə nöqtədə hesablamaq lazım gəlir. Bu təcrübədə əlverişli deyil (xüsusən tənliyin sağ tərəfi mürəkkəb olduqda). Aşağıda verilən fərqlər üsulunda bu nöqsan aradan qaldırılır.

Fərz edək ki, (5.1), (5.2) məsələsinin həllinin təqribi qiymətləri $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ ($x_{m-i} = x_m - ih$, h – addımdır) nöqtələrində hər

hansı bir üsulla, məsələn, Runqe-Kutta üsulu və yaxud analitik üsullarla tapılmışdır. Tutaq ki, $y(x)$ funksiyası (5.1), (5.2) məsələsinin həllidir və aşağıdakı işarələmələri aparaq

$$y_i = y(x_i), \quad f_i = f(x_i, y_i)$$

$\varphi(x) = f[x, y(x)]$ funksiyasını $f_m, f_{m-1}, \dots, f_{m-k}$ qiymətlərinə görə $L_{m,k}(x)$ çoxhədlisi ilə approksimasiya edək:

$$L_{m,k}(x) = \sum_{i=0}^k f_{m-i} P_i(x).$$

Burada $P_i(x)$ ($i=0,1,\dots,k$) funksiyaları f_i -dən asılı deyillər. $x = x_m - th$ işarələməsini aparsaq

$$P_i(x) = Q_i(t).$$

Belə ki, $Q_i(t)$ k -dərəcəli çoxhədlidir və h m -dən asılı deyil. Onda

$$y_{m+1} = y_{m-j} + \int_{x_{m-j}}^{x_{m+1}} L_{m,k}(x) dx = y_{m-j} + h \sum_{i=1}^k \beta_i f_{m-i} \quad (5.16)$$

$$\beta_i = \int_{-j}^1 Q_i(t) dt$$

olar. Burada j -ləri və $L_{m,k}(x)$ çoxhədlisini müxtəlif qayda ilə götürməklə (5.1), (5.2) məsələsinin həllinin təqribi qiymətini tapmaq üçün, müxtəlif düsturlar almış olarıq. (5.16)-ya ekstrapolyasiya düsturu deyilir.

(5.5) düsturunu almaq üçün interpoliyasiya çoxhədlisini qurduqda bizə məlum olmayan f_{m+1} -dən də istifadə etmək olar. Bu halda alınan düsturun

$$y_{m+1} = y_{m-j} + h \sum_{i=1}^k \gamma_i f_{m-i} \quad (5.17)$$

sağ tərəfinə də məchul y_{m+1} daxil olacaq. Alınan bu qeyri-xətti tənliyi bizə məlum üsulların biri ilə həll edib y_{m+1} -i tapmaq olar. (5.17) düsturuna interpoliyasiya düsturu deyirlər.

Nəhayət, qeyd edək ki, bu düsturlar vasitəsilə y_{m+1} -i tapdıqdan sonra $f_{m+1}, f_m, \dots, f_{m-k}$ qiymətlərinə görə interpoliyasiya çoxhədlisini qurub, y_{m+2} -ni tapmaq üçün (5.16) və ya (5.17)-yə uyğun düstur tapılır. Bu prosesi davam etdirməklə ixtiyari nöqtədə (5.1), (5.2) məsələsinin həllinin

təqribi qiymətini tapmaq olar.

1. Ekstropolyasiya düsturu. Fərz edək ki, $j=0$. $L_{m,k}(x)$ çoxhədlisinin əvəzinə Nyutonun geriye interpoliyasiya düsturunu götürək:

$$L_{m,k}(x) = f_m + f_{m-1/2}^1 t + f_{m-1}^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + f_{m-k/2}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!}.$$

Onda

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_{m,k}(x) dx = y_m + h \int_0^1 L_{m,k}(x_m + th) dt = \\ &= y_m + h \int_0^1 \left[f_m + f_{m-1/2}^1 t + f_{m-1}^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + f_{m-k/2}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \right] dt, \\ y_{m+1} &= y_m + h(f_m + a_1 f_{m-1/2}^1 + a_2 f_{m-1}^2 + \dots + a_k f_{m-k/2}^k). \end{aligned}$$

Burada

$$a_i = \frac{1}{i!} \int_0^1 t(t+1) \dots (t+i-1) dt \quad (i=1,2,\dots,k).$$

Bu əmsalları hesablayıb, yuxarıdakı düsturda yerinə yazsaq

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h \left(f_m + \frac{1}{2} f_{m-1/2}^1 + \frac{5}{12} f_{m-1}^2 + \frac{3}{8} f_{m-3/2}^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{251}{720} f_{m-2}^4 + \frac{95}{288} f_{m-5/2}^5 + \dots \right) \quad (5.18) \end{aligned}$$

olduğunu alırıq.

(5.18) düsturuna Adamsın ekstropolyasiya düsturu deyirlər.

2. İnterpoliyasiya düsturu. Fərz edək ki, $j=0$. $L_{m,k}(x)$ interpoliyasiya çoxhədlisi əvəzinə Nyutonun geriye interpoliyasiya çoxhədlisini götürək (başlangıç nöqtə- x_m əvəzinə x_{m+1} nöqtəsi götürülür):

$$L_{m,k}(x) = f_{m+1} + f_{m+1/2}^1 t + f_m^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + f_{m+1-k/2}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!}.$$

$j=0$ götürsək

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left[f_{m+1} + f_{m+1/2}^1 t + f_m^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f_{m+1-k/2}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \right] dx = \end{aligned}$$

$$= y_m + h \int_{-1}^0 \left[f_{m+1} + f_{m+1/2}^1 t + f_m^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + f_{m+1-k}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \right] dt,$$

$$y_{m+1} = y_m + h(f_{m+1} + b_1 f_{m+1/2}^1 + b_2 f_m^2 + \dots + b_k f_{m+1-k/2}^k).$$

Burada

$$b_i = \frac{1}{i!} \int_{-1}^0 t(t+1) \dots (t+i-1) dt \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Bu əmsalları hesablayıb yuxarıdakı düsturda yerinə yazsaq,

$$y_{m+1} = y_m + h \left(f_{m+1} - \frac{1}{2} f_{m+1/2}^1 - \frac{1}{12} f_m^2 - \frac{1}{24} f_{m-1/2}^3 - \frac{19}{720} f_{m-1}^4 - \frac{9}{160} f_{m-3/2}^5 \right) \quad (5.19)$$

olduğunu alırıq.

(5.19) düsturuna Adamsın interpolasiya düsturu deyirlər.

İnterpolasiya nəzəriyyəindən məlumdur ki, verilmiş funksiyayı approksimasiya etdikdə interpolasiya düyünlərinin sayı artdıqca interpolasiya çoxhədli verilmiş funksiyaya daha yaxın olur. Buna görə də (5.19) düsturu (5.18) düsturuna nəzərən daha dəqiqdir.

Lakin, (5.19) tənliyi y_{m+1} -ə nəzərən qeyri-xətti olduğundan, təcrübədə y_{m+1} -i tapmaq əlverişli olmur. (5.19) düsturu vasitəsilə (5.18)-dən tapılan y_{m+1} -i dəqiqləşdirmək olar. Bunun üçün (5.18) vasitəsilə y_{m+1} -i tapıb (5.19) düsturunun sağ tərəfində yazsaq yeni aldığımız y_{m+1} əvvəlkinə nisbətən dəqiq olar.

3.Xətanın qiymətləndirilməsi. Əvvəlcə ekstropolyasiya düsturu üçün xətanı qiymətləndirək.

(5.1), (5.2) məsələsinin həllinin x_i nöqtəsindəki dəqiq qiymətini y_i Adams üsulu ilə tapılan təqribi qiymətini isə $\tilde{y}_i$ ilə işarə edək.

Adamsın ekstropolyasiya düsturunu aşağıdakı şəkildə yazsaq

$$\tilde{y}_{m+1} = \tilde{y}_m + h \sum_{i=0}^k \alpha_i \tilde{f}_{m-i},$$

burada

$$\alpha_i = (-1)^i \sum_{\nu=i}^k C_{\nu}^i a_{\nu}, \quad a_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 t(t+1) \dots (t+\nu-1) dt$$

Aşkardır ki,

$$\varepsilon_{m+1} = \tilde{y}_{m+1} - y_{m+1} = \tilde{y}_{m+1} - y_m - \int_{x_m}^{x_{m+1}} f[s, y(s)] ds,$$

$$\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m + h \sum_{i=0}^k \alpha_i (\tilde{f}_{m-i} - f_{m-i}) + l_m, \quad (5.20)$$

$$l_m = h \sum_{i=0}^k \alpha_i f_{m-i} - \int_{x_m}^{x_{m+1}} f[s, y(s)] ds.$$

l_m qalıq həddini qiymətləndirək. Bunun üçün $f[s, y(s)]$ funksiyasını Nyutonun geriye interpolasiya çoxhədli ilə əvəz edək

$$f[s, y(s)] = f_m + f_{m-1/2}^1 t + \dots + f_{m-k/2}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} +$$

$$+ h^{k+1} \frac{t(t+1) \dots (t+k)}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} f[s, y(s)]}{ds^{k+1}} \Big|_{s=\xi}.$$

Onda

$$l_m = -h^{k+2} \int_0^1 \frac{t(t+1) \dots (t+k)}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} f[s, y(s)]}{ds^{k+1}} \Big|_{s=\xi} dt,$$

$$l_m = -h^{k+2} \frac{d^{k+1} f[s, y(s)]}{ds^{k+1}} \Big|_{s=\theta} \int_0^1 \frac{t(t+1) \dots (t+k)}{(k+1)!} dt,$$

$$|l_m| \leq l = h^{k+2} a_{k+1} M_{k+1}, \quad M_{k+1} = \max_x \left| \frac{d^{k+1} f[x, y(x)]}{dx^{k+1}} \right|$$

olduğunu alırıq.

Fərz edək ki, $f(x, y)$ funksiyası y dəyişəninə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir. Lipşits sabitini L ilə işarə edək. Onda (5.20)-dən

$$|\varepsilon_{m+1}| \leq |\varepsilon_m| + hL \sum_{i=0}^k |\alpha_i| |\varepsilon_{m-i}| + l$$

alırıq.

Aşağıdakı fərqlər tənliyinə baxaq:

$$E_{m+1} = E_m + hL \sum_{i=0}^k |\alpha_i| E_{m-i} + l. \quad (5.21)$$

E_m -lər üçün başlangıç qiymətləri elə seçək ki,

$$E_i \geq |\varepsilon_i| \quad (i=0, 1, \dots, k-1)$$

bərabərsizliyi ödənsin. Onda ixtiyari m üçün

$$E_m \geq |\varepsilon_m|. \quad (5.22)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$E_m = cz_*^m - \frac{l}{hLA}, \quad A = \sum_{i=0}^k |\alpha_i|$$

(5.21) fərqlər tənliyinin həllidir. Burada z_* (5.21) fərqlər tənliyinə uyğun xarakteristik tənliyin

$$z^{k+1} - z^k - hL \sum_{i=0}^k |\alpha_i| z^{k-i} = 0,$$

$1 < z_* < 1 + hLA$ şərtini ödəyən köküdür.

c parametrini elə seçək ki,

$$E_i \leq \varepsilon = \max_{0 \leq i \leq k-1} \varepsilon_i$$

ödənsin. Bunun üçün

$$c = \varepsilon + \frac{l}{hLA}$$

seçmək kifayətdir.

Beləliklə,

$$E_m = \varepsilon z_*^m + \frac{l}{hLA} (z_*^m - 1).$$

E_m -in bu qiymətini (5.22)-də nəzərə alsaq

$$|\tilde{y}_m - y_m| \leq \varepsilon z_*^k + \frac{l}{hLA} (z_*^k - 1),$$

$$|\tilde{y}_m - y_m| \leq \varepsilon (1 + hLA)^m + \frac{l}{hLA} [(1 + hLA)^m - 1]$$

olar.

$$h = \frac{x_m - x_0}{m} \text{ olduğunu və}$$

$$\left(1 + \frac{\alpha}{l}\right)^i < e^\alpha$$

bərabərsizliyini nəzərə alsaq

$$|\tilde{y}_m - y_m| \leq \varepsilon e^{AL(x_m - x_0)} + \frac{l}{hLA} [e^{AL(x_m - x_0)} - 1]$$

olduğunu alırıq.

Nəhayət, Adams düsturunun (ekstropolyasiya) xətası

$$|\tilde{y}_m - y_m| \leq \varepsilon e^{AL(x_m - x_0)} + \frac{a_{k+1} M_{k+1}}{LA} [e^{AL(x_m - x_0)} - 1] h^{k+1}$$

düsturu ilə qiymətləndirilir.

Qeyd edək ki, eyni qayda ilə Adamsın interpolasiya düsturunun xətasını da qiymətləndirmək olar.

§ 4. Ştyörmer üsulu

İndi isə ikitərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Məlumdur ki, (5.23) məsələsini iki birtərtibli diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə gətirmək olar və bu məsələ üçün Adams düsturlarını asanlıqla yazmaq olar. Lakin (5.23) məsələsini sistemə gətirməyib bilavasitə həll etdikdə hesablama üçün daha sadə düstur almaq olur.

Adams üsulu ilə (5.1), (5.2) məsələsini həll etdikdə tətbiq etdiyimiz sxemi (5.23) məsələsinin də həllinə tətbiq edək.

Fərz edək ki, $y(x)$ və $y'(x)$ funksiyalarının $x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-k}$ nöqtələrində təqribi qiymətləri hər hansı bir üsulla, məsələn, adi iterasiya üsulu ilə tapılmışdır. $f_m, f_{m-1}, \dots, f_{m-k}$ qiymətlərinə görə Nyutonun geriye interpolasiya düsturunu yazaq:

$$f(x_m + ih) = f_m + f_{m-\frac{1}{2}}^1 t + f_{m-1}^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + f_{m-\frac{k}{2}}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!}.$$

Bu düsturu (5.23)-də nəzərə alıb, hər tərəfi $[0, \xi]$ ($-1 \leq \xi \leq 1$) parçasında t -ə nəzərən inteqrallasaq

$$\begin{aligned} y'(x_m + \xi h) &= y'_m + h \int_0^\xi \left[f_m + f_{m-\frac{1}{2}}^1 t + f_{m-1}^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f_{m-\frac{k}{2}}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \right] dt. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Burada $\xi = 1$ qəbul etsək,

$$y'_{m+1} = y'_m + h(\alpha_0 f_m + \alpha_1 f_{m-\frac{1}{2}}^1 + \alpha_2 f_{m-1}^2 + \dots + \alpha_k f_{m-\frac{k}{2}}^k) \quad (5.25)$$

olduğunu alırıq. Burada α_i -lər Adamsın ekstrapolyasiya düsturundakı əmsallardır.

(5.24) düsturunu $[0, 1]$ parçasında ξ -ə nəzərən inteqrallasaq

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h y'_m + h^2 \int_0^1 d\xi \int_0^\xi \left[f_{m-\frac{1}{2}}^1 t + f_{m-1}^2 \frac{t(t+1)}{2!} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f_{m-\frac{k}{2}}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \right] dt, \end{aligned}$$

$$y_{m+1} = y_m + h y'_m + h^2 (\alpha_0 f_m + \alpha_1 f_{m-\frac{1}{2}}^1 + \alpha_2 f_{m-1}^2 + \dots + \alpha_k f_{m-\frac{k}{2}}^k), \quad (5.26)$$

$$\alpha_i = \int_0^1 d\xi \int_0^\xi \frac{t(t+1) \dots (t+i-1)}{i!} dt$$

olduğunu almış olarıq.

(5.25) və (5.26) düsturları vasitəsilə y_{m+1} və y'_{m+1} ədədlərini tapdıqdan sonra, interpolasiya çoxhədlisini $f_{m+1}, f_m, \dots, f_{m-k}$ qiymətlərinə görə qurub, y_{m+2} və y'_{m+2} ədədlərini tapmaq üçün düsturlar alırıq. Bu prosesi davam etdirməklə $y(x)$ və $y'(x)$ funksiyalarının ixtiyari nöqtədə qiymətlərini tapmış olarıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, bu üsulla hər dəfə $y'(x)$ funksiyasının qiymətlərini hesablamaq zərurəti (5.23) diferensial tənliyin sağ tərəfində $y'(x)$ -in olması ilə əlaqədardır. Əgər, xüsusi halda,

$$f(x, y, y') \equiv f(x, y)$$

olarsa, onda hesablamanı aparmaq üçün (5.25) düsturuna ehtiyac qalmır, yəni $y'(x)$ funksiyasının qiymətlərini hesablamaq lazım deyil. Bu halda (5.26) düsturunda y'_m -i yox etməklə yalnız $y(x)$ funksiyasının qiymətləri hesablanır.

(5.26) düsturunda y'_m -i yox etmək üçün (5.24) düsturunun hər tərəfini $[-1, 0]$ parçasında ξ -ə nəzərən inteqrallayaraq

$$\begin{aligned} y_m &= y_{m-1} + h y'_{m-1} + h^2 \int_{-1}^0 d\xi \int_0^\xi \left[f_m + f_{m-\frac{1}{2}}^1 t + f_{m-1}^2 \frac{t(t+1)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + f_{m-\frac{k}{2}}^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \right] dt, \\ y_m &= y_{m-1} + h y'_m (\beta_0 f_m + \beta_1 f_{m-\frac{1}{2}}^1 + \beta_2 f_{m-1}^2 + \dots + \beta_k f_{m-\frac{k}{2}}^k), \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\beta_i = \int_{-1}^0 d\xi \int_0^\xi \frac{t(t+1) \dots (t+i-1)}{i!} dt.$$

(5.26) bərabərliyindən (5.27) çıxsaq:

$$y_{m+1} = 2y_m - y_{m-1} + h^2 (\gamma_0 f_m + \gamma_1 f_{m-\frac{1}{2}}^1 + \gamma_2 f_{m-1}^2 + \dots + \gamma_k f_{m-\frac{k}{2}}^k)$$

olduğunu alırıq. Burada

$$\gamma_i = \alpha_i - \beta_i = \int_0^1 d\xi \int_0^\xi \frac{t(t+1)\cdots(t+i-1)}{i!} dt - \\ - \int_{-1}^0 d\xi \int_0^\xi \frac{t(t+1)\cdots(t+i-1)}{i!} dt = \frac{1}{i!} \int_0^1 d\xi \int_{-1}^\xi t(t+1)\cdots(t+i-1) dt.$$

γ_i əmsallarını hesablasaq:

$$y_{m+1} = 2y_m - y_{m-1} + \frac{h^2}{12} \left(f_{m-1}^2 + f_{m-1/2}^3 + \frac{19}{20} f_{m-2}^4 + \right. \\ \left. + \frac{9}{10} f_{m-5/2}^5 + \frac{863}{1008} f_{m-3}^6 + \cdots \right) \quad (5.28)$$

düsturunu almış olarıq. Bu düstur vasitəsilə (5.23) məsələsinin $(f(x, y, y') \equiv f(x, y))$ olduqda həllini ixtiyari nöqtədə tapmaq olar. (5.28) düsturuna Ştyörmer düsturu deyirlər.

Ştyörmer üsulu da Adams üsulu kimi fərqlər üsuludur.

§5. Sonlu-fərqlər üsulu

(5.1), (5.2) məsələsinin ədədi həlli üçün ən çox tətbiq edilən və kifayət qədər ümumi olan sxemlərdən biri

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} y_{j-i} = h \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{j-i}, y_{j-i}) \quad (5.29)$$

düsturu ilə təyin olunur. Buna sonlu-fərqlər üsulu və ya sonlu -fərqlər sxemi deyirlər. (5.29)-a çoxaddımlı sxem də deyirlər.

Əgər $a_0 \neq 0$, $b_0 = 0$ olarsa, onda (5.29) düsturuna aşkar və ya ekstrapolyasiya, $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$ olduqda isə qeyri-aşkar və ya interpoliyasiya düsturları deyirlər. Biz fərz edəcəyik ki, $a_0 = 0$. Nəhayət, qeyd edək ki, a_{-i} və b_{-i} -ni müxtəlif qayda ilə seçməklə, (5.29) düsturundan müxtəlif düsturlar almaq olar. Məsələn,

$$a_{-1} = 1, \quad a_{-2} = -1, \quad a_{-i} = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, k)$$

götürsək, Adams düsturunu almış olarıq.

(5.1), (5.2) məsələsini (5.29) sxemi ilə approksimasiya etdikdə buraxılan xəta

$$r_j = \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y(x_{j-i})}{h} - \sum_{i=0}^k b_{-i} f[x_{j-i}, y(x_{j-i})]$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada $y(x_j)$ dəqiq həllin x_j nöqtəsində

qiymətidir.

Əgər

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{x_0 \leq x_j \leq x_0 + X} |r_j| = 0$$

isə onda deyirlər ki, (5.29) sxemi (5.1), (5.2) məsələsini approksimasiya edir.

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} \lambda^{k-i} = 0 \quad (5.30)$$

tənliyinə (5.29) fərqlər sxeminin xarakteristik tənliyi deyirlər.

İndi isə sonlu fərqlər üsulunun xətasını hesablayaq.

Fərz edək ki, (5.30) tənliyinin köklərini hamısı vahid radiuslu dairəyə daxildir və bu dairənin sərhədində təkrar köklər yoxdur.

Bundan başqa, fərz edək ki,

$$|f'_y(x, y)| \leq L(x_0 \leq x \leq x_0 + X).$$

Nəhayət, h addımını elə seçək ki,

$$|hb_0 L| \leq \frac{|a_0|}{2}$$

olsun. Onda aşkardır ki,

$$|a_0 - hb_0 l_j| \geq \frac{|a_0|}{2},$$

burada

$$l_j = f'_y(x_j, \xi_j)$$

ξ_j ədədi y_j ilə $y(x_j)$ arasında yerləşir. $\varepsilon_j = y_j - y(x_j)$ işarələməsini aparsaq xəta üçün aşağıdakı fərqlər sxemini almış olarıq:

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} \xi_{j-i} = h \sum_{i=0}^k b_{-i} b_{j-i} + h r_j.$$

Buradan

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^k \frac{-a_{-i} + hb_{-i} l_{j-i}}{a_0 - hb_0 l_j} \varepsilon_{j-i} + \frac{h r_j}{a_0 - hb_0 l_j}. \quad (5.31)$$

Aşağıdakı işarələməni aparsaq:

$$\frac{-a_{-i} + hb_{-i} l_{j-i}}{a_0 - hb_0 l_j} - \frac{-a_{-i}}{a_0} = h v_{ij},$$

onda

$$v_{ij} = \frac{b_{-i}a_0l_j - a_{-i}b_0l_j}{(a_0 - hb_0l_j)a_0}, \quad |v_{ij}| \leq 2 \frac{|b_{-i}a_0| + |a_{-i}b_0|}{|a_0|^2} L$$

olduğunu alırıq.

$Z_j = (\varepsilon_{j-i})_{i=0, k-1}$ sütun vektorunu götürsək, (5.31)-i aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$Z_j = AZ_{j-1} + V_j Z_{j-1} + W_j, \quad (5.32)$$

burada

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a_{-1}}{a_0} & -\frac{a_{-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_{-(k-1)}}{a_0} & -\frac{a_{-k}}{a_0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_j = \begin{pmatrix} v_{1j} & \dots & v_{kj} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} \frac{hr_j}{a_0 - hb_0l_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matrisinin xarakteristik çoxhədlisini hesablasaq:

$$|A - \lambda I| = \frac{(-1)^k}{a_0} \sum_{i=0}^k a_{-i} \lambda^i$$

olduğunu alırıq. Bu o deməkdir ki, A matrisinin xarakteristik çoxhədlisi (5.29) fərqlər sxeminin xarakteristik çoxhədlisindən sabit vuruqla fərqlənir. Onda şərtə görə, A matrisinin xarakteristik tənliyinin kökləri vahid radiuslu dairəyə daxildir və dairənin sərhəddində təkrar kök yoxdur. Onda xətti cəbr kursundan məlum fakta əsasən elə C matrisi var ki, $D = C^{-1}AC$ və $\|D\| \leq 1$.

(5.32)-də $Z_j = Cz_j$ əvəzləməsini aparsaq:

$$z_j = Dz_{j-1} + hv_j z_{j-1} + \omega_j \quad (5.33)$$

olduğunu alırıq. Burada

$$v_j = C^{-1}V_jC, \omega_j = C^{-1}W_j.$$

V_j matrisində sıfırdan fərqli ünsürlər ancaq birinci sətirdə olduğundan

$$\|V_j\|_1 \leq \left(2 \sum_{i=1}^k \frac{|b_{-i}a_0| + |a_{-i}b_0|}{a_0} \right) L = \nu L$$

və

$$\|v_j\|_1 \leq \|C^{-1}\|_1 \|V_j\|_1 \|C\|_1 \leq \nu L \|C^{-1}\|_1 \|C\|_1.$$

(5.33)-dən

$$\|z_j\|_1 \leq \beta h |r_j| + (1 + \gamma L h) \|z_{j-1}\|_1,$$

burada

$$\beta = 2 \frac{\|C^{-1}\|}{a_0}, \quad \gamma = \nu \|C^{-1}\|_1 \|C\|_1.$$

Bu bərabərsizlikdən $i > k$ üçün

$$\|z_j\|_1 \leq \beta h \sum_{j=k}^i (1 + \gamma L h)^{i-j} |r_j| + (1 + \gamma L h)^{i-k+1} \|z_{k-1}\|_1$$

olduğunu asanlıqla almaq olar. Burada

$$(1 + \gamma L h)^{i-j} \leq \exp[\gamma L h(i-j)] < \exp(\gamma L X)$$

bərabərsizliyindən istifadə etsək:

$$\|z_i\|_1 \leq \exp(\gamma L X) \left(h \beta \sum_{i=k}^i |r_j| + \|z_{k-1}\|_1 \right)$$

olduğunu alırıq. Digər tərəfdən aşkardır ki,

$$|\varepsilon_i| \leq \|Z_i\|_1 \leq \|C\|_1 \|z_i\|_1, \quad \|z_{k-1}\|_1 \leq \|C^{-1}\|_1 \|Z_{k-1}\|_1 = \|C^{-1}\|_1 \max_{0 \leq i < k} |\varepsilon_i|.$$

Ona görə də

$$\|Z_i\| \leq \|C\|_1 \exp(\gamma L X) \left(h \beta \sum_{j=k}^i |r_j| + \|C^{-1}\|_1 \|Z_{k-1}\|_1 \right),$$

$$|\varepsilon_i| \leq \exp(\gamma L X) \left(h \beta \|C\|_1 \sum_{j=k}^i |r_j| + \|C\|_1 \|C^{-1}\|_1 \max_{0 \leq i < k} |\varepsilon_i| \right) \quad (5.34)$$

alırıq.

Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 5.4. Tutaq ki, $f(x, y)$ ($x_0 \leq x \leq x_0 + X$, $|y| \leq R$) funksiyası kəsilməzdir və y dəyişəninin nəzərən kəsilməz törəməsi var. Tutaq ki, (5.30) tənliyinin köklərinin hamısı vahid radiuslu dairədədir və dairənin çevrəsində təkrar köklər yoxdur.

Onda (5.29) fərqlər sxeminin xətası (5.34) düsturu ilə qiymətləndirilir.

§6. Sərhəd məsələsinin fərqlər üsulu ilə həlli

Tutaq ki,

$$y'' = f(x, y) \quad (5.35)$$

tənliyinin elə həllini tapmaq tələb olunur ki, aşağıdakı sərhəd şərtləri ödənsin

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (5.36)$$

Fərz edək ki, bu məsələnin həlli var; bu həllin təqribi qiymətlərini tapaq.

$[a, b]$ parçasını aşağıdakı nöqtələrlə n bərabər hissəyə bölək:

$$x_i = a + ih \quad \left(i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad h = \frac{b-a}{n} \right).$$

Bu nöqtələri düyün nöqtələri adlandırırlar.

(5.35)-də $x = x_j$ qəbul edib, törəmələri sonlu fərqlərlə əvəz etsək və

(5.36) şərtlərindən istifadə etsək $n+1$ məchullu $n+1$ sayda tənliklər sistemini almış oluruq. Bu sistemi həll edərək y_i -ləri tapırıq. Tapdığımız bu qiymətləri uyğun olaraq $y(x_i)$ -lərin təqribi qiymətləri kimi götürürük.

Bu sxemi tətbiq etdikdə aşağıdakı məsələləri həll etmək lazım gəlir.

1) Verilmiş tənliyə daxil olan törəmələri elə sonlu fərqlərlə əvəz etmək lazımdır ki, xəta kafi qədər kiçik olsun;

2) Alınan tənliklər sisteminin həllinin varlığı və yeganəliyini isbat etmək və bu həlli tapmaq yolları;

3) Üsulun xətasını qiymətləndirmək;

4) Hesablama xətasını nəzərə almaq.

1. Xətti məsələ. Aşağıdakı xətti sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} y'' - q(x)y &= f(x), \\ y(a) &= y_a, \quad y(b) = y_b. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Burada $q(x) \geq 0$, $f(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməz funksiyalardır.

Bu məsələni

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i &= f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ y_0 &= y_a, \quad y_n = y_b \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

xətti cəbri tənliklər sistemi ilə əvəz edək.

Aşağıdakı işarələməni aparaq:

$$l(y_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i.$$

Əvvəlcə aşağıdakı köməkçi lemmaları isbat edək:

Lemma 5.1. Əgər hamısı eyni bir ədədə bərabər olmayan, ixtiyari $y_0, y_1, \dots, y_n$ ədədləri $l(y_i) \geq 0$ bərabərsizliyini ödəyirlərsə (ixtiyari i üçün), onda bu y_i -lərin içərisində ən böyük müsbət ədəd y_0 və ya y_n olacaq.

İsbatı. Tərsini fərz edək. Tutaq ki, $0 < k < n$ və $y_k = M$ (M – müsbət y_i ($i = 0, 1, \dots, n$)-lərdən ən böyüyüdür). Onda, aşkardır ki, y_{k-1} və y_{k+1} ədədlərindən heç olmasa biri M -dən kiçik olar. Fərziyyəmizə görə,

$$\begin{aligned} l(y_k) &= \frac{y_{k+1} - 2M + y_{k-1}}{h^2} - q_k M < \\ &< \frac{M - 2M + M}{h^2} - q_k M = -q_k M, \quad l(y_k) < 0 \end{aligned}$$

olduğunu alırıq ki, bu da lemmanın şərtinə ziddir. Bu ziddiyət lemmayı isbat edir.

Eyni qayda ilə aşağıdakı lemma da isbat olunur.

Lemma 5.2. Əgər, hamısı eyni bir ədədə bərabər olmayan ixtiyari $y_0, y_1, \dots, y_n$ ədədləri $l(y_i) \leq 0$ bərabərsizliyini ödəyirlərsə (ixtiyari i üçün), onda bu y_i -lərin içərisində ən kiçik mənfi ədəd y_0 və ya y_n olacaq.

Lemma 5.3. Əgər, hamısı eyni bir ədədə bərabər olmayan ixtiyari $y_0, y_1, \dots, y_n$ və $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ ədədləri

$$|l(y_i)| \leq -l(Y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

və

$$|y_0| \leq Y_0, \quad |y_n| \leq Y_n$$

bərabərsizliklərini ödəyirlərsə, onda ixtiyari i üçün

$$|y_i| \leq Y_i$$

bərabərsizliyi də doğru olar.

İsbatı. Şərtə görə

$$l(y_i - Y_i) \geq 0, \quad y_0 - Y_0 \leq 0, \quad y_n - Y_n \leq 0 \quad (5.39)$$

və

$$l(y_i + Y_i) \leq 0, \quad y_0 + Y_0 \geq 0, \quad y_n + Y_n \geq 0. \quad (5.40)$$

(5.39) bərabərsizliklərini nəzərə alıb, lemma 5.1-dən istifadə etsək, ixtiyari i üçün

$$y_i - Y_i \leq 0$$

olduğunu alırıq. (5.40) bərabərsizliklərinə lemma 5.2-ni tətbiq etdikdə isə

$$y_i + Y_i \geq 0$$

olduğu alınır.

Bu iki axırıncı bərabərsizliklərdən lemmanın hökmünü alırıq.

İndi isə (5.37) məsələsinin ədədi həll etmək üçün qurduğumuz (5.38) tənliklər sistemini tədqiq edək.

Əvvəlcə isbat edək ki, (5.38) sisteminin yeganə həlli var. Cəbr kursundan məlumdur ki, bircinsli olmayan xətti cəbri tənliklər sisteminin yeganə həllinin olması üçün, bu sistemə uyğun bircinsli sistemin ancaq sıfır həllinin olmasıdır. Deməli, (5.38) sisteminin yeganə həllinin varlığı üçün

$$l(y_i) = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_n = 0 \quad (5.41)$$

bircins sisteminin ancaq sıfır həlli olmalıdır.

Bu axırıncı fakt isə lemma 5.1 və lemma 5.2-dən alınır. Doğrudan da, tutaq ki, (5.41) sisteminin sıfırdan fərqli həlli var. Bu həllin $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ sıfırdan fərqli komponentləri içərisində müsbətlərinin ən böyüyü və mənfilərinin ən kiçiyi $y_0 = y_n = 0$ olmalıdır (lemma 5.1 və lemma 5.2-ə əsasən). Bu da o deməkdir ki, (5.41) sisteminin sıfırdan fərqli həlli ola bilməz.

(5.38) sisteminin həllini tapmaq üçün qovma üsulunu tətbiq edək. Tutaq ki,

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

münasibəti doğrudur və $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ parametrlərini tapmaq üçün (5.38)-də

$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ ($\alpha_1 = 0, \beta_1 = y_\alpha$) götürək. Onda

$$\begin{aligned} y_{i+1} - (2 + h^2 q_i - \alpha_i) y_i &= h^2 f_i - \beta_i, \\ y_i &= \frac{1}{2 + h^2 q_i - \alpha_i} y_{i+1} + \frac{\beta_i - h^2 f_i}{2 + h^2 q_i - \alpha_i}. \end{aligned}$$

Bu eyniliyi $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ ilə müqayisə etsək:

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{2 + h^2 q_i - \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{\beta_i - h^2 f_i}{2 + h^2 q_i - \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə, (5.38) sisteminin həllini aşağıdakı düsturlar vasitəsilə

tapmaq olar:

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{2+h^2q_i - \alpha_i}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_{i+1} = \frac{\beta_i - h^2f_i}{2+h^2q_i - \alpha_i}, \quad \beta_1 = y_\alpha \quad (i=1,2,\dots,n-1),$$

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad y_n = y_\beta \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1, 0)$$

Məlumdur ki, n -nin böyük qiymətlərində (5.38) sisteminin dəqiq həllini həmişə tapmaq mümkün olmur. Ona görə də bu sistemin təqribi həllini tapmaq üçün dərsliyin ikinci hissəsində verilən təqribi üsullardan istifadə etmək lazımdır. Məsələn, əgər $q > 0$ olduğunu qəbul etsək, adi iterasiya və ya Zeydel üsullarının yığılması üçün kafi şərtlərin ödəndiyini asanlıqla göstərmək olar. Doğrudan da (5.38) sistemini

$$y = By + c$$

şəklində yazsaq:

$$\|B\|_1 = \max_i \frac{2}{2+h^2q_i} < 1.$$

(5.38) sisteminin həllini $(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ ($\tilde{y}_0 = y_0$, $\tilde{y}_n = y_n$), (5.37) məsələsinin dəqiq həllinin düyün nöqtələrində qiymətlərini isə $y_0, y_1, \dots, y_n$ ilə işarə edək. Bu qiymətləri həmişə tapmaq mümkün olmadığından $y_i \approx \tilde{y}_i$ götürəcəyik.

Bu qayda ilə (5.37) məsələsinin təqribi həllinin tapılmasına sonlu fərqlər üsulu deyirlər.

İndi bu üsulun xətasını hesablayaq.

$$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i$$

işarələməsini aparaq və $|\varepsilon_i|$ -ni qiymətləndirək.

ε_i üçün xəta tənliklər sistemini quraq. Aydındır ki,

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i &= f_i + r_i \quad (i=1,2,\dots,n-1), \\ y_0 &= y_a, \quad y_n = y_b, \\ \frac{\tilde{y}_{i+1} - 2\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i-1}}{h^2} - q_i \tilde{y}_i &= f_i \quad (i=1,2,\dots,n-1), \\ \tilde{y}_0 &= y_a, \quad \tilde{y}_n = y_b, \end{aligned} \right\}$$

Onda

$$\left. \begin{aligned} l(\varepsilon_i) &\equiv \frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{h^2} - q_i \varepsilon_i = r_i \quad (i=1,2,\dots,n-1), \\ \varepsilon_0 &= 0, \quad \varepsilon_n = 0. \end{aligned} \right\}$$

Burada qalıq həddi r_i aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$r_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y''(x_i), \quad |r_i| \leq r = \frac{h^2}{12} M_4, \quad M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |y^{(4)}(x)|.$$

Aşağıdakı kimi köməkçi xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} l(\eta_i) &\equiv \frac{\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}}{h^2} - q_i \eta_i = -r \quad (i=1,2,\dots,n-1), \\ \eta_0 &= \eta_n = 0. \end{aligned} \right\}$$

Aşkardır ki,

$$\left. \begin{aligned} |l(\varepsilon_i)| &= |r_i| \leq r = -l(\eta_i), \quad |l(\varepsilon_i)| \leq -l(\eta_i) \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\ \varepsilon_0 &= \eta_0, \quad \varepsilon_n = \eta_n. \end{aligned} \right\}$$

Lemma 5.3-ü tətbiq etsək:

$$|\varepsilon_i| \leq \eta_i \quad (i=0,1,2,\dots,n)$$

olduğunu alırıq.

Daha bir köməkçi xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma_{i+1} - 2\gamma_i + \gamma_{i-1}}{h^2} &= -r \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\ \gamma_0 &= \gamma_n = 0. \end{aligned} \right\}$$

Aşkardır ki, bu sistemin həlli

$$\gamma_i = \frac{r}{2}(x_i - a)(b - x_i) \quad (i=0,1,2,\dots,n)$$

şəklində olar və

$$\gamma_i \leq \frac{M_4(b-a)^2}{96} h^2.$$

Digər tərəfdən

$$|l(\eta_i)| = r = -\frac{\gamma_{i+1} - 2\gamma_i + \gamma_{i-1}}{h^2} = -l(\gamma_i) - q_i \gamma_i \leq -l(\gamma_i)$$

olduğundan, lemma 5.3-ə əsasən

$$|\eta_i| \leq \gamma_i.$$

Deməli,

$$|\varepsilon_i| \leq \gamma_i \leq \frac{M_4(b-a)^2}{96} h^2. \quad (5.42)$$

Beləliklə, isbat etdik ki, əgər (5.37) məsələsinin dördüncü tərtibdən kəsilməz törəməsi varsa, onda

$$\lim_{h \rightarrow 0} (y_i - \bar{y}_i) = 0$$

olur və xəta (5.42) düsturu ilə qiymətləndirilir.

Qeyd edək ki, əgər $q(x)$ və $f(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında hissə-hissə kəsilməz funksiyaladırsa, onda $y''(x)$ də hissə-hissə kəsilməz funksiya olar. Onda kəsilmə nöqtəsində $y''(x)$ funksiyasını sonlu fərqlərlə əvəz etmək olmaz. Bu halda ya kəsilmə nöqtəsində əlavə şərtlər verib approksimasiya aparmaq lazımdır, ya da elə xüsusi fərqlər sxemi seçmək lazımdır ki, məxsusi nöqtələrdə də mənası olsun. Belə xüsusi fərqlər sxeminə ədəbiyyatda konservativ sxemlər deyirlər [8]. Belə sxemlərdən biri sonrakı paraqrafda veriləcək dəqiq fərqlər sxemidir.

2. Qeyri-xətti məsələ. İndi isə daha ümumi məsələyə, (5.35), (5.36) məsələsinə baxaq. Bu məsələni aşağıdakı tənliklər sistemi ilə approksimasiya edək:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} &= f(x_i, y_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \\ y_0 &= y_a, \quad y_n = y_b. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Bu sistem $n+1$ məchullu $n+1$ sayda qeyri-xətti tənliklər sistemidir. Bu sistemi dərsliyin II hissəsində verilmiş təqribi üsulların biri ilə həll etmək olar. Bu sistemin həllini (5.35), (5.36) məsələsinin dəqiq həllinin düyün nöqtələrindəki qiymətlərinin təqribi qiymətləri kimi götürmək olar.

Aşağıdakı kimi diskret funksiya baxaq:

$$g_{ki} = \begin{cases} \frac{k(i-n)}{n} & k \leq i \quad (k=1, 2, \dots, n-1; i=0, 1, \dots, n), \\ \frac{i(-n)}{n} & k \geq i. \end{cases}$$

Aşkardır ki, bu funksiya simmetrikdir, yəni

$$g_{k,i+1} - 2g_{k,i} + g_{k,i-1} = \begin{cases} 0 & (k \neq i) \\ 1 & (k = i) \end{cases} \quad (k, i=1, 2, \dots, n-1) \quad (5.44)$$

və

$$h^2 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ki}| \leq \frac{(b-a)^2}{8}. \quad (5.45)$$

g_{ki} funksiyasının (5.44) xassəsindən istifadə etsək:

$$z_i = h^2 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ki} f_k$$

funksiyasının

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} &= f_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \\ z_0 &= z_n = 0 \end{aligned} \right\}$$

fərqlər sisteminin həlli olduğunu yoxlamaq asandır.

Onda aydındır ki,

$$y_i = y_a + \frac{i}{n}(y_b - y_a) + h^2 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ki} f_k$$

funksiyası

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} &= f_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \\ y_0 &= y_a, \quad y_n = y_b \end{aligned} \right\}$$

fərqlər sistemini ödəyir.

Bu faktdan istifadə etsək (5.43) sistemini aşağıdakı sistemə gətirmiş oluruq:

$$y_i = y_a + \frac{i}{n}(y_b - y_a) + h^2 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ki} f(x_k, y_k). \quad (5.46)$$

İndi üsulun xətasını qiymətləndirək.

$\tilde{y}_i$ ilə (5.43) və ya (5.46) sisteminin həllini, yəni (5.35), (5.36) məsələsinin x_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) nöqtələrində təqribi həllini, y_i ilə (5.35), (5.36) məsələsinin x_i nöqtələrində dəqiq həllini işarə edək.

$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i$ xətasını qiymətləndirək. Xəta tənliyi aşağıdakı şəkildə olar:

$$\frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{h^2} = f(x_i, y_i) - f(x_i, \tilde{y}_i) + r_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Burada

$$|r_i| \leq r = \frac{h^2}{6} M_3, \quad M_3 = \max_x |y^{(3)}(x)|.$$

(5.46) düsturundan istifadə etsək:

$$\varepsilon_i = h^2 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ki} [f(x_k, y_k) - f(x_k, \tilde{y}_k)] + h^2 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ki} r_k$$

olduğunu alırıq.

Fərz edək ki, $f(x, y)$ funksiyası y dəyişəninə nəzərən Lipsits şərtini ödəyir:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|.$$

Onda

$$|\varepsilon_i| \leq L h^2 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ki}| |\varepsilon_k| + h^2 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ki}| |r_k|,$$

$$|\varepsilon_i| \leq L \left(h^2 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ki}| \right) \max_i |\varepsilon_i| + r \left(h^2 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ki}| \right).$$

(5.46) bərabərliyindən istifadə etsək:

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{L(b-a)^2}{8} (\max_i |\varepsilon_i|) + \frac{(b-a)^2}{8} r$$

alırıq.

Fərz edək ki,

$$L(b-a)^2 < 8.$$

Onda

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{(b-a)^2 M_3}{6[8-L(b-a)^2]} h^2, \quad |y - \tilde{y}_i| \leq ch^2, \quad c = \frac{(b-a)^2 M_3}{6[8-L(b-a)^2]}.$$

§7. Xətti sərhəd məsələsinin dəqiq fərqlər sxemi ilə həlli

Yenə də (5.37) xətti sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y'' - q(x)y = f(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (5.47)$$

burada $q(x) \geq 0$, $f(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında hissə-hissə kəsilməz funksiyalardır.

$$V_1^i(x), V_2^i(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}, x_i = x_0 + ih, \\ (i = 1, 2, \dots, n; x_0 = a, x_n = b))$$

ilə uyğun olaraq aşağıdakı məsələlərin həllini işarə edək:

$$\frac{d^2 V_1^i}{dx^2} = q(x) V_1^i, \quad V_1^i(x_{i-1}) = 0, \quad \frac{dV_1^i(x_{i-1})}{dx} = 1,$$

$$\frac{d^2 V_2^i}{dx^2} = q(x) V_2^i, \quad V_2^i(x_{i+1}) = 0, \quad \frac{dV_2^i(x_{i+1})}{dx} = -1.$$

Aşkındır ki, $V_1^i(x) > 0$ ($x_{i-1} < x < x_{i+1}$) monoton artır. $V_2^i(x) > 0$ ($x_{i-1} < x < x_{i+1}$) isə monoton azalır və

$$V_1^i(x_{i+1}) = V_2^i(x_{i-1}), \quad V_2^i(x_i) = V_1^{i+1}(x_{i+1}).$$

Aşağıdakı kimi köməkçi operatorlara baxaq:

$$T_i u \equiv \frac{1}{h V_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} V_2^i(x) u(x) dx + \frac{1}{h V_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^i(x) u(x) dx.$$

İsbat edək ki,

$$\bar{q}_i \equiv T_i(q) = -\frac{1}{h} \left[\frac{1 - \frac{dV_1^i(x_i)}{dx}}{V_1^i(x_i)} + \frac{1 + \frac{dV_2^i(x_i)}{dx}}{V_2^i(x_i)} \right], \quad (5.48)$$

$$T_i[y'' - q(x)y] = \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{V_2^i(x_i)} - \frac{y_i - y_{i-1}}{V_1^i(x_i)} \right] - \bar{q}_i y_i. \quad (5.49)$$

Əvvəlcə (5.48)-i isbat edək:

$$T_i(q) = \frac{1}{h V_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^i(x) q(x) dx + \frac{1}{h V_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^i(x) q(x) dx =$$

$$= \frac{1}{h V_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2 V_1^i(x)}{dx^2} dx + \frac{1}{h V_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 V_2^i(x)}{dx^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{h V_1^i(x_i)} \left[1 - \frac{dV_1^i(x_i)}{dx} \right] - \frac{1}{h V_2^i(x_i)} \left[1 + \frac{dV_2^i(x_i)}{dx} \right],$$

bu da (5.48) bərabərliyidir.

İndi isə (5.49) bərabərliyini isbat edək:

$$T_i \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{1}{h V_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^i(x) \frac{d^2 y}{dx^2} dx +$$

$$+ \frac{1}{h V_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^i(x) \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \frac{1}{h V_1^i(x_i)} V_1^i(x_i) \frac{dy(x_i)}{dx} -$$

$$- \frac{1}{h V_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dy}{dx} \frac{dV_1^i}{dx} dx - \frac{1}{h V_2^i(x_i)} V_2^i(x_i) \frac{dy(x_i)}{dx} -$$

$$- \frac{1}{h V_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dV_2^i}{dx} \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{h} \frac{dy(x_i)}{dx} -$$

$$- \frac{1}{h V_1^i(x_i)} \left[y \frac{dV_1^i}{dx} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} y \frac{d^2 V_1^i}{dx^2} dx - \frac{1}{h} \frac{dy(x_i)}{dx} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{hV_2^i(x_i)} \left[y \frac{dV_2^i}{dx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} y \frac{d^2V_2^i}{dx^2} dx \right] = -\frac{1}{hV_1^i(x_i)} y(x_i) \times \\
& \quad \times \frac{dV_1^i(x_i)}{dx} + \frac{1}{hV_1^i(x_i)} y(x_{i-1}) \frac{dV_1^i(x_{i-1})}{dx} + \\
& + \frac{1}{hV_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) q(x) V_1^i(x) dx - \frac{1}{hV_2^i(x_i)} y(x_{i+1}) \frac{dV_2^i(x_{i+1})}{dx} + \\
& + \frac{1}{hV_2^i(x_i)} y(x_i) \frac{dV_2^i(x_i)}{dx} + \frac{1}{hV_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x) q(x) V_2^i(x) dx = \\
& = -\frac{y_i}{hV_1^i(x_i)} \frac{dV_1^i(x_i)}{dx} + \frac{y_{i-1}}{hV_1^i(x_i)} + \frac{y_{i+1}}{hV_2^i(x_i)} + \\
& + \frac{y_i}{hV_2^i(x_i)} \frac{dV_2^i(x_i)}{dx} + \frac{1}{hV_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^i(x) [q(x)y(x)] dx + \\
& + \frac{1}{hV_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^i(x) [q(x)y(x)] dx = \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{V_2^i(x_i)} - \right. \\
& \left. - \frac{y_i - y_{i+1}}{V_1^i(x_i)} \right] + \frac{y_i}{hV_2^i(x_i)} \left[1 + \frac{dV_2^i(x_i)}{dx} \right] + \frac{y_i}{hV_1^i(x_i)} \left[1 - \frac{dV_1^i(x_i)}{dx} \right] + \\
& + T_i(qy) = \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{V_2^i(x_i)} - \frac{y_i - y_{i-1}}{V_1^i(x_i)} \right] - T_i(q)y_i + T_i(qy).
\end{aligned}$$

Burda (5.49) bərabərliyini alırıq.

Əgər (5.49) düsturunda $y(x)$ funksiyasını (5.47) məsələsinin həlli kimi qəbul etsək:

$$\frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{V_2^i(x_i)} - \frac{y_i - y_{i-1}}{V_1^i(x_i)} \right] = \bar{q}_i y_i + \bar{f}_i \quad (5.50)$$

olduğunu alırıq. Burada $\bar{f}_i = T_i f$. Bu da dəqiq fərqlər sxemidir.

(5.50) fərqlər sxemindən görünür ki, bu sistemi həll etmək üçün $V_1^i(x)$ və $V_2^i(x)$ funksiyalarını təyin etmək lazımdır. Bu funksiyaları həmişə tapmaq mümkün olmadığından onların təqribi qiymətlərini tapmaq.

$x = x_i + sh$ qəbul etsək, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ parçası $[-1, 1]$ parçasına, x_i isə

$s = 0$ nöqtəsinə çevrilir.

$$V_1^i(x) = V_1^i(x_i + sh) = h\alpha^i(s, h),$$

$$V_2^i(x) = V_2^i(x_i + sh) = h\beta^i(s, h)$$

işarələməsini aparaq.

$$\frac{1}{V_1^i} = K_i$$

işarələməsini aparsaq:

$$K_{i+1} = \frac{1}{V_2^i(x_i)}.$$

(V_1^i, V_2^i funksiyalarının xassələrinə əsasən).

Onda (5.50) dəqiq fərqlər sxemi

$$\frac{1}{h} \left(K_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - K_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) = \bar{q}_i y_i + \bar{f}_i$$

şəklini alar. Yaxud

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = \bar{f}_i, \quad (5.51)$$

$$A_i = \frac{K_i}{h^2}, \quad B_i = \frac{K_{i+1}}{h^2}, \quad C_i = \frac{K_i + K_{i+1}}{h^2} + \bar{q}_i.$$

Yuxarıdakı işarələmələri nəzərə alsaq V_1^i, V_2^i funksiyalarını təyin edən tənliklərdən

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\alpha^i}{ds^2} &= h^2 q_i(s) \alpha^i \quad (-1 < \alpha < 1), \\ \alpha^i(-1, h) &= 0, \quad \frac{d\alpha^i(-1, h)}{ds} = -1, \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\beta^i}{ds^2} &= h^2 q_i(s) \beta^i \quad (-1 < s < 1), \\ \beta^i(1, h) &= 0, \quad \frac{d\beta^i(1, h)}{ds} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

olduğunu alırıq. Burada $q_i(s) = q(x_i + sh)$.

(5.52) və (5.53) məsələlərindən görünür ki, $\alpha^i(s, h)$ və $\beta^i(s, h)$ funksiyaları h^2 parametrinə nəzərən analitik funksiyalardır. Ona görə də

$$\alpha^i(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^i(s) h^{2k}, \quad \beta^i(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^i(s) h^{2k}. \quad (5.54)$$

Burada $\alpha_k^i(s)$ və $\beta_k^i(s)$ aşağıdakı rekurent düsturlardan təyin olunur;

$$\alpha_k^i(s) = \int_{-1}^s \int_{-1}^t \alpha_{k-1}^i(\lambda) q_i(\lambda) d\lambda dt, \quad \alpha_0^i(s) = s+1,$$

$$\beta_k^i(s) = \int_0^1 \int_t^1 \beta_{k-1}^i(\lambda) q_i(\lambda) d\lambda dt, \quad \beta_0^i(s) = 1-s.$$

Əgər (5.54)-də sonlu sayda hədlər götürsək:

$$\alpha_m^i(s, h) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^i(s) h^{2k}, \quad \beta_m^i(s, h) = \sum_{k=0}^m \beta_k^i(s) h^{2k}$$

və (5.51)-də α^i və β^i -ni uyğun olaraq, α_m^i və β_m^i ilə əvəz etsək (təbii ki, burada istifadə etdiyimiz bütün düsturlarda)

$$A_i^{(m)} y_{i-1}^{(m)} - C_i^{(m)} y_i^{(m)} + B_i^{(m)} y_{i+1}^{(m)} = \bar{f}_i^{(m)}$$

olduğunu alırıq. Bu sistemin həlli, (5.47) məsələsinin $x_0, x_1, \dots, x_n$ nöqtələrində təqribi qiymətləri kimi götürülür.

İsbat etmək olur ki,

$$y_i - y_i^{(m)} = O(h^{2m+2}).$$

§ 8. Xətti sərhəd məsələsinin başlanğıc məsələlərə gətirilməsi

Yenə də

$$y'' = q(x)y + f(x) \quad (5.55)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (5.56)$$

xətti sərhəd məsələsini nəzərdən keçirək.

Bu paraqrafda sərhəd məsələsinin həllini başlanğıc məsələlərin həllinə gətirilmə qaydaları verilir.

1. (5.55), (5.56) məsələsinin həllini

$$y = cu + v \quad (5.57)$$

şəklində axtaraq. Burada $u = u(x)$ funksiyası

$$u'' = q(x)u$$

tənliyinin sıfırdan fərqli həllidir, $v = v(x)$ isə

$$v'' = q(x)v + f(x)$$

tənliyinin hər hansı bir həllidir. Aşkardır ki, (5.57) düsturu ilə təyin olunan $y(x)$ funksiyası ixtiyari c üçün (5.55), (5.56) məsələsinin həlli olar. İxtiyari c üçün bu $y(x)$ funksiyasının $y(a) = y_a$ şərtini, yəni

$$cu(a) + v(a) = y_a,$$

ödəməsi üçün

$$u(a) = 0, \quad v(a) = y_a$$

şərtləri ödənməlidir.

Aşkardır ki, əgər $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını uyğun olaraq

$$u'' = q(x)u, \quad u(a) = 0, \quad u'(a) = 1 \quad (5.58)$$

və

$$v'' = q(x)v + f(x), \quad v(a) = y_a, \quad v'(a) = 0 \quad (5.59)$$

məsələlərinin həlli kimi götürsək, (5.57) funksiyası ixtiyari c üçün (5.55) tənliyini və $y(a) = y_a$ şərtini ödəyər.

İndi c parametrini elə seçək ki, (5.57) funksiyası $y(b) = y_b$ şərtini də ödəsin:

$$cu(b) + v(b) = y_b, \quad c = \frac{y_b - v(b)}{u(b)}.$$

Burada $u(b) \neq 0$ olduğu fərz olunur.

Beləliklə, (5.55), (5.56) sərhəd məsələsini iki başlanğıc məsələyə - (5.58) və (5.59) - gətirdik. Başlanğıc məsələlərin həlli üçün əvvəlki paraqraflarda verdiyimiz ədədi üsullardan istifadə edib, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının ixtiyari nöqtədə təqribi qiymətlərini tapdıqdan sonra

$$y(x) = \frac{y_b - v(b)}{u(b)} u(x) + v(x)$$

düsturunun köməyi ilə $y(x)$ funksiyasının da təqribi qiymətlərini tapmış olarıq.

$u(b)$ ədədi kiçik olduqda bu üsulu təcrübədə tətbiq etmək səmərəli

olmur. Bu da üsulun əsas nöqsanıdır.

İndi aşağıdakı kimi xüsusi məsələyə baxaq:

$$y'' = q(x)y + f(x), \quad (5.60)$$

$$y'(a) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1, \quad (5.61)$$

$$y'(b) = \beta_0 y(b) + \beta_1. \quad (5.62)$$

Bu məsələnin həlli üçün yuxarıda şərh etdiyimiz üsulu tətbiq etsək, məsələnin həlli

$$\begin{aligned}
y &= cu + v, \\
u'' &= q(x)u, \quad u(a) = 1, \quad u'(a) = \alpha_0, \\
v''' &= q(x)v + f(x), \quad v(a) = 0, \quad v'(a) = \alpha_1, \\
c &= \frac{\beta_1 - v'(b) + \beta_0 v(b)}{u'(b) - \beta_0 u(b)}
\end{aligned}$$

düsturları ilə təyin olunur. Buradan görünür ki, $u'(b) - \beta_0 u(b)$ kafi qədər kiçik olduqda bu üsulu tətbiq etmək əlverişli deyil.

Beləliklə, göstərdik ki, yuxarıda şərh etdiyimiz üsulu, istər (5.55), (5.56) və istərsə də (5.60)-(5.62) məsələsinin həllinə tətbiq etdikdə, uyğun olaraq $u(b)$ və $u'(b) - \beta_0 u(b)$ ədədləri kiçik olduqda, əlverişli olmur. Bu halda başqa bir üsul, qovma üsulunu, tətbiq etmək əlverişli olur.

2. (5.60)-(5.62) məsələsini həll etmək üçün qovma üsulunu tətbiq edək. Elə bir tərtibli xətti diferensial tənlik:

$$y' = \alpha_0(x)y + \alpha_1(x) \quad (5.63)$$

axtararaq ki, $y = cu + v$ bu tənliyin həllər ailəsinə daxil olsun.

(5.63)-də $x = a$ qəbul etsək (5.61) şərtini alırıq.

Onda

$$\alpha_0(a) = \alpha_0, \quad \alpha_1(a) = \alpha_1.$$

$y = cu + v$ funksiyası (5.63) tənliyini ödədiyindən

$$u' \equiv \alpha_0(x)u, \quad v' \equiv \alpha_0(x)v + \alpha_1(x).$$

Birinci eyniliyi diferensiallayıb, $u'' \equiv q(x)u$ eyniliyindən istifadə etsək:

$$\alpha_0'(x) + \alpha_0^2(x) = q(x)$$

olduğunu alırıq. İkinci eyniliyi diferensiallayıb, $v'' \equiv q(x)v + f(x)$ eyniliyindən istifadə etsək:

$$\alpha_1'(x) + \alpha_0(x)\alpha_1(x) = f(x)$$

olduğunu alırıq.

Bu axırıncı bir tərtibli diferensial tənliklər sistemini həll edib $\alpha_0(x)$ və $\alpha_1(x)$ tapdıqdan sonra (5.63)-dən

$$y'(b) = \alpha_0(b)y(b) + \alpha_1(b)$$

olduğunu alırıq ki, bu tənliyi (5.62) ilə birgə həll edib, $y(b)$ və $y'(b)$ -ni tapırıq. Beləliklə (5.60) tənliyini həll etmək üçün sağ ucdə Koşi şərtlərini tapmış oluruq. Bu Koşi məsələsini həll etməklə qoyulmuş sərhəd məsələsini də həll etmiş oluruq. Bu üsula qovma üsulu deyirlər (sərhəd şərti bir ucdən o birisinə qovulur).

Nəhayət, qeyd edək ki, qovma üsulunu (5.55), (5.56) məsələsinə tətbiq etmək əlverişli olmur. Bu halda $\alpha_0(x), \alpha_1(x)$ funksiyalarını tapmaq üçün qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi alırıq.

§9. Operator tənliklər üçün variasiya üsulu

Gələcəkdə diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərini həll etmək üçün əvvəlcə daha ümumi tənliklər-operator tənliklər üçün variasiya üsulunu tətbiq edək.

Tutaq ki, H – həqiqi hilbert fəzasıdır. A ilə, təyin oblastı $H_A \subset H$ olan, xətti operatoru işarə edək. Fərz olunur ki, H_A çoxluğu H fəzasında hər yerdə sıxdır. Əgər ixtiyari $y \in H_A$ üçün

$$(Ay, y) \geq 0, \quad (Ay, y) \geq \gamma^2 \|y\|^2 \quad (\gamma > 0)$$

olarsa, A operatoruna uyğun olaraq müsbət və müsbət-müəyyən operator deyirlər.

Əgər ixtiyari $y, z \in H_A$ üçün

$$(Ay, z) = (y, Az)$$

olarsa, A operatoruna simmetrik operator deyirlər.

Aşağıdakı kimi operator tənliyə baxaq:

$$Ay = f, \quad (5.64)$$

burada $f \in H$ verilmiş element, $y \in H_A$ isə axtarılan elementdir.

Teorem 5.5. Tutaq ki, xətti A operatoru müsbət və simmetrikdir. Onda

$$J(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$$

funksionalına minimum verən ünsür (5.64) tənliyinin həlli olar.

İsbatı. Tutaq ki, $y^* \in H$ ünsürü $J(y)$ funksionalına minimum verir.

İxtiyari $z \in H_A$ və həqiqi λ parametrini götürək. Onda $y^* + \lambda z \in H_A$ və

$$J(y^* + \lambda z) \geq J(y^*)$$

olar. Aşkardır ki,

$$\begin{aligned}
J(y^* + \lambda z) &= (A(y^* + \lambda z), y^* + \lambda z) - 2(f, y^* + \lambda z) = \\
&= (Ay^*, y^*) + \lambda(Ay^*, z) + \lambda(Az, y^*) + \lambda^2(Az, z) - \\
&- 2(f, y^*) - 2\lambda(f, z) = J(y^*) + 2\lambda(Ay^*, z) + \lambda^2(Az, z) - \\
&- 2\lambda(f, z) = J(y^*) + 2\lambda(Ay^* - f, z) - \lambda^2(Az, z),
\end{aligned}$$

$$2\lambda(Ay^* - f, z) - \lambda^2(Az, z) = J(y^* + \lambda z) - J(y^*) \geq 0,$$

$$2\lambda(Ay^* - f, z) - \lambda^2(Az, z) \geq 0.$$

Buradan

$$2(Ay^* - f, z) - \lambda(Az, z) \geq 0 (\lambda > 0),$$

$$2(Ay^* - f, z) - \lambda(Az, z) \leq 0 (\lambda < 0).$$

Birinci bərabərsizlikdə $\lambda \rightarrow 0+$, ikincidə isə $\lambda \rightarrow 0 -$ götürsək, uyğun olaraq

$$(Ay^* - f, z) \geq 0$$

$$(Ay^* - f, z) \leq 0$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$(Ay^* - f, z) = 0.$$

H_A çoxluğu H fəzasında hər yerdə sıx olduğundan

$$Ay^* = f.$$

Teorem isbat olundu.

Bu teorem onu göstərir ki, (5.64) tənliyinin həllini tapmaq üçün, $J(y)$ funksionalına minimum verən elementi tapmaq kifayətdir.

İndi isə $J(y)$ funksionalına minimum verən nöqtənin təqribi qiymətini tapmaq üsulunun ideyasını şərh edək.

H_A -nın elə alt fəzalarını

$$H_A^{(1)} \subset H_A^{(2)} \subset \dots \subset H_A^{(n)} \subset \dots \subset H_A$$

seçək ki, $J(y)$ funksionalına bu alt fəzalarda minimum verən nöqtələri tapmaq asan olsun. $H_A^{(n)}$ -də funksionala minimum verən nöqtəni y_n ilə işarə edək. Bu nöqtə, $J(y)$ funksionalına H_A -da minimum verən nöqtənin təqribi qiyməti kimi götürülür.

Aşkardır ki,

$$J(y_1) \geq J(y_2) \geq \dots \geq J(y_n) \geq \dots \geq m = \min_{H_A} J(y) = J(y^*),$$

buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n) = M \geq m$$

olduğunu alırıq.

$H_A^{(n)}$ alt fəzası elə seçilməlidir ki, $M = m$ olsun. Belə $\{y_n\}$ ardıcılığına funksionalı minimumlaşdıran ardıcılıq deyirlər.

Aydındır ki, funksionalı minimumlaşdıran ardıcılıq y^* -ya yığılmaya da bilər. Aşağıdakı teorem $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$ olması üçün kafi şərtləri verir və bu yığılmanın sürətini də müəyyən edir.

Teorem 5.6. Tutaq ki, xətti A operatoru simmetrik və müsbət müəyyəndir. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$$

və

$$|y_n - y^*| \leq \frac{1}{\gamma} \sqrt{J(y_n) - J(y^*)}.$$

İsbatı. y^* nöqtəsi $J(y)$ funksionalına minimum verdiyindən

$$Ay^* = f$$

olar (teorem 5.5-ə əsasən). Onda

$$J(y_n) - J(y^*) = (Ay_n, y_n) - 2(y_n, f) - (Ay^*, y^*) +$$

$$+ 2(f, y^*) = (Ay_n, y_n) - 2(y_n, Ay^*) + (Ay^*, y^*) =$$

$$= (A(y_n - y^*), y_n) - (y_n - y^*, Ay^*) = (A(y_n - y^*), y_n) -$$

$$- (A(y_n - y^*), y^*) = (A(y_n - y^*), y_n - y^*) \geq \gamma^2 \|y_n - y^*\|^2.$$

Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n) = m = J(y^*)$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$$

olduğunu alırıq. Yığılma sürətini müəyyənləşdirən bərabərsizlik də

$$J(y_n) - J(y^*) \geq \gamma^2 \|y_n - y^*\|^2$$

bərabərsizliyindən alınır. Teorem isbat olundu.

Beləliklə, (5.64) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün $J(y)$ funksionalını minimumlaşdıran ardıcılığı tapmaq kifayətdir. Konkret məsələlər üçün belə ardıcılıqların qurulmasına gələcəkdə baxacağıq.

§10. Rits üsulu

Xətti diferensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y'' = q(x)y + f(x), \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (5.55)$$

Burada sadəlik üçün bircinsli sərhəd şərtləri götürülmüşdür. Əks halda

xətti əvəzləmə vasitəsilə həmişə bircinsli sərhəd şərtlərinə gətirmək olar.

Fərz olunur ki, $q(x) \geq q_0 > 0$ və $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) kəsilməz funksiyalardır. Tutaq ki,

$$H = L_2[a, b], \quad Ay = -y'' + q(x)y$$

və bu operatorun təyin oblastı $-H_A$ iki dəfə kəsilməz törəmələri olan və $y(a) = y(b) = 0$ şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğudur. Onda (5.65) məsələsini

$$Ay = -f \quad (5.66)$$

operator tənliyi şəklində yazmaq olar.

İsbat edək ki, A operatoru H_A çoxluğunda simmetrik və müsbət - müəyyəndir. Fərz edək ki, $y, z \in H_A$. Onda

$$\begin{aligned} (Ay, z) &= \int_a^b (-y'' + qy)z dx = -\int_a^b y''z dx + \int_a^b qyz dx = \\ &= -zy'|_a^b + \int_a^b y'z' dx + \int_a^b qyz dx = yz'|_b^a - \int_a^b z'' dx + \\ &+ \int_a^b qyz dx = \int_a^b (-z'' + qz)y dx = (y, Az). \end{aligned}$$

Deməli, A operatoru simmetrikdir.

İndi isə A operatorunun müsbət müəyyənliyini isbat edək. Tutaq ki, $y \in H_A$. Onda

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= \int_a^b (-y'' + qy)y dx = -\int_a^b y''y dx + \int_a^b qy^2 dx = -y'y|_a^b + \int_a^b y'^2 dx + \\ &+ \int_a^b qy^2 dx = \int_a^b y'^2 dx + q_0 \int_a^b y^2 dx \geq q_0 \int_a^b y^2 dx = q_0 \|y\|^2, \\ (Ay, y) &\geq q_0 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Bu da A operatorunun müsbət-müəyyən olmasını göstərir.

A operatoru simmetrik və müsbət-müəyyən olduğundan teorem 5.5-ə əsasən, (5.56) tənliyinin həllini tapmaq üçün $J(y)$ funksionala minimum verən nöqtəni tapmaq lazımdır. Ona görə də əvvəlcə (5.65) məsələsi üçün $J(y)$ funksionalını hesablayaq:

$$\begin{aligned} J(y) &= (Ay, y) + 2(y, f) = \int_a^b (-y'' + qy)y dx + 2 \int_a^b yf dx = -\int_a^b y''y dx + \\ &+ \int_a^b (qy^2 + 2yf) dx = -y'y|_a^b + \int_a^b y'^2 dx + \int_a^b (qy^2 + 2yf) dx = \\ &= \int_a^b (y'^2 + qy^2 + 2fy) dx, \\ J(y) &= \int_a^b (y'^2 + qy^2 + 2fy) dx. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Teorem 5.6-ya əsasən bu funksionala minimum verən nöqtənin “təqribi qiymətini” tapmaq üçün minimumlaşdıran ardıcılıqlı qurmaq kifayətdir.

Belə ardıcılıqlı qurmaq üçün əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma 5.4. 1) Hər bir M ədədi üçün elə R ədədi olmalıdır ki, $y(a) = y(b) = 0$

sərhəd şərtlərini

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx = \int_a^b (y'^2 + qy^2 + 2fy) dx \leq M$$

bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari $y(x)$ funksiyası

$$|y(x)| \leq R \quad (a \leq x \leq b)$$

bərabərsizliyini də ödəməlidir.

2) Hər bir R ədədi üçün elə $d, p > 1$ ədədləri seçmək olar ki, ixtiyari $x \in [a, b]$, $|y| \leq R$, $z \in (-\infty, \infty)$ üçün

$$f(x, y, z) \geq |z|^p + d$$

bərabərsizliyi doğru olur.

İsbatı. Tutaq ki, $J(y) \leq M$. Onda

$$\begin{aligned} \int_a^b y'^2 dx &\leq 2 \int_a^b |f(x)| |y| dx + M, \\ \int_a^b y'^2 dx &\leq \left(2 \int_a^b |f(x)| dx \right) \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + M, \\ y(x) &= \int_a^x y'(t) dt \end{aligned}$$

eyniliyindən

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b |y'|^2 dx}$$

olduğu alınır

Bu axırıncı bərabərsizliklərdən

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \leq \sqrt{b-a} \sqrt{M + \left(2 \int_a^b |f(x)| dx \right) \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|},$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \leq 2(b-a) \int_a^b |f(x)| dx = R.$$

Lemmanın birinci hissəsi isbat olundu.

Əgər

$$p = 2, \quad d = 1 - 2R \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

qəbul etsək lemmanın ikinci hissəsinin doğruluğu bir başa $f(x, y, z)$ funksiyasının ifadəsindən alınır.

İndi funksionalı minimumlaşdıran ardıcılıq quraq. $[a, b]$ parçasında təyin olan və aşağıdakı şərtləri ödəyən ixtiyari kəsilməz diferensiallanan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyalar sisteminə baxaq:

- 1) $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$;
- 2) $\{\varphi'_i(x)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ xətti asılı olmayan sistemdir;
- 3) $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan ixtiyari $\Phi(x)$ funksiyası və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə

$$\Phi_n(x) = a_1 \varphi'_1(x) + \dots + a_n \varphi'_n(x)$$

ümumiləşmiş çoxhəddini tapmaq olar ki,

$$|\Phi(x) - \Phi_n(x)| < \varepsilon \quad (x \in [a, b])$$

bərabərsizliyi ödənsin.

Bu şərtləri ödəyən $\varphi_i(x)$ funksiyaları əvəzinə

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (b-x)$$

və ya

$$\varphi_i(x) = \sin i\pi \frac{x-a}{b-a}$$

funksiyalarını götürmək olar.

Minimallaşdıran ardıcılığın ümumi həddini

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$$

şəklində axtaraq.

Aşkardır ki, ixtiyari n və a_i üçün bu funksiya sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$y_n(a) = y_n(b) = 0$$

Bu funksiya üçün $J(y)$ funksionalını hesablasaq

$$J(y_n) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} a_i a_j + 2 \sum_{i=1}^n A_i a_i$$

olduğunu alırıq. Burada

$$A_{ij} = \int_a^b [\varphi'_i(x) \varphi'_j(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

$$A_i = \int_a^b \varphi_i(x) f(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

İsbat edək ki, $J(y_n) = \Phi(a_1, \dots, a_n)$ funksiyası özünün minimumunu a_i -lərin sonlu qiymətlərində alır. Bunun üçün a_i -lərdən hər hansı bir $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ sistemini götürək və

$$\Phi(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) = M$$

işarələməsini aparaq. Aşkardır ki, bizə a_i -lərin elə qiymətlərinə baxmaq lazımdır ki,

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq M$$

bərabərsizliyi ödənsin. Lemma 5.4-ün birinci hökmünə əsasən elə R tapmaq olar ki,

$$|y(x)| \leq R \quad (a \leq x \leq b)$$

bərabərsizliyi ödənsin. Onda həmin lemmanın hökmünə əsasən isə

$$M \geq \int_a^b \left[\left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi'_k \right|^p + d \right] dx, \quad \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi'_k \right|^p dx \leq M - d(b-a) = M_1,$$

$$\left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi'_k \right|^p dx \right)^{1/p} \leq M_1^{1/p}.$$

$\lambda_k = a_k / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ işarələməsini aparsaq:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi'_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq M_1^{1/p}$$

olduğunu alırıq. Aşkıdır ki,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1$$

Ona görə də

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi'_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

kəsilməz funksiyası, vahid sferada $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1 \right)$ özünün ən kiçik

δ – qiymətini alır. Onda

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \frac{M_1^{1/p}}{\delta}.$$

Beləliklə, isbat etdik ki,

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq M$$

bərabərsizliyini ödəyən a_i -lər çoxluğu, n -ölçülü Evklid fəzasında məhdud qapalı çoxluq təşkil edir. Buradan çıxır ki, elə $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədləri var ki, $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ funksiyası özünün ən kiçik qiymətini alır.

Nəhayət, isbat edək ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n) = J(y^*).$$

$\varphi_k(x)$ funksiyasının 3-cü xassəsinə əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ və ixtiyari kəsilməz-diferensiallanan $y(x)$ funksiyası üçün elə n və a_i -lər tapmaq olar ki,

$$\left| y'(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi'_k(x) \right| \leq \min \left(\varepsilon_0, \frac{\varepsilon}{b-a} \right)$$

ödənsin. Onda

$$\left| y(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| \leq \left| \int_a^x \left[y'(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi'_k(x) \right] dx \right| < \varepsilon,$$

buradan

$$0 \leq J(y_n) - J(y^*) < \eta$$

olduğunu alırıq. Burada η kafi qədər kiçik ədəddir. Elə buna görə də

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n) = J(y^*).$$

Beləliklə, biz isbat etdik ki, a_i -lərin elə sonlu qiymətlərini tapmaq olar ki,

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$$

funksiyalar ardıcılığı minimumlaşdıran ardıcılıq olar.

Teorem 5.6-ya əsasən bu funksiyanı $J(y)$ funksionalına minimum verən nöqtənin təqribi qiyməti kimi, yəni (5.65) məsələsinin təqribi həlli kimi götürmək olar (teorem 5.5).

Biz $y_n(x)$ funksiyasını minimumlaşdıran ardıcılığın ümumi həddinə çevirən a_i -lərin varlığını isbat etdik. İndi onların tapılması qaydasını verək.

a_i -ləri tapmaq üçün aşağıdakı xətti tənliklər sistemini alırıq:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(y_n)}{\partial a_k} = A_k + \sum_{i=1}^n A_{ik} a_i = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (5.68)$$

İsbat edək ki, bu sistemin yeganə həlli var. Bunun üçün uyğun bircinsli tənliklər sisteminin

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} a_i = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

yalnız sıfır həlli olduğunu isbat etmək kifayətdir.

Tutaq ki, $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ bircinsli sistemin sıfırdan fərqli həllidir.

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} \bar{a}_i = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

$\psi_n = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \varphi_i$ işarələməsini aparaq. Buradan

$$\int_a^b (\psi'_n \varphi'_k + q \psi_n \varphi_k) dx = 0$$

olduğunu alarıq. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n A_{ik} \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b [\varphi'_i(x) \varphi'_k(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x)] dx \right) \bar{a}_i = \\ &= \int_a^b \left[\left(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \varphi'_i(x) \right) \varphi'_k(x) + q(x) \left(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \varphi_i(x) \right) \varphi_k(x) \right] dx = \\ &= \int_a^b [\psi'_n(x) \varphi'_k(x) + q(x) \psi_n(x) \varphi_k(x)] dx, \\ &\int_a^b [\psi'_n(x) \varphi'_k(x) + q(x) \psi_n(x) \varphi_k(x)] dx \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini $\bar{a}_k$ -ya vurub 1-dən n -dək cəmləsək:

$$\int_a^b \{[\psi'_n(x)]^2 + q(x)[\psi_n(x)]^2\} dx = 0$$

olduğunu alarıq. Buradan

$$\psi'_n(x) = 0$$

və ya

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \varphi'_i(x) = 0.$$

Bu o deməkdir ki, $\{\varphi'_i(x)\}$ xətti asılı sistemdir. Bu isə şərtə ziddir.

Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 5.7. Tutaq ki, $q(x) > 0$ və $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir.

Onda $\{y_n(x)\}$,

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$$

(burada a_i -lər (5.68)-dən təyin olunur) ardıcılığı (5.67) funksionalını minimumlaşdıran ardıcılıqdır və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y^*(x),$$

belə ki, yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\|y_n(x) - y^*(x)\|_{L_2} \leq \frac{1}{\sqrt{q_0}} \sqrt{J(y_n) - J(y^*)}.$$

§11. Uyğunsuzluqların minimumlaşdırılması üsulləri haqqında

Yuxarıda olduğu kimi yenə də xətti diferensial tənlik üçün sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y'' = q(x)y + f(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (5.69)$$

Aşağıdakı kimi xətti-asılı olmayan və $[a, b]$ parçasında təyin olunan funksiyalar sistemini nəzərdən keçirək:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$$

və fərz edək ki,

$$\varphi_0(a) = y_a, \quad \varphi_0(b) = y_b, \quad \varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

şərtlərini ödəyir.

(5.69) məsələsinin təqribi həllini

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

şəklində axtaraq. Bu funksiyanın sərhəd şərtlərini ödədiyi aşkardır.

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv y_n'' - q(x)y_n - f(x) = \varphi_0''(x) - q(x)\varphi_0(x) - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i [\varphi_i''(x) - q(x)\varphi_i(x)]$$

funksiyasına (5.69) məsələsinin uyğunsuzluğu (nevyazkası) deyirlər.

Aşkardır ki, əgər elə $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$ sabitləri tapmaq olarsa ki, uyğunsuzluqları sıfıra çevrilsin:

$$R(x, c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*) = 0,$$

onda

$$y_n^*(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i^* \varphi_i(x) \quad (5.70)$$

funksiyası (5.69) məsələsinin dəqiq həlli olardı. Təcrübədə belə c_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) tapmaq mümkün olmadığından elə c_i -lər seçilir ki, $R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ kafi qədər kiçik olsun.

Bunun üçün müxtəlif üsullar tətbiq edilir.

1. Kollokasiya üsulu. c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sabitlərini elə seçək ki, kafi qədər bir-birinə yaxın olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i \in [a, b], i = 1, 2, \dots, n$) nöqtələrində uyğunsuzluq sıfıra çevrilsin:

$$R(x_i, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

yaxud

$$\sum_{j=1}^n [\varphi_j''(x_i) - q(x_i)\varphi_j(x_i)]c_j = \varphi_0''(x_i) - q(x_i)\varphi_0(x_i) - f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Bu sistemi həll edib (əgər həlli varsa) $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$ tapdıqdan sonra, (5.70) funksiyası (5.69) məsələsinin təqribi həlli kimi götürülür.

2. Ənkiçik kvadratlar üsulu. Bu üsulda c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) parametrlərini elə seçirlər ki,

$$J = \int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx$$

ən kiçik qiymət alsın. Bunun üçün

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_i} = \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

və yaxud

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_a^b [\varphi_j''(x) - q(x)\varphi_j(x)][\varphi_j''(x) - q(x)\varphi_j(x)] dx \right\} c_j = \int_a^b [\varphi_i''(x) - q(x)\varphi_i(x)][f(x) - \varphi_0''(x) + q(x)\varphi_0(x)] dx$$

sistemini həll etmək lazımdır.

Bu sistemi həll edib (əgər həlli varsa) $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$ ədədlərini tapdıqdan sonra, (5.70) funksiyası (5.69) məsələsinin təqribi həlli kimi qəbul edilir.

Qeyd edək ki, bəzən J integralının əvəzinə

$$J_N = \sum_{i=1}^N R(x_i, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

funksiyasının minimum alması şərtindən də $c_1, c_2, \dots, c_n$ tapılır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i \in [a, b], i = 1, 2, \dots$) nöqtələri bir-birinə yaxın götürülür.

3. Qalyerkin üsulu. Tutaq ki, $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ funksiyalar sistemi tam və ortoqonaldır.

Məlumdur ki, əgər kəsilməz $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında $\varphi_i(x)$ funksiyalarına ortoqonaldırsa, yəni

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx = 0 \quad (i=1,2,\dots),$$

onda

$$f(x) \equiv 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

Bundan başqa, məlumdur ki, kəsilməz $f(x)$ funksiyası sonlu $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (kafi qədər böyük n -lər üçün) funksiyalarına $[a, b]$ parçasında ortoqonaldırsa, onda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kafi qədər kiçik olacaqdır. Qalyerkin üsulu bu fakta əsaslanır.

c_i ($i=1,2,\dots,n$) parametrləri elə seçilir ki, uyğunsuzluq R , $[a, b]$ parçasında $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ funksiyalarına ortoqonal olsun. Onda qeyd etdiyimiz kimi uyğunsuzluq kafi qədər kiçik olacaqdır (kafi qədər böyük n -lər üçün).

Beləliklə, c_i ($i=1,2,\dots,n$)-ləri tapmaq üçün aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\int_a^b \varphi_i(x)R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)dx = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

və ya

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_a^b \varphi_i(x)[\varphi_j''(x) - q(x)\varphi_j(x)]dx \right) c_j = \int_a^b \varphi_i(x)[\varphi_0''(x) - q(x)\varphi_0(x) - f(x)]dx.$$

VI FƏSİL

XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ ÜSULLARLA HƏLLİ

Adi diferensial tənliklərdə olduğu kimi, xüsusi törəməli diferensial tənliklərin də dəqiq həllini çox az hallarda tapmaq olur. Buna görə də belə tənliklərin həlli üçün müxtəlif təqribi üsullar təklif edilmişdir (həm analitik və həm də ədədi üsullar). Bu fəsildə belə üsullardan bir neçəsi şərh olunur. Burada əsasən ədədi üsullar verilir.

Sadəlik xatirinə, baxılan tənliklər iki dəyişənli funksiyalar üçün götürülür. Eyni qayda ilə çoxdəyişənli xüsusi törəməli diferensial tənliklərə də baxmaq olar.

§1. Şəbəkə üsulu

Üsulun ideyası ondan ibarətdir ki, diferensial tənliyə daxil olan funksiyaların təyin oblastını

$$x = x_i \equiv x_0 + ih \quad (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y = y_j \equiv y_0 + jl \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

paralel düz xətlərlə şəbəkələrə bölüb oblastı bu düz xətlərin kəsişmə nöqtələri çoxluğu ilə əvəz etmək lazımdır. Bundan sonra diferensial tənlikdə (x, y) nöqtəsini (x_i, y_j) düyün nöqtəsilə və bu nöqtələrdə törəmələri uyğun sonlu fərqlərlə əvəz edib, cəbri tənliklər sistemi alırıq. Bu sistemin həlli məsələnin həllinin düyün nöqtələrində təqribi qiymətləri kimi götürülür.

Aşağıda bu üsul müxtəlif məsələlərə tətbiq edilir. Baxılan məsələlərin həllərinin varlığı və yeganəliyi fərz edilir.

1. Elliptik tənliklər üçün. Elliptik tənliklər üçün aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$Lu \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f \quad (6.1)$$

tənliyinin elə $u(x, y)$ həllini tapmaq tələb olunur ki,

$$u|_{\Gamma} = \varphi \quad (6.2)$$

sərhəd şərtini ödəsin. Burada a, b, c, d, g, f funksiyaları x və y -dən asılı olub, sərhədi Γ olan sonlu G oblastında təyin olunub. Fərz edəcəyik ki, bu funksiyalar $(G + \Gamma)$ -da kəsilməzdir, a və b funksiyaları $(G + \Gamma)$ -də müsbətdir, g isə orada müsbət deyil. φ funksiyası Γ -də təyin olunub və

kəsilməzdir.

İndi isə $G + \Gamma$ oblastını şəbəkələrə bölək. Bunun üçün, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y &= y_0 + jl \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

paralel düz xətlər çəkək. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtələrinə düyün nöqtələri deyilir və (i, j) ilə işarə edirlər. Biz yalnız $G + \Gamma$ oblastına daxil olan düyün nöqtələrinə baxacağıq. İki düyün nöqtəsinə o vaxt qonşu nöqtələr deyirlər ki, onların biri-birindən məsafəsi x və ya y oxu istiqamətində şəbəkənin addımı (h və ya l) qədər olsun. Əgər (i, j) -nin qonşu düyün nöqtələrinin dördü də $G + \Gamma$ oblastına daxildirsə, onda bu nöqtəyə daxili düyün nöqtəsi deyirlər. Daxili düyün

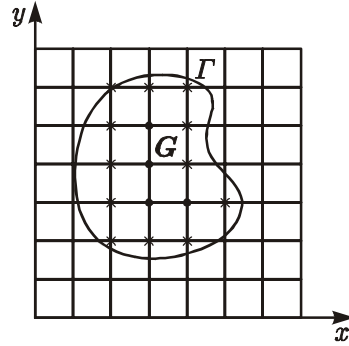
nöqtələri çoxluğunu G^* ilə işarə edək. Əgər (i, j) -nin qonşu nöqtələrindən heç olmasa biri G^* oblastına daxil deyilsə, onda bu nöqtəyə sərhəd düyün nöqtəsi deyirlər. Sərhəd düyün nöqtələri çoxluğunu Γ^* ilə işarə edək. 3-cü şəkildə daxili nöqtə “.”, sərhəd nöqtəsi isə “*” şəklində göstərilmişdir.

(6.1) tənliyində (x, y) nöqtəsinin yerinə (i, j) ,

yəni $(x_0 + ih, y_0 + jl)$ nöqtəsinə yazıb, bu nöqtədə törəmələri aşağıdakı sonlu fərqlər düsturları ilə

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(i,j)} \approx \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l}, \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(i,j)} &\approx \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2}, \end{aligned}$$

burada $u_{ij} = u(x_0 + ih, y_0 + jl)$, əvəz etsək

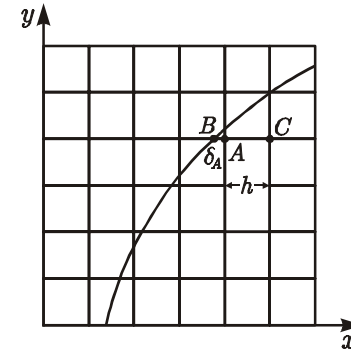


Şəkil 3.

$$\begin{aligned} lu_{ij} &\equiv a_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + b_{ij} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} + \\ &+ c_{ij} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + d_{ij} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} + g_{ij} u_{ij} = f_{ij} \end{aligned} \quad (6.3)$$

olduğunu alırıq. Burada $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, g_{ij}, f_{ij}$ (6.1) tənliyinin əmsallarının (i, j) düyün nöqtəsində qiymətləridir.

(6.3) sisteminin hər bir daxili düyün nöqtəsi üçün yazılışı aydındır. Əgər (i, j) sərhəd nöqtəsidirsə, onda u_{ij} əvəzinə bu düyün



Şəkil 4.

nöqtəsinə Γ -dakı ən yaxın nöqtədə φ -nin qiymətini götürmək lazımdır. Sərhəd şərtini bu cür approksimasiya etmək çox vaxt böyük xətəyə səbəb olur. Ona görə də aşağıdakı qayda ilə approksimasiya məsləhət görülür (Kollats üsulu). Hər bir A sərhəd düyün nöqtəsində (şəkil 4) funksiyanın qiymətini

$$u_A = \frac{\delta_A u_C + h \varphi_B}{\delta_A + h} \quad (6.4)$$

düsturu ilə təyin edirlər. Bu düstur göstərir ki, u_A -nın qiyməti, u_C və $u_B = \varphi_B$ -nin qiymətlərinin xətti interpolasiyası kimi alınır. Bu halda xəta h^2 tərtibdən olacaq.

Beləliklə, (6.3) xətti cəbri tənliklər sistemini almış oluruq. Bu sistemdə məchulların- u_{ij} sayı tənliklərin sayına (daxili düyün nöqtələrinin sayına) bərabərdir. Bu sistemi həll edib u_{ij} -ləri tapdıqdan sonra

$$u(x_i, y_j) \approx u_{ij}$$

qəbul edirik. Burada $u(x_i, y_j)$ (6.1) məsələnin dəqiq həllinin (i, j) düyün nöqtəsində qiymətidir.

Burada aşağıdakı suallar ortaya çıxır.

1) (6.3) sisteminin həlli varmı? Əgər varsa hansı üsullarla tapmaq olar?

2) Üsulun xətası - $|u(x_i, y_j) - u_{ij}|$, h və l -in hansı tərtibindən sıfıra yığılır? Üsulun xətası dedikdə həm tənliyi və həm də sərhəd şərtlərini

aproximasiya etdikdə buraxılan xəta nəzərdə tutulur.

Aşağıda bu suallara cavab verilir.

Əvvəlcə (6.3) sistemini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$lu_{ij} \equiv A_{ij}u_{i+1,j} + B_{ij}u_{i-1,j} + C_{ij}u_{ij+1} + D_{ij}u_{ij-1} - E_{ij}u_{ij} = f_{ij}, \quad (6.5)$$

burada

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{C_{ij}}{2h}, \quad B_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} - \frac{C_{ij}}{2h}, \quad C_{ij} = \frac{b_{ij}}{l^2} + \frac{d_{ij}}{2l},$$

$$D_{ij} = \frac{b_{ij}}{l^2} - \frac{d_{ij}}{2l}, \quad E_{ij} = \frac{2a_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{l^2} - g_{ij}.$$

Aşkardır ki, kafi qədər kiçik h və l üçün $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$ müsbətdirlər və

$$A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} - E_{ij} = g_{ij}.$$

1.1 Aşağıdakı köməkçi lemmaları isbat edək.

Lemma 6.1. Tutaq ki, şəbəkənin düyün nöqtələrində, hamısı eyni bir ədədə bərabər olmayan v_{ij} – qiymətlər sistemi verilmişdir və bunlar daxili düyün nöqtələri üçün

$$lv_{ij} \geq 0$$

şərtini ödəyirlər. Onda v_{ij} daxili düyün nöqtələrində özünün müsbət maksimumunu ala bilməz.

İsbat. Fərz edək ki, v_{ij} daxili düyün nöqtəsində özünün müsbət maksimumunu alır:

$$v_{i_0j_0} = \max_{(i,j) \in G^*} v_{ij} = M > 0.$$

Aşkardır ki, (i_0, j_0) düyün nöqtəsinə qonşu olan düyün nöqtələrdə v_{ij} -lər M -dən böyük deyildir və heç olmasa bunlardan biri M -dən kiçikdir. Ona görə də

$$lv_{i_0j_0} = A_{i_0j_0}v_{i_0+1j_0} + B_{i_0j_0}v_{i_0-1j_0} + C_{i_0j_0}v_{i_0j_0+1} + D_{i_0j_0}v_{i_0j_0-1} -$$

$$- E_{i_0j_0}v_{i_0j_0} < M(A_{i_0j_0} + B_{i_0j_0} + C_{i_0j_0} + D_{i_0j_0} - E_{i_0j_0}) = Mg_{i_0j_0} \leq 0,$$

$$Lv_{i_0j_0} < 0, \quad (i_0, j_0) \in G^*.$$

Bu isə lemmanın şərtinə ziddir.

Lemma 6.2. Tutaq ki, şəbəkənin düyün nöqtələrində hamısı eyni bir ədədə bərabər olmayan v_{ij} – qiymətlər sistemi verilmişdir və bunlar daxili düyün nöqtələri üçün

$$lv_{ij} \leq 0$$

şərtini ödəyir. Onda v_{ij} daxili düyün nöqtələrində özünün mənfi minimumunu ala bilməz.

Bu lemmanın isbatı yuxarıdakı lemmanın isbatına analojidir.

Lemma 6.3. Tutaq ki, şəbəkənin düyün nöqtələrində hamısı eyni bir ədədə bərabər olmayan v_{ij} və V_{ij} qiymətlər sistemi verilmişdir və bunlar daxili düyün nöqtələri üçün

$$|lv_{ij}| \leq -lV_{ij}$$

şərtini ödəyirlər. Sərhəd düyün nöqtələrində isə

$$|v_{ij}| \leq V_{ij}.$$

Onda ixtiyari düyün nöqtəsi üçün

$$|v_{ij}| \leq V_{ij}.$$

İsbat. Aşkardır ki,

$$\left. \begin{aligned} l(v_{ij} + V_{ij}) &\leq 0, \quad (i, j) \in G^*, \\ v_{ij} + V_{ij} &\geq 0, \quad (i, j) \in \Gamma^* \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

və

$$\left. \begin{aligned} l(v_{ij} - V_{ij}) &\geq 0, \quad (i, j) \in G^*, \\ v_{ij} - V_{ij} &\leq 0, \quad (i, j) \in \Gamma^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

(6.6) və (6.7) bərabərsizliklərinə uyğun olaraq lemma 6.1 və lemma 6.2-ni tətbiq etsək:

$$v_{ij} + V_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in G^*$$

və

$$v_{ij} - V_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in G^*$$

olduğunu alırıq. Bu bərabərsizliklərdən lemmanın hökmünün doğru olduğunu alırıq.

1.2. (6.5) sisteminin həllinin varlığı və yeganəliyinin isbatı. Bundan əlavə isbat edək ki, adi iterasiya üsulu ilə qurulan ardıcıl yaxınlaşmalar bu sistemin həllinə yığılır.

Xətti cəbr kursundan məlumdur ki, (6.5) sisteminin həllinin varlığı və yeganəliyini isbat etmək üçün uyğun bircins sistemin ancaq sıfır həllinin olduğunu isbat etmək kifayətdir. Bircins sistemin ancaq sıfır həllinin varlığı isə lemma 6.1 və lemma 6.2-dən çıxır. Doğrudan da, əgər bircins sistemin sıfırdan fərqli həlli olarsa, onda bu həllin müsbət komponentləri

özünün ən böyük və mənfə komponentləri özünün ən kiçik qiymətlərini Γ^* -da alar. Bu da mümkün deyil. Çünki bircins sistemin həlli Γ^* -da sıfırdır.

İsbat edək ki, (6.5) sistemi üçün ((6.4) tənliyi nəzərə alınmaq şərtilə) qurulmuş adi iterasiyalar bu sistemin həllinə yığılacaq. Bunun üçün fərz edək ki, $g < 0$ və (6.5) sistemini aşağıdakı şəkildə yazsaq:

$$\left. \begin{aligned} u_{ij} &= \frac{A_{ij}}{E_{ij}} u_{i+1j} + \frac{B_{ij}}{E_{ij}} u_{i-1j} + \frac{C_{ij}}{E_{ij}} u_{ij+1} + \frac{D_{ij}}{E_{ij}} u_{ij-1} - \frac{f_{ij}}{E_{ij}}, \\ u_A &= \frac{\delta_A u_C + h \varphi_B}{h + \delta_A}. \end{aligned} \right\}$$

Aşkardır ki, bu sistemi

$$u = Au + b$$

şəklində yazsaq:

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \frac{\delta_A}{\delta_A + h}, \frac{A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}}{E_{ij}} \right\},$$

$\delta_A < h$ və

$$A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} < E_{ij}$$

olduğundan

$$\|A\|_1 < 1.$$

Onda sıxılmış inikas prinsipinə əsasən hökm edirik ki,

$$\left. \begin{aligned} u_{ij}^{(m)} &= \frac{A_{ij}}{E_{ij}} u_{i+1j}^{(m-1)} + \frac{B_{ij}}{E_{ij}} u_{i-1j}^{(m-1)} + \frac{C_{ij}}{E_{ij}} u_{ij+1}^{(m-1)} + \frac{D_{ij}}{E_{ij}} u_{ij-1}^{(m-1)} - \frac{f_{ij}}{E_{ij}}, \\ u_A^{(m)} &= \frac{\delta_A u_C^{(m-1)} + h \varphi_B}{h + \delta_A} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\}$$

yaxınlaşmaları (6.5) sisteminin həllinə yığılır. Yığılma sürəti $\|A\|_1$ ədədi ilə təyin edilir. Qeyd edək ki, $g = 0$ olduqda da adi ardıcıl yaxınlaşmaların yığıldığını isbat etmək olar [2].

1.3. Diferensial tənliyi aproksimasiya etdikdə buraxılan xətanı qiymətləndirək. Fərz edək ki, (6.1), (6.2) məsələsinin həllinin dörd tərtibdən kəsilməz törəməsi var. Onda aşkardır ki,

$$\frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(i,j)} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^3}$$

$$(x_i - h \leq \tilde{x}_i \leq x_i + h)$$

$$\frac{u(x_i, y_j + l) - u(x_i, y_j - l)}{2l} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(i,j)} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^3},$$

$$(y_j - l \leq \tilde{y}_j \leq y_j + l),$$

$$\frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^4}$$

$$(x_i - h \leq \tilde{x}_i \leq x_i + h),$$

$$\frac{u(x_i, y_j + l) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - l)}{l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(i,j)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^4}$$

$$(y_j - l \leq \tilde{y}_j \leq y_j + l).$$

Bu bərabərlikləri nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} lu_{ij} &= \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu \right)_{(i,j)} + \\ &+ \frac{1}{12} \left[h^2 a_{ij} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^4} + l^2 b_{ij} \frac{\partial^4 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^4} + \right. \\ &\left. + 2h^2 c_{ij} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial x^3} + 2l^2 d_{ij} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^3} \right] = (Lu)_{(i,j)} + R_{ij}, \end{aligned}$$

$$lu_{ij} = (Lu)_{(i,j)} + R_{ij},$$

burada

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{12} \left[h^2 a_{ij} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^4} + l^2 b_{ij} \frac{\partial^4 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^4} + \right. \\ &\left. + 2h^2 c_{ij} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^3} + 2l^2 d_{ij} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^3} \right]. \end{aligned}$$

$l = \alpha h$ qəbul etsək:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{h^2}{12} \left[a_{ij} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^4} + \alpha^2 b_{ij} \frac{\partial^4 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^4} + \right. \\ &\left. + 2c_{ij} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x^3} + 2\alpha^2 d_{ij} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{y}_j)}{\partial y^3} \right]. \end{aligned}$$

Buradan da

$$|R_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} [(a_{ij} + \alpha^2 b_{ij}) M_4 + 2(|c_{ij}| + \alpha^2 |d_{ij}|) M_3], \quad (6.8)$$

$$M_3 = \max_G \left(\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \right), \quad M_4 = \max_G \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right)$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə,

$$lu_{ij} - f_{ij} = (Lu - f)_{(i,j)} + R_{ij} = R_{ij},$$

$$lu_{ij} = f_{ij} + R_{ij}, \quad u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

Deməli, tənliyin approksimasiya tərtibi h^2 -dir.

Yuxarıda qeyd etmişdik ki, sərhəd şərtini (6.4) düsturu ilə approksimasiya etdikdə də xətanın tərtibi h^2 olur.

1.4. Nəhayət, şəbəkə üsulunun xətasını qiymətləndirək. Fərz edək ki, G oblastının hər bir nöqtəsində

$$\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} > 0$$

bərabərsizliyi ödəyir. Burada p və q , mərkəzi ixtiyari (x_0, y_0) nöqtəsində olan və G oblastını tamamilə özündə saxlayan ellipsin koordinat oxlarına paralel olan yarım oxlardır.

Düyun nöqtələrində (6.1), (6.2) məsələsinin təqribi həllini $\tilde{u}_{ij}$:

$$l\tilde{u}_{ij} = f_{ij} \quad ((i, j) \in G^*),$$

$$\tilde{u}_{ij} = \varphi_{ij} \quad ((i, j) \in \Gamma^*),$$

dəqiq həllini isə u_{ij} :

$$\left. \begin{aligned} lu_{ij} &= f_{ij} + R_{ij} \quad ((i, j) \in G^*), \\ u_{ij} &= \varphi_{ij} + r_{ij} \quad ((i, j) \in \Gamma^*) \end{aligned} \right\}$$

ilə işarə edək. Onda xəta üçün aşağıdakı tənliklər sistemini almış olarıq:

$$\left. \begin{aligned} l\varepsilon_{ij} &= R_{ij} \quad ((i, j) \in G^*), \\ \varepsilon_{ij} &= r_{ij} \quad ((i, j) \in \Gamma^*). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Burada R_{ij} tənliyi approksimasiya etdikdə buraxılan xətdir və (6.8)

bərabərsizliyi ilə qiymətləndirilir. r_{ij} isə sərhəd şərtini approksimasiya

etdikdə buraxılan xətdir. Sərhəd nöqtəsində u_{ij} əvəzinə bu düyun nöqtəsinə Γ -dəki ən yaxın nöqtədə φ -nin qiymətini götürək. Bu halda

$$|r_{ij}| \leq 2M_1\delta, \quad M_1 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right\}, \quad \delta = \max(h, l)$$

olar. Doğrudan da, əgər $(i^*, j^*) \in \Gamma$ isə və

B - bu nöqtəyə yaxın Γ -dəki nöqtədirsə (şəkil 5), onda sonlu fərqlər düsturunu tətbiq etsək:

$$\begin{aligned} r_{i^*j^*} &= u_{i^*j^*} - u_B = \\ &= \frac{\partial u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial u(\tilde{x}_i, y_j)}{\partial y} \delta_2 \end{aligned}$$

olar. Buradan da

$$|r_{i^*j^*}| \leq 2\delta M_1$$

olduğunu alırıq.

Üsulun xətasını – ε_{ij} qiymətləndirmək üçün (6.9) sisteminin həllini

$$\varepsilon_{ij} = \xi_{ij} + \eta_{ij}$$

şəklində axtaraq. Burada ξ_{ij} və η_{ij} uyğun olaraq aşağıdakı sistemlərin həlləridir:

$$\left. \begin{aligned} l\eta_{ij} &= 0 \quad ((i, j) \in G^*), \\ \eta_{ij} &= r_{ij} \quad ((i, j) \in \Gamma^*), \\ l\xi_{ij} &= R_{ij} \quad ((i, j) \in G^*), \\ \xi_{ij} &= 0 \quad ((i, j) \in \Gamma^*). \end{aligned} \right\}$$

Lemma 6.1-ə əsasən $|\eta_{ij}|$ ən böyük qiymətini Γ^* -da alır. Ona görə də

$$|\eta_{ij}| \leq 2M_1\delta$$

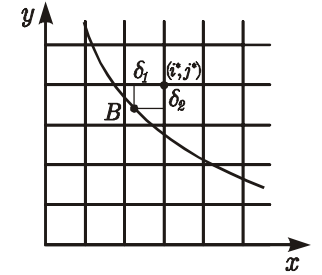
olar.

ξ_{ij} -ni qiymətləndirmək üçün

$$W = \lambda \left[1 - \frac{(x - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y - y_0)^2}{q^2} \right]$$

funksiyasına baxaq. Burada $\lambda > 0$ hələllik ixtiyari ədəddir.

$$lu_{ij} = (Lu)_{(i,j)} + R_{ij}$$



Şəkil 5.

düsturundan istifadə etsək

$$lw_{ij} = (Lw)_{(i,j)} + R_{ij} = (Lw)_{(i,j)}$$

olduğunu alırıq (w iki dərəcəli çoxhədli olduğundan və qalıq həddinə bu funksiyanın üç və ondan yüksək tərtibdən törəmələri daxil olduğundan $R_{ij} \equiv 0$ olar). Buradan

$$lw_{ij} = -2\lambda \left\{ \frac{a_{ij}}{p^2} + \frac{b_{ij}}{q^2} + \frac{x_i - x_0}{p^2} c_{ij} + \frac{y_j - y_0}{q^2} d_{ij} - \frac{g_{ij}}{2} \left[1 - \frac{(x_i - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y_j - y_0)^2}{q^2} \right] \right\} \leq -2\lambda \left(\frac{a_{ij}}{p^2} + \frac{b_{ij}}{q^2} - \frac{|c_{ij}|}{p} - \frac{|d_{ij}|}{q} \right)$$

olduğunu alırıq. λ parametrini elə seçək ki,

$$|R_{ij}| \leq 2\lambda \left(\frac{a_{ij}}{p^2} + \frac{b_{ij}}{q^2} - \frac{|c_{ij}|}{p} - \frac{|d_{ij}|}{q} \right) \quad (i, j) \in G^*$$

olsun. Bunun üçün

$$\lambda = \frac{h^2}{24} \frac{\max[(a + \alpha^2 b)M_4 + 2(|c| + \alpha^2 |d|)M_3]}{\min_G \left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right)}$$

götürmək kifayətdir.

Beləliklə,

$$lw_{ij} \leq -|R_{ij}| = -|l\xi_{ij}|, \\ |l\xi_{ij}| \leq -lw_{ij} \quad (i, j) \in G^*$$

olduğunu alırıq.

Lemma 6.3-ü tətbiq etsək:

$$|\xi_{ij}| \leq w_{ij} = \frac{h^2}{24} \frac{\max[(a + \alpha^2 b)M_4 + 2(|c| + \alpha^2 |d|)M_3]}{\min_G \left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right)} \times \\ \times \left[1 - \frac{(x_i - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y_j - y_0)^2}{q^2} \right] \leq$$

$$\leq \frac{h^2}{24} \frac{\max[(a + \alpha^2 b)M_4 + 2(|c| + \alpha^2 |d|)M_3]}{\min_G \left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right)}$$

olduğunu alırıq.

Deməli,

$$|\varepsilon_{ij}| \leq |\eta_{ij}| + |\xi_{ij}| \leq 2M_1\delta + \frac{h^2}{24} \frac{\max[(a + \alpha^2 b)M_4 + 2(|c| + \alpha^2 |d|)M_3]}{\min_G \left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{q^2} - \frac{|c|}{p} - \frac{|d|}{q} \right)}.$$

Qeyd edək ki, Kollats üsulu ilə sərhəd şərtini approksimasiya etsəydik:

$$|r_{ij}| \leq 3h^2 M_2, \quad M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \right\}$$

olardı. Onda üsulun xətası üçün yuxarıda aldığımız bərabərsizliyin sağ tərəfindəki birinci həddin yerinə $3h^2 M_2$ olduğunu alardıq.

2. Hiperbolik tənliklər üçün. Hiperbolik tənliklər üçün aşağıdakı iki məsələyə baxaq.

Sadəlik üçün aşağıdakı hiperbolik tənliyə baxaq.

$$Lu \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \quad (6.10)$$

burada a, b, c, d, g, f x və y -dən asılı kəsilməz funksiyalardır və $a, b > 0$.

1) (6.10) tənliyinin $G = \{-\infty < x < \infty; y \geq 0\}$ oblastından təyin olunmuş elə həllini tapmaq tələb edilir ki,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6.11)$$

başlangıç şərtlərini ödəsin.

(6.10), (6.11) məsələsinə Koşi məsələsi deyirlər.

2) (6.10) tənliyinin $G = \{x_0 \leq x \leq x_0 + X; y \geq 0\}$ oblastında təyin olunmuş elə həllini tapmaq tələb edilir ki, $[x_0, x_0 + X]$ parçasında (6.11) başlangıç şərtlərini və

$$u(x_0, y) = \Phi_1(y), \quad u(x_0 + X, y) = \Phi_2(y) \quad (y \geq 0) \quad (6.12)$$

sərhəd şərtlərini ödəsin. Bu məsələyə qarışıq məsələ deyirlər.

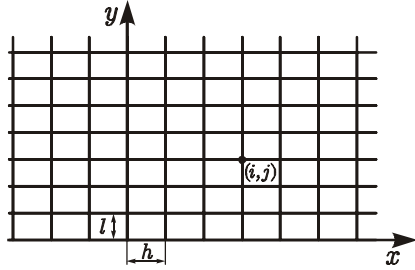
2.1. Koşi məsələsinin həlli üçün şəbəkə üsulunun tətbiqi (Qarışıq

məsələ üçün də eyni qayda ilə tətbiq edilir). $G = \{-\infty < x < \infty; y \geq 0\}$ oblastını şəbəkələrə bölək. Bunun üçün

$$\begin{aligned} x &= x_i \equiv ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y &= y_j \equiv jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

paralel düz xətləri çəkək. Şəbəkələrin (düzbucaqlıların) (şəkil 6) təpə nöqtələrinə düyün nöqtələri deyirlər və (i, j) kimi işarələmə aparırlar. x oxu üzərində olan düyün nöqtələrinə sərhəd düyünləri, qalın nöqtələrə isə daxili düyünləri deyirlər.

Daxili düyünlər üçün (6.10) tənliyinin approksimasiya edən fərqlər tənliyini yazaq. Bunun üçün (x, y) nöqtəsini (i, j) (yəni (x_i, y_j)) düyünü ilə bu nöqtədə tənliyə daxil olan törəmələri sonlu fərqlərlə əvəz etsək:



Şəkil 6.

$$\begin{aligned} lu_{ij} \equiv & a_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - b_{ij} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} + \\ & + c_{ij} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + d_{ij} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} + g_{ij} u_{ij} = f_{ij} \end{aligned}$$

və ya

$$lu_{ij} \equiv A_{ij} u_{ij+1} + B_{ij} u_{ij-1} + C_{ij} u_{i-1,j} + D_{ij} u_{i+1,j} + E_{ij} u_{ij} = f_{ij} \quad (6.13)$$

olduğunu alırıq. Burada

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -\frac{b_{ij}}{l^2} + \frac{d_{ij}}{2l}, \quad B_{ij} = -\frac{b_{ij}}{l^2} - \frac{d_{ij}}{2l}, \quad C_{ij} = \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{c_{ij}}{2h}, \\ D_{ij} &= \frac{a_{ij}}{h^2} - \frac{c_{ij}}{2h}, \quad E_{ij} = -\frac{2a_{ij}}{h^2} + \frac{2b_{ij}}{l^2} + g_{ij}. \end{aligned}$$

Aşkardır ki, kifə qədər kiçik h və l üçün $A_{ij} < 0$, $B_{ij} < 0$, $C_{ij} > 0$,

$D_{ij} > 0$ və

$$A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} = g_{ij}.$$

Elliptik tənliklərdə olduğu kimi, burada da

$$lu_{ij} = f_{ij} + R_{ij}, \quad u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

Belə ki, tənliyin approksimasiya xətası

$$|R_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} [(a_{ij} + \alpha^2 b_{ij}) M_4 + 2(|c_{ij}| + \alpha^2 |d_{ij}|) M_3]$$

bərabərsizliyi ilə qiymətləndirilir.

İndi isə (6.11) başlanğıc şərtlərini approksimasiya edək. Biz ancaq

$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$ törəməsini approksimasiya etməliyik. Bunu iki cür etmək olar.

Əvvəlcə

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \approx \frac{u_{i1} - u_{i0}}{l}$$

approksimasiyanı götürək. Bu halda başlanğıc şərtlər

$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i, \quad \frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \psi(ih) = \psi_i$$

və ya

$$u_{i0} = \varphi_i, \quad u_{i1} = \varphi_i + l\psi_i \quad (6.14)$$

düsturları ilə əvəz olunur.

İndi isə

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2l}$$

approksimasiyanı götürək. Bu halda başlanğıc şərtlər

$$u_{i0} = \varphi_i, \quad \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2l} = \psi_i$$

düsturları ilə əvəz olunur. u_{i1} -i tapmaq üçün fərqlər tənliyini $(i, 0)$

düyünü üçün yazaq və oradan $u_{i,-1}$ -i yox edək:

$$\begin{aligned} A_{i0} u_{i1} + B_{i0} u_{i,-1} + C_{i0} u_{i+1,0} + D_{i0} u_{i-1,0} + E_{i0} u_{i0} &= f_{i0}, \\ (A_{i0} + B_{i0}) u_{i1} + C_{i0} u_{i+1,0} + D_{i0} u_{i-1,0} + E_{i0} u_{i0} &= f_{i0} + 2l B_{i0} \psi_i \\ (A_{i0} + B_{i0}) u_{i1} &= f_{i0} + 2l B_{i0} \psi_i - C_{i0} \varphi_{i+1} - D_{i0} \varphi_{i-1} - E_{i0} \varphi_i. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} u_{i0} &= \varphi_i, \\ u_{i1} &= \frac{1}{A_{i0} + B_{i0}} (f_{i0} + 2lB_{i0}\psi_i - C_{i0}\varphi_{i+1} - D_{i0}\varphi_{i-1} - E_{i0}\varphi_i) \end{aligned} \quad (6.15)$$

olduğunu alırıq.

(6.15) approksimasiyası formaca mürəkkəb olsa da, təcrübədə ondan istifadə etmək çox vaxt əlverişli olur.

Çünki bu halda approksimasiya xətası

$$r_{ij} = O(h^2) \quad (l = h),$$

düsturu ilə təyin edilir. Birinci halda isə approksimasiya xətası

$$r_{ij} = O(h) \quad (l = h)$$

düsturu ilə təyin edilir.

Beləliklə (6.10), (6.11) başlanğıc məsələsini (6.13) və (6.14) (və ya (6.15)) sonlu fərqlər sistemi ilə əvəz etmiş oluruq. Bu sistemi həll edib, u_{ij} -ləri tapdıqdan sonra

$$u(x_i, y_j) \approx u_{ij}$$

qəbul edirik.

Hiperbolik tənliklər üçün $u(x_i, y_j) - u_{ij}$ fərqlərini kafi qədər kiçik etmək üçün, l və h arasında münasibət (yəni α) ixtiyari götürülə bilməz. İsbat edilir ki, elə α var ki, onun üçün üsulun xətası kafi qədər kiçik edilə bilməz.

Aşağıdakı konkret məsələ üçün şəbəkə üsulunun xətasını qiymətləndirək.

2.2. Bircinsli olmayan dalğa tənliyi üçün Koşi məsələsi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y) \quad (y > 0, -\infty < x < \infty), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Kvadrat şəbəkə ($h = l$) üçün, (6.16) məsələsinə uyğun fərqlər tənliyi aşağıdakı şəkildə olar:

$$\begin{aligned} lu_{ij} &\equiv \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} - \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} = f_{ij}, \\ u_{i0} &= \varphi_i, \quad u_{i1} = \frac{1}{2}(-h^2 f_{i0} + 2h\psi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}), \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u_{ij} - u_{i+1,j-1} &= u_{i-1,j-1} - u_{i,j-2} - h^2 f_{i,j-1}, \\ u_{i0} &= \varphi_i, \quad u_{i1} = \frac{1}{2}(-h^2 f_{i0} + 2h\psi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}). \end{aligned} \right\}$$

Buradan

$$\begin{aligned} u_{ij} - u_{i+1,j-1} &= u_{i-1,j-1} - u_{i,j-2} - h^2 f_{i,j-1} = \dots = \\ &= u_{i-j+1,1} - u_{i-j+2,0} - h^2 \sum_{v=0}^{j-2} f_{i-i,j-v-1}, \\ u_{i+1,j-1} - u_{i+2,j-2} &= u_{i-j+3,1} - u_{i-j+4,0} - h^2 \sum_{v=0}^{j-3} f_{i-v+1,j-v-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ u_{i+j-2,2} - u_{i+j-1,1} &= u_{i+j-3,2} - u_{i+j-2,0} - h^2 f_{i+j-2,1}. \end{aligned}$$

Bu bərabərlikləri hədbə-hədd cəmləsək:

$$u_{ij} = \sum_{v=-j/2}^{j/2-1} u_{i+2v+1,1} - \sum_{v=-j/2}^{j/2-2} u_{i+2v+2,0} - h^2 \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{v=0}^{j-2-k} f_{i-v+k,j-k-v-1}. \quad (6.17)$$

(6.16) məsələsinin düyün nöqtələrdə dəqiq həllinin qiymətini u_{ij} ilə

$$\left. \begin{aligned} lu_{ij} &= f_{ij} + R_{ij}, \\ u_{i0} &= \varphi_0, \quad u_{i1} = \frac{1}{2}(-h^2 f_{i0} + 2h\psi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}) + r_i \end{aligned} \right\}$$

və təqribi həllini isə $\tilde{u}_{ij}$ ilə

$$\left. \begin{aligned} l\tilde{u}_{ij} &= f_{ij} \\ \tilde{u}_{i0} &= \varphi_i, \quad \tilde{u}_{i1} = \frac{1}{2}(-h^2 f_{i0} + 2h\psi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}) \end{aligned} \right\}$$

işarə edək. Burada

$$|R_{ij}| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad |r_i| \leq \frac{h^3}{6} \left(M_3 + \frac{M_4}{2} \right).$$

Şəbəkə üsulunun xətasını $\varepsilon_{ij} = \tilde{u}_{ij} - u_{ij}$ ilə işarə etsək:

$$\left. \begin{aligned} l\varepsilon_{ij} &= -R_{ij}, \\ \varepsilon_{i0} &= 0, \quad \varepsilon_{i1} = -r_i \end{aligned} \right\}$$

olduğunu alırıq. (6.17) düsturundan istifadə etsək:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{v=-j/2}^{j/2-1} r_{i+2v+1,1} - \sum_{v=-j/2}^{j/2-2} \varepsilon_{i+2v+2,0} + h^2 \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{v=0}^{j-2-k} R_{i+v+k,i-k-v-1}$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$|\varepsilon_{ij}| \leq j \frac{h^3}{6} \left(M_3 + \frac{M_4}{2} \right) + \frac{j(j-1)}{12} h^4 M_4, \quad \varepsilon_{ij} = O(h^2)$$

olduğunu alırıq.

3. Parabolik tənliklər üçün. Parabolik tənliklər üçün də iki məsələyə baxmaq olar (Koşi məsələsi və qarışıq məsələ). Biz yalnız Koşi məsələsini nəzərdən keçirəcəyik.

Aşağıdakı parabolik tənliyə baxaq:

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = f, \quad (6.18)$$

burada a, b, c, f ($-\infty < x < \infty$) kəsilməz funksiyalardır və $a > 0$.

(6.18) tənliyinin $G = \{-\infty < x < \infty; t \geq 0\}$ oblastında elə həllini tapmaq tələb edilir ki,

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6.19)$$

başlanğıc şərti ödənsin.

$G = \{-\infty < x < \infty; t \geq 0\}$ oblastını şəbəkələrə bölək.

Bunun üçün

$$\begin{aligned} x &= x_i \equiv ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ t &= t_j \equiv jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

paralel düz xətləri çəkək. Aldığımız şəbəkəni düyün nöqtələri üçün (6.18), (6.19) məsələsinə uyğun fərqlər sistemini yazaq. $\frac{\partial u}{\partial t}$ törəməsi (i, j) nöqtəsində müxtəlif üsullarla sonlu fərqlərlə əvəz edildiyindən, alınan fərqlər sistemi də müxtəlifdir:

$$\begin{aligned} l^{(1)} u_{ij} &\equiv \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{l} - a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} - \\ &- b_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} - c_{ij} u_{ij} = f_{ij}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} l^{(2)} u_{ij} &\equiv \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{l} - a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} - \\ &- b_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} - c_{ij} u_{ij} = f_{ij}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$l^{(3)} u_{ij} \equiv \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} - a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} -$$

$$- b_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} - c_{ij} u_{ij} = f_{ij}. \quad (6.22)$$

(6.20) və (6.22) fərqlər sxeminə aşkar, (6.21)-ə isə qeyri-aşkar sxemlər deyirlər.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$l^{(k)} u_{ij} = f_{ij} + R_{ij}^{(k)}, \quad u_{ij} = u(x_i, t_j)$$

və

$$R_{ij}^{(1)} = O(l + h^2), \quad R_{ij}^{(2)} = O(l + h^2), \quad R_{ij}^{(3)} = O(l^2 + h^2).$$

(6.14) başlanğıc şərti şəbəkənin sərhəd nöqtələri üçün ($j = 0$),

$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.23)$$

şəklində olar. Aşkardır ki, başlanğıc şərti şəbəkə nöqtələri üçün yazdıqda heç bir xəyata yol verilmir.

(6.20), (6.22) tənliklər sisteminin hər birinə (6.23)-ü qoşub həll etdikdə tapılan u_{ij} ədədlərini (6.18), (6.19) məsələsinin həllinin düyün nöqtələrində təqribi qiymətləri kimi götürürlər.

Yuxarıda qurduğumuz sxemlərdən birini, (6.20) sxemini,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.24)$$

tənliyi üçün yazıb, alınan sxemin dəqiq həllə yığıldığını isbat edək.

$l = ah^2$ götürüb (6.20) sxeminin (6.24) tənliyi üçün yazsaq

$$u_{ij+1} = (1 - 2\alpha)u_{ij} + \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j})$$

olduğunu alırıq. Aşkardır ki, $\alpha = 1/2$ götürsək sadə

$$u_{i,j-1} = \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j}}{2} \quad (6.25)$$

sxemini alırıq.

Yuxarı yarım müstəvidə ixtiyari (x_0, t_0) nöqtəsini götürək, belə ki,

$$t_0 = 2nl = nh^2,$$

burada tam n ədədi elə seçilir ki, (x_0, t_0) şəbəkənin düyün nöqtəsi olsun. $x = x_0 + ih$, $t = jl$ xətlərinin kəsişmə nöqtələrinə daxil olan düyünləri (i, j) ilə işarə edək. Onda (x_0, t_0) nöqtəsi $(0, 2n)$ düyünü olar. Belə şəbəkə üçün (yəni bu qayda ilə seçilmiş h və l üçün) qurulmuş (6.25) və (6.23) sxemindən

$$u_{02} = \frac{1}{2^2} (\varphi_{-2} + 2\varphi_0 + \varphi_2),$$

$$u_{04} = \frac{1}{2^4} (\varphi_{-4} + 4\varphi_{-2} + 6\varphi_0 + 4\varphi_2 + \varphi_4),$$

.....

$$u_{02n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=-n}^n C_{2n}^{n+1} \varphi_{2i}$$

olduğunu alırıq. $t_0 = nh^2$ olduğundan

$$u_{02n} = \sum_{i=-n}^n \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2h} C_{2n}^{n+1} \varphi_{2i} \cdot 2h = \frac{1}{2\sqrt{t_0}} \sum_{i=-n}^n \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!} \varphi_{2i} \cdot 2h.$$

Burada $\varphi_{2i} = \varphi(x_0 + 2ih)$.

Aşağıdakı ifadəyə baxaq:

$$g_{ni} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!}.$$

Riyazi analiz kursundan məlum Stirlinq düsturundan

$$m! = \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m e^{\frac{\theta_m}{12m}} \quad (0 < \theta_m < 1),$$

istifadə etsək, g_{ni} üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\begin{aligned} g_{ni} &= \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}}{\sqrt{24\pi(n+i)} \left(\frac{n+i}{e}\right)^{n+i} e^{\frac{\theta_{n+i}}{12(n+i)}} \sqrt{2\pi(n-i)} \left(\frac{n-i}{e}\right)^{n-i} e^{\frac{\theta_{n-i}}{12(n-i)}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\sqrt{n^2 - t^2}} \frac{e^{\frac{\theta_{2n}}{24n} - \frac{\theta_{n+i}}{12(n+i)} - \frac{\theta_{n-i}}{12(n-i)}}}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n+i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n-i}}. \end{aligned}$$

$\eta = x_0 + 2ih$ ilə işarə edək. h -ı o qədər kiçildək ki, $x = \eta = \text{const}$ düyün xətti olsun. Onda

$$i = \frac{\eta - x_0}{2h}, \quad n = \frac{t_0}{h^2}, \quad \frac{i}{n} = \frac{\eta - x_0}{2t_0} h.$$

Buna görə də g_{ni} funksiyası η və h -dan asılı olar. Onu $g_h(\eta)$ ilə işarə edək və $h \rightarrow 0$ -da limitini tapaq:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} g_h(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n}{\sqrt{n^2 - i^2}} \frac{e^{\frac{\theta_{2n}}{24n} - \frac{\theta_{n+i}}{12(n+i)} - \frac{\theta_{n-i}}{12(n-i)}}}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n+i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n-i}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^i}{\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 - \frac{\eta - x_0}{2t_0} h\right]^{\frac{\eta - x_0}{2h}}}{\left[1 - \left(\frac{\eta - x_0}{2t_0}\right)^2 h^2\right]^{\frac{t_0}{h^2}} \left[1 + \frac{\eta - x_0}{2t_0} h\right]^{\frac{\eta - x_0}{2h}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\eta - x_0)^2}{4t_0}}. \end{aligned}$$

Onda

$$\begin{aligned} u_{02n}^{(h)} &= \frac{1}{2\sqrt{t_0}} \sum_{i=-n}^n g_{ni} \varphi_{2i} 2h \approx \frac{1}{2\sqrt{t_0}} \int_{x_0 - 2nh}^{x_0 + 2nh} g_h(\eta) \varphi(\eta) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t_0}} \int_{x_0 - \frac{2t_0}{h}}^{x_0 + \frac{2t_0}{h}} g_h(\eta) \varphi(\eta) d\eta \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\eta - x_0)^2}{4t_0}} \varphi(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_{0,2n}^{(h)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{-\frac{(\eta - x_0)^2}{4t_0}} d\eta.$$

Riyazi fizika tənlikləri kursundan məlumdur ki, (6.24), (6.19) məsələsinin dəqiq həlli

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{-\frac{(\eta - x_0)^2}{4t_0}} d\eta$$

düsturu ilə təyin olunur. Ona görə də

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_{0,2n}^{(h)} = u(x_0, t_0).$$

5. Dəyişən istiqamətlər üsulu. Bu üsulu istilik keçirmə tənliyi üçün qoyulmuş qarışıq məsələyə tətbiq edək (eyni qayda ilə digər məsələlərə də

baxmaq olar):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f(x_1, x_2, t), \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \\ u(x_1, x_2, 0) &= \varphi(x_1, x_2) \quad (0 \leq x_i \leq X_i, \quad i=1,2), \\ u(x_1, x_2, t) &= \varphi(x_1, x_2, t) \quad ((x_1, x_2) \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq T),\end{aligned}$$

burada $\overline{G} = [0, X_1] \times [0, X_2]$ oblastının sərhədi Γ ilə işarə edilmişdir.

$\overline{G}$ oblastında şəbəkəni aşağıdakı qayda ilə quraq:

$$\overline{G} = \left\{ (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}); \quad x_k^{(i_k)} = i_k h_k, \quad i_k = 0, 1, \dots, n_k, \quad h_k = \frac{X_k}{n_k}, \quad k=1,2 \right\}.$$

Bu şəbəkənin sərhəddi

$$\Gamma_n = \{(i_1, h_1, i_2, h_2); \quad i_1 = 0, n_1, 0 < i_2 < n_2, \quad i_2 = 0, n_2, 0 < i_1 < n_1\}$$

çoxluğu ilə təyin olunur.

$$[0, T] \quad \text{parçasını} \quad t_j = j\tau \quad \left(\tau = \frac{T}{n}, \quad j=0, 1, \dots, n \right) \quad \text{nöqtələri} \quad \text{ilə} \quad n$$

bərabər hissəyə bölək.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad \text{və} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad \text{operatorlarına uyğun sonlu - fərqlər operatorlarını}$$

aşağıdakı kimi götürək:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|_{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, t_j)} \approx \Lambda_1 u_{i_1, i_2}^j \equiv \frac{u_{i_1+1, i_2}^j - 2u_{i_1, i_2}^j + u_{i_1-1, i_2}^j}{h_1^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|_{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, t_j)} \approx \Lambda_2 u_{i_1, i_2}^j \equiv \frac{u_{i_1, i_2+1}^j - 2u_{i_1, i_2}^j + u_{i_1, i_2-1}^j}{h_2^2},$$

$$u_{i_1, i_2}^j = u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, t_j).$$

Baxdığımız məsələ üçün müxtəlif istiqamətlər üzrə fərqlər-sxemi

quraq (köməkçi $U_{i_1, i_2}^{j+1/2}$ qiymətini daxil etməklə):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{U_{i_1, i_2}^{j+1/2} - U_{i_1, i_2}^j}{\tau/2} - \Lambda_1 U_{i_1, i_2}^{j+1/2} + \Lambda U_{i_1, i_2}^j + f_{i_1, i_2}^j \\ & (i_1 = 1, 2, \dots, n_1 - 1; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n_2 - 1), \\ & U_{i_1, i_2}^{j+1/2} = \overline{\psi}_{i_1, i_2} \quad (i_1 = 0, n_1), \\ & \frac{U_{i_1, i_2}^{j+1} - U_{i_1, i_2}^{j+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 U_{i_1, i_2}^{j+1/2} + \Lambda_2 U_{i_1, i_2}^{j+1} + f_{i_1, i_2}^j \\ & (i_1 = 1, 2, \dots, n_1 - 1; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n_2 - 1), \\ & U_{i_1, i_2}^{j+1} = \psi_{i_1, i_2}^{j+1} \quad (i_2 = 0, n_2), \\ & U_{i_1, i_2}^0 = \varphi_{i_1, i_2} \quad (i_1 = 0, 1, \dots, n_1; \quad i_2 = 0, 1, \dots, n_2). \end{aligned} \right\}$$

Burada

$$f_{i_1, i_2}^j = f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, t_j), \quad \psi_{i_1, i_2}^{j+1} = \psi(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, t_{j+1}),$$

$$\varphi_{i_1, i_2} = \varphi(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), \quad \overline{\psi}_{i_1, i_2} = \frac{\psi_{i_1, i_2}^j + \psi_{i_1, i_2}^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{2} \Lambda (\psi_{i_1, i_2}^{j+1} - \psi_{i_1, i_2}^j).$$

Buradan $U_{i_1, i_2}^{j+1/2}$, U_{i_1, i_2}^{j+1} məchullarını tapmaq üçün aşağıdakı fərqlər

sxemini yazmaq olar:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \Lambda_1 U_{i_1, i_2}^{j+1/2} - U_{i_1, i_2}^{j+1/2} = -F_{i_1, i_2}^j, \quad U_{i_1, i_2}^{j+1/2} = \overline{\psi}_{i_1, i_2} \quad (i_1 = 0, n_1), \\ & \frac{\tau}{2} \Lambda_2 U_{i_1, i_2}^{j+1} - U_{i_1, i_2}^{j+1} = -F_{i_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}}, \quad U_{i_1, i_2}^{j+1} = \psi_{i_1, i_2}^{j+1} \quad (i_2 = 0, n_2). \end{aligned} \right\}$$

Burada

$$F_{i_1, i_2}^j = U_{i_1, i_2}^j + \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 U_{i_1, i_2}^j + f_{i_1, i_2}^j),$$

$$F_{i_1, i_2}^j = U_{i_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} (\Lambda_1 U_{i_1, i_2}^{j+1/2} + f_{i_1, i_2}^j).$$

Bu sistemi həll etmək üçün əvvəlcə qovma üsulunu $i_2 = 1, 2, \dots, n_2 - 1$ sətri, sonra isə $i_1 = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ sütunu üzrə tətbiq etmək lazımdır.

Tapdığımız U_{i_1, i_2}^j qiymətlərini U_{i_1, i_2}^j -nin təqribi qiymətləri kimi

götürülür.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, məsələnin approksimasiyası $\tau^2 + h^2$ tərtibdəndir.

§ 2. Fərqlər sxeminin dayanıqlığı və yığılması

Tutaq ki, G, n -ölçülü Evklid fəzasında sərhədi $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i=1, \dots, m}$ olan oblastdır. Γ sərhədi, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ xətlərdən ibarətdir və bu xətlərin ümumi hissələri də ola bilər, hətta bu xətlər üst-üstə də düşə bilər. Tutaq ki,

$$L(u) = f \quad (6.26)$$

diferensial tənliyinin G oblastında təyin olan elə həlli axtarırlar ki,

$$l_i(u) = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.27)$$

şərtləri ödənsin. Burada f funksiyası G -də φ_i isə Γ_i -də verilmiş funksiyalardır; L və l_i - diferensial operatorlardır.

Qapalı $G + \Gamma$ oblastında, hər bir h ($0 < h < h_0$) üçün çoxluq təyin edək, onu şəbəkə adlandıraraq və G_h ilə işarə edək. L diferensial operatoruna qarşı, L_h fərqlər operatorunu qoyaq. R_h operatoru, G_h -da təyin olunmuş u_h funksiyasını, $G_h^0 \subset G_h$ -da təyin olunmuş $R_h u_h$ funksiyasına çevirir. Fərz edəcəyik ki, ixtiyari $P \in G$ nöqtəsinin ətrafında kafi qədər kiçik h üçün, G_h və G_h^0 -a daxil olan nöqtələr tapılar.

(6.26) tənliyinə qarşı

$$L_h u_h = f_h \quad (6.28)$$

fərqlər tənliyini qoyaq. Burada f_h funksiyası G_h^0 -da təyin olunub və G_h^0 -da f ilə üst-üstə düşür. (6.27) sərhəd şərtlərinə qarşı

$$l_{ih} u_h = \varphi_{ih} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.29)$$

sərhəd fərqlər şərtlərini qoyaq. Burada l_{ih} operatoru G_h -dan götürülmüşdür, Γ_{ih} çoxluqlarında təyin olunub və $u_h \in \Gamma_{ih}$ funksiyasını $\Gamma_{ih}^0 \subset \Gamma_{ih}$ çoxluğunda təyin olunan $l_{ih} u_h$ funksiyasına çevirir. φ_{ih} funksiyası Γ_{ih}^0 -da təyin olunub və müəyyən qayda ilə φ_i funksiyasına qarşı qoyulub. Bu qarşı-qoymalar Γ_i -dəki sərhəd şərtlərinin Γ_{ih} -a köçürülməsindən asılıdır.

(6.28) fərqlər tənliyi və (6.29) fərqlər-sərhəd şərtlərinə birlikdə (6.26),

(6.27) məsələsinə uyğun fərqlər sxemi deyirlər.

Fərz olunur ki, φ_{ih} funksiyaları arasında uzlaşma şərtləri ödənilir, yəni ayrı-ayrı düyün nöqtələri φ_{ih} funksiyalarını bir-birinə bağlayan elə şərtlərin ödəndiyi qəbul olunur ki, onlar (6.29) şərtlərinin heç olmasa bir u_h funksiyasının ödənməsi üçün zəruri və kafi şərtlər olsun.

G oblastında təyin olunan funksiyalar çoxluğunu U və F, Γ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) -lərdə təyin olunan funksiyalar çoxluğunu isə Φ_i ilə işarə edək, belə ki, $L(u)$ operatoru U -dan F -ə, $l_i(u)$ isə U -dan Φ_i -ə təsir edir. Fərz edək ki, bu çoxluqların hər birində norma təyin edilib və bu normaları $\|u\|_U, \|f\|_F, \|\varphi_i\|_{\Phi_i}$ ilə işarə edəcəyik.

Tutaq ki, G_h -da təyin olunan u_h funksiyası üçün $\|u_h\|_{U_h}, G_h^0$ -da təyin olunan f_h funksiyası üçün $\|f_h\|_{F_h}$ və nəhayət, F_{ih}^0 -da təyin olunan φ_{ih} funksiyası üçün $\|\varphi_{ih}\|_{\Phi_{ih}}$ normalarını təyin edək.

Fərz edəcəyik ki, $\|\cdot\|_{U_h}, \|\cdot\|_{F_h}, \|\cdot\|_{\Phi_h}$ normaları elə təyin edilib ki, ixtiyari $u \in U, f \in F$ və $\varphi_i \in \Phi_i$ funksiyaları üçün $h \rightarrow 0$ -da

$$\|u\|_{U_h} \rightarrow \|u\|_U, \|f\|_{F_h} \rightarrow \|f\|_F, \|\varphi_{ih}\|_{\Phi_{ih}} \rightarrow \|\varphi_i\|_{\Phi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

şərtləri ödənsin.

$[l_i(u)]_h$ ilə sərhəd şərtlərinin Γ_i -dən Γ_{ih} -a köçürmə operatorunu işarə edək.

Tərif. İxtiyari $u \in U$ üçün

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L(u) - L_h(u)\|_{F_h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|[l_i(u)]_h - l_{ih}(u)\|_{\Phi_{ih}} = 0$$

şərtləri ödənilirsə, onda deyirlər ki, U çoxluğunda (6.28) fərqlər tənliyi və (6.29) fərqlər sərhəd şərtləri (6.26) diferensial tənliyini və (6.27) sərhəd şərtlərini approksimasiya edir.

Əgər ixtiyari $u \in U$ və $0 < h < h_0$ üçün

$$\|L(u) - L_h(u)\|_{F_h} \leq h^k M,$$

$$\|[l_i(u)]_h - l_{ih}(u)\|_{\Phi_{ih}} \leq h^k M_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad M_i = \text{const}$$

bərabərsizlikləri ödənilirsə, onda deyirlər ki, approksimasiyanın tərtibi k ədədinə bərabərdir.

1. Fərqlər sxeminin dayanıqlığı.

Tərif. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilsə, onda deyirlər ki, (6.28), (6.29)

fərqlər sxemi korrektdir.

1) Kafi qədər kiçik h addımı, ixtiyari f_h və uzlaşma şərtlərini ödəyən ixtiyari φ_{ih} ($i=1,2,\dots,n$) üçün (6.28), (6.29) fərqlər sxeminin həlli var;

2) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var ki, (6.26), (6.27) fərqlər tənliyinin u_h həlli, ixtiyari $\tilde{u}_h$:

$$L_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h, \quad l_{ih}(\tilde{u}_h) = \tilde{\varphi}_{ih} \quad (i=1,2,\dots,m)$$

və bütün h ($0 < h < h_0$) -lar üçün

$$\|f - \tilde{f}\|_{F_h} < \delta, \quad \|\varphi_{ih} - \tilde{\varphi}_{ih}\|_{\Phi_{ih}} < \delta$$

olduqda

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{U_h} < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Bu o deməkdir ki, (6.28), (6.29) fərqlər sisteminin həlli- u_h , tənliyin və sərhəd şərtlərinin sağ tərəflərindən h -a nəzərən müntəzəm olaraq, kəsilməz asılıdır.

Tutaq ki, (6.28), (6.29) fərqlər sxemi xəttidir, onda əgər bu sxemin həlli varsa və ixtiyari f_h və φ_{ih} üçün

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N\|f_h\|_{F_h} + \sum_{i=1}^m N_i \|\varphi_{ih}\|_{\Phi_{ih}}$$

bərabərsizliyi ödəyirsə, onda deyirlər ki, (6.28), (6.29) fərqlər sxemi korrektdir.

Əgər (6.28), (6.29) fərqlər sxeminin həlli varsa və $\|\tilde{f} - f\|_{F_h} < \delta$,

$\tilde{\varphi}_{ih} = \varphi_{ih}$ ($i=1,2,\dots,m$) olduqda

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{U_h} < \varepsilon$$

olursa, onda deyirlər ki, bu sxem sağ tərəfə nəzərən dayanıqlıdır.

Əgər (6.28), (6.29) fərqlər sxeminin həlli varsa və $\tilde{f} = f$

$$\varphi_{ih} = \tilde{\varphi}_{ih} \quad (i=p+1,\dots,m),$$

$$\|\tilde{\varphi}_{ih} - \varphi_{ih}\|_{\Phi_{ih}} < \delta \quad (i=1,2,\dots,p)$$

olduqda,

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{U_h} < \varepsilon$$

olursa, onda deyirlər ki, bu sxem sərhəd şərtlərinə nəzərən dayanıqlıdır.

Əgər fərqlər sxeminə sərhəd şərtləri əvəzinə başlanğıc şərtlər verilibsə, onda eyni qayda ilə başlanğıc şərtlərə nəzərən dayanıqlığın tərifı də verilir. Nəhayət, qeyd edək ki, əgər fərqlər sxemi həm tənliyin sağ tərəfinə və həm də sərhəd şərtlərinin hamısına nəzərən dayanıqlıdırsa, onda sxem korrekt olar.

2. Fərqlər sxeminin yığılması. Aşağıdakı teorem fərqlər sxeminin korrektiliyi ilə yığılması arasındakı əlaqəni verir.

Teorem 6.1. Fərz edək ki, (6.26), (6.27) məsələsinin həlli var və bu həll $-u \in U$. Bundan başqa, fərz edək ki, (6.28), (6.29) fərqlər sxemi (6.26), (6.27) məsələsini U çoxluğunda approksimasiya edir və korrektdir. Onda (6.28), (6.27) fərqlər sxeminin həlli $-u_h, U$ çoxluğunda $h \rightarrow 0$ -da (6.26), (6.27) məsələsinin həllinə yığılır, yəni,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{U_h} = 0.$$

(6.26), (6.27) məsələsi xətti olan halda approksimasiya tərtibi k ədədinə bərabər olarsa, onda yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunar:

$$\|u - u_h\|_{U_h} \leq h^k \left(NM + \sum_{i=1}^m M_i N_i \right),$$

belə ki,

$$\|u\|_U \leq N\|f\|_F + \sum_{i=1}^m N_i \|\varphi_i\|_{\Phi_i}.$$

İsbatı. Tutaq ki, $u \in U$ və

$$L(u) = f, \quad l_i(u) = \varphi_i.$$

Digər tərəfdən

$$[L(u)]_h = L_h(u) + R_h(u),$$

$$[l_i(u)]_{ih} = l_{ih}(u) + r_{ih}(u),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h(u)\|_{F_h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|r_{ih}(u)\|_{\Phi_{ih}} = 0$$

olduğundan

$$\left. \begin{aligned} L_h(u) &= f_h - R_h(u), \\ l_{ih}(u) &= \varphi_{ih} - r_{ih}(u), \end{aligned} \right\}$$

$$\tilde{f}_h = f_h - R_h(u), \quad \tilde{\varphi}_{ih} = \varphi_{ih} - r_{ih}$$

işarələmələrini aparsaq:

$$L_h(u) = \tilde{f}_h, \quad l_{ih}(u) = \tilde{\varphi}_{ih}$$

olduğunu alırıq.

Aşkıdır ki,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{f}_h - f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|R_h(u)\|_{F_h} = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{\varphi}_{ih} - \varphi_{ih}\|_{\Phi_{ih}} = \lim_{h \rightarrow 0} \|r_{ih}\|_{\Phi_{ih}} = 0.$$

Deməli, kafi qədər kiçik h üçün

$$\|\tilde{f}_h - f_h\|_{F_h} < \delta, \quad \|\tilde{\varphi}_{ih} - \varphi_{ih}\|_{\Phi_{ih}} < \delta.$$

(6.28), (6.29) fərqlər sxemi korrekt olduğundan:

$$\|u_h - u\|_{U_h} < \varepsilon,$$

yəni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{U_h} = 0.$$

Teoremin birinci hökmü isbat olundu.

İndi tutaq ki, (6.26), (6.27) məsələsi, deməli həm də (6.28), (6.29) fərqlər sxemi, xəttidir.

$\varepsilon_h = u_h - u$ işarələməsini aparaq. Onda (6.28), (6.29) və (6.30) -dan

$$L_h(u_h) - L_h(u) = f_h - \tilde{f}_h, \\ l_{ih}(u_h) - l_{ih}(u) = \varphi_{ih} - \tilde{\varphi}_{ih}$$

və yaxud

$$L_h(\varepsilon_h) = R_h(u), \quad l_{ih}(\varepsilon_h) = r_{ih}(u)$$

olduğunu alırıq. Məsələnin approksimasiya tərtibi k ədədinə bərabər olduğundan

$$\|L_h(\varepsilon_h)\|_{F_h} \leq h^k M^k, \quad \|l_{ih}(\varepsilon_h)\|_{\Phi_{ih}} \leq h^k M_i \quad (i=1,2,\dots,m). \quad (6.30)$$

Fərqlər sxemi korrekt olduğundan:

$$\|\varepsilon_h\|_{U_h} \leq N \|L_h(u_h)\|_{F_h} + \sum_{i=1}^m N_i \|l_{ih}(u_h)\|_{\Phi_{ih}}.$$

(6.30) bərabərsizliklərini burada nəzərə alsaq:

$$\|u - u_h\|_{U_h} \leq h^k \left(MN + \sum_{i=1}^m M_i N_i \right)$$

olduğunu alırıq.

Nəhayət,

$$\|u\|_{U_h} \leq \|u - u_h\|_{U_h} + \|u_h\|_{U_h} \leq \|u - u_h\|_{U_h} + \\ + N \|L_h(u_h)\|_{F_h} + \sum_{i=1}^m N_i \|l_{ih}(u_h)\|_{\Phi_{ih}}$$

bərabərsizliyində $h \rightarrow 0$ -da limitə keçsək:

$$\|u\|_U \leq N \|f\|_F + \sum_{i=1}^m N_i \|\varphi_i\|_{\Phi_i}.$$

Teorem tamamilə isbat olundu.

Bu teoremdən görünür ki, (6.28), (6.29) fərqlər sxeminin yığıldığını göstərmək üçün bu sxemin korrekliyini göstərmək kifayətdir.

Nəhayət, onu da qeyd edək ki, əgər məsələnin sərhəd şərtləri xətasız approksimasiya olursa, onda sxemin yığıldığını göstərmək üçün sağ tərəfə nəzərən dayanıqlığını göstərmək kifayətdir. Əgər sərhəd şərtlərinin bəzisi xətasız approksimasiya olunursa, onda sxemin dayanıqlığını sağ tərəfə və yerdə qalan sərhəd şərtlərinə görə isbat etmək kifayətdir.

3. **Misal.** Yuxarıda isbat etdiyimiz teoremdən istifadə edib, aşağıdakı məsələ üçün qurulmuş fərqlər sxeminin yığıldığını isbat edək:

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (6.31)$$

$$u(0, t) = \varphi_2(t), \quad u(1, t) = \varphi_3(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Aşkıdır ki, bu məsələ üçün

$$G = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}, \quad \Gamma = \{\Gamma_i\}_{i=0,3},$$

$$\Gamma_0 = \{0 \leq x \leq 1, t = 0\}, \quad \Gamma_1 = \{0 \leq x \leq 1, t = T\},$$

$$\Gamma_2 = \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}, \quad \Gamma_3 = \{x = 1, 0 \leq t \leq T\}$$

$$G_h \text{ ilə } (x_i, t_j) \quad (x_i = ih, t_j = jl; i = 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N);$$

$$h = \frac{1}{M}, \quad l = \alpha h, \quad \alpha = \text{const}, \quad lN \leq T \leq l(N+1) \quad \text{nöqtələr çoxluğunu}$$

işarə edək. G_h^0 ilə (ih, jl) ($i = 1, 2, \dots, M-1; j = 1, 2, \dots, N-1$), Γ_{0h} ilə $(ih, 0)$ ($i = 0, 1, \dots, M$), Γ_{1h} ilə $(ih, 0)$, (ih, l) ($i = 0, 1, \dots, M$), Γ_{2h} ilə $(0, jl)$ ($j = 0, 1, \dots, N$) və nəhayət, Γ_{3h} ilə $(1, jl)$ ($j = 0, 1, \dots, N$) nöqtələri çoxluğunu işarə edək.

Aşkıdır ki,

$$\Gamma_{0h}^0 \equiv \Gamma_{0h}, \quad \Gamma_{1h}^0 \equiv \Gamma_{0h}, \quad \Gamma_{2h}^0 \equiv \Gamma_{2h}, \quad \Gamma_{3h}^0 \equiv \Gamma_{3h}.$$

İndi isə fərqlər operatorlarını təyin edək:

$$L_h u_h \equiv \frac{u_h(x, t+l) - 2u_h(x, t) + u_h(x, t-l)}{l^2} - \frac{u_h(x+h, t) - 2u_h(x, t) + u_h(x-h, t)}{h^2} \quad ((x, t) \in G_h^0),$$

$$l_{0h}(u_h) \equiv u_h(x, 0) \quad ((x, 0) \in \Gamma_{0h}),$$

$$l_{1h}(u_h) \equiv \frac{u_h(x, l) - u_h(x, 0)}{l} \quad ((x, t) \in \Gamma_{1h}),$$

$$l_{2h}(u_h) \equiv u_h(0, t) \quad ((0, t) \in \Gamma_{2h}),$$

$$l_{3h}(u_h) \equiv u_h(1, t) \quad ((1, t) \in \Gamma_{3h}).$$

Aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$f_h(x_i, t_j) = f(ih, jl), \quad \varphi_{0h}(x_i) = \varphi_0(ih),$$

$$\varphi_{1h}(x_i) = \varphi_1(ih) \quad (i = 0, 1, \dots, M);$$

$$\varphi_{2h}(t_j) = \varphi_2(jl), \quad \varphi_{3h}(t_j) = \varphi_3(jl) \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

$(0, 0)$ nöqtəsi Γ_{0h}, Γ_{1h} və Γ_{2h} , $(0, l)$ nöqtəsi isə Γ_{1h} və Γ_{2h} çoxluqlarına daxil olduqlarından, u_h -in qiymətlərini bu nöqtələrdə müxtəlif üsullarla hesablamaq olar:

$$u_h(0, 0) = \varphi_{0h}(0), \quad u_h(0, 0) = \varphi_{2h}(0),$$

$$u_h(0, l) = \varphi_{0h}(0) + l\varphi_{1h}(0), \quad u_h(0, l) = \varphi_{2h}(l).$$

Buradan

$$\varphi_{0h}(0) = \varphi_{2h}(0), \quad \varphi_{0h}(0) + l\varphi_{1h}(0) = \varphi_{2h}(l)$$

olduğunu alırıq. Bu əlaqələndirmə şərtləridir. Eyni qayda ilə digər əlaqələndirmə şərtlərini də almaq olar:

$$\varphi_{0h}(l) = \varphi_{3h}(0), \quad \varphi_{0h}(l) + l\varphi_{1h}(l) = \varphi_{3h}(l).$$

U çoxluğu əvəzinə qapalı $\overline{G}$ oblastında iki tərtibdən kəsilməz törəmələri olan funksiyalar küllüsünü götürək. F əvəzinə G -də təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar və nəhayət, Φ_i əvəzinə Γ_i -də təyin olunmuş kəsilməz funksiyaları götürək. Bu çoxluqlarda normaları aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\|u\|_U = \max_{\overline{G}} |u|, \quad \|f\|_F = \max_{\overline{G}} |f|, \quad \|\varphi_i\|_{\Phi_i} = \max_{\Gamma_i} |\varphi_i|.$$

Aşkardır ki, $h \rightarrow 0$ -da

$$\|u\|_{U_h} \rightarrow \|u\|_U, \quad \|f\|_{F_h} \rightarrow \|f\|_F, \quad \|\varphi_i\|_{\Phi_{ih}} \rightarrow \|\varphi_i\|_{\Phi_i},$$

$$\|L(u) - L_h(u)\|_{F_h} \rightarrow 0, \quad \|[l_i(u)]_{ih} - l_{ih}(u)\|_{\Phi_{ih}} \rightarrow 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Əgər U əvəzinə dörd tərtibdən kəsilməz funksiyalar küllüsünü

götürsək:

$$\|L(u) - L_h(u)\|_{F_h} \leq \frac{h^2}{12} (1 + \alpha^2) M_4,$$

$$\|[l_i(u)]_{ih} - l_{ih}(u)\|_{\Phi_{ih}} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

$$\|[l_i(u)]_{ih} - l_{ih}(u)\|_{\Phi_{1h}} \leq \frac{\alpha h}{2} M_2.$$

Beləliklə, isbat etdik ki,

$$L_h u_h = f_h, \quad l_{ih}(u) = \varphi_{ih} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

fərqlər sxemi (6.31) məsələsinin U -da approksimasiya edir. Bu və daha ümumi fərqlər sxemlərinin dayanıqlığını isbat etmək üsulları haqqında [7] ədəbiyyata bax.

§3. Düz xətlər üsulu

Şəbəkə üsulunu xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərin həllinə tətbiq etdikdə məsələyə daxil olan törəmələri (həm x -ə, həm də y -ə nəzərən) sonlu fərqlərlə əvəz edib, cəbri tənliklər sistemi aldıq və bu sistemin həllini məsələnin dəqiq həllinin düyün nöqtələrdə təqribi qiymətləri kimi götürdük. Düz xətlər üsulunda, şəbəkə üsulundan fərqli olaraq, bir dəyişənə nəzərən törəmələri sonlu fərqlərlə əvəz edib, adi diferensial tənliklər sistemi alırlar və alınan sistemin həllini (əgər onu tapmaq mümkünsə) məsələnin xətlər üzərində təqribi həlli kimi götürürlər.

Bu paraqrafda düz xətlər üsulu Puasson tənliyi üçün Dirixle məsələsinə, simin rəqs tənliyi və istilikkeçirmə tənliyi üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinə tətbiq edilir. Bu üsulu daha ümumi məsələlərin həllinə də tətbiq etmək olar.

1. Puasson tənliyi üçün. Puasson tənliyi üçün Dirixle məsələsinə baxaq. Tutaq ki, $G = \{x_0 \leq x \leq x_0 + X, y_0 \leq y \leq y_0 + Y\}$ oblastında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (6.12)$$

tənliyin elə həllini tapmaq tələb edilir ki,

$$u(x, y_0) = \varphi_0(x), \quad u(x, y_0 + Y) = \varphi_1(x) \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + X),$$

$$u(x_0, y) = \varphi_0(y), \quad u(x_0 + X, y) = \varphi_1(y) \quad (y_0 < y < y_0 + Y),$$

şərtləri ödənsin. Burada $\varphi_i(x), \varphi_i(y)$ ($i = 0, 1$) verilmiş funksiyalardır.

$[y_0, y_0 + Y]$ parçasında $y_k = y_0 + kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n; h = \frac{Y}{n+1}$) nöqtə-

lərini götürsək, $y = y_k$ ($k=1,2,\dots,n$) düz xətlərini çəksək, (6.12) tənliyində $y = y_k$ ($k=1,2,\dots,n$) qəbul etsək və nəhayət,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{y=y_k} \approx \frac{1}{h^2} [u(x, y_{k+1}) - 2u(x, y_k) + u(x, y_{k-1})]$$

düsturundan istifadə etsək:

$$U_k''(x) + \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(x) - 2U_k(x) + U_{k-1}(x)] = f_k(x), \quad (6.14)$$

$$U_0(x) = \varphi_0(x), \quad U_{n+1}(x) = \varphi_1(x),$$

$$U_k(x_0) = \psi_0(y_k), \quad U_k(x_0 + X) = \psi_1(y_k) \quad (6.16)$$

məsələsini almış olarıq. Aşkardır ki, (6.14)-(6.16) məsələsi (6.12)-(6.13) məsələsini h^2 tərtibdən approksimasiya edir.

Əvvəlcə (6.14), (6.15) diferensial tənliklər sisteminə uyğun bircinsli sistemə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} U_k''(x) + \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(x) - 2U_k(x) + U_{k-1}(x)] &= 0 \quad (k=1,2,\dots,n), \\ U_0(x) = U_{n+1}(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

(6.17) sisteminin həllini

$$U_k(x) = \gamma(k)v(x)$$

şəklində axtarsaq:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(k)v''(x) + \frac{1}{h^2} v(x) [\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)] &= 0 \quad (k=1,2,\dots,n), \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

və ya

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{-h^2 \gamma(k)} = \delta^2 = \text{const} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$v''(x) - \delta^2 v(x) = 0, \quad (6.18)$$

$$\gamma(k+1) - (2 - h^2 \delta^2) \gamma(k) + \gamma(k-1) = 0, \quad (6.19)$$

$$\gamma(0) = \gamma(n+1) = 0. \quad (6.20)$$

(6.19) tənliyinin ümumi həllini

$$\gamma(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k \quad (6.21)$$

şəklində axtaraq, burada λ_1, λ_2 aşağıdakı kvadrat tənliyin kökləridir:

$$\lambda^2 - (2 - h^2 \delta^2) \lambda + 1 = 0.$$

(6.20) şərtlərindən

$$\gamma(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 = -c_1,$$

$$\gamma(n+1) = c_1 \lambda_1^{n+1} + c_2 \lambda_2^{n+1} = c_1 (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = 0,$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{n+1} = 1, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2\pi i l}{n+1}} \quad (i = \sqrt{-1}, l = 0, 1, \dots, n)$$

$\lambda_1 \lambda_2 = 1$ olduğundan $\lambda_1^2 = e^{\frac{2\pi i l}{n+1}}$ və

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi i l}{n+1}}$$

olar. λ_1 və λ_2 -ni tapdıqdan sonra δ -nı da tapmaq olar. Doğrudan da, kvadrat tənliyin köklərinin xassəsinə əsasən,

$$2 - h^2 \delta^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\frac{\pi i l}{n+1}} + e^{-\frac{\pi i l}{n+1}} = 2 \cos \frac{\pi l}{n+1}.$$

Buradan da

$$\delta_l^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi l}{2(n+1)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi (y_l - y_0)}{2Y} \quad (l = 0, 1, \dots, n)$$

olduğunu alırıq.

Tapdığımız bu qiymətləri (6.21)-də nəzərə alsaq

$$\gamma_l(k) = c_1 \left(e^{\frac{\pi i l k}{n+1}} - e^{-\frac{\pi i l k}{n+1}} \right), \quad \gamma_l^{(k)} = c \sin \frac{\pi l (y_k - y_0)}{Y}, \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Aşkardır ki, (6.18) tənliyinin həlli

$$v_l(x) = A_l e^{\delta_l x} + B_l e^{-\delta_l x}$$

şəklində olar.

Beləliklə, (6.17) məsələsinin n xətti asılı olmayan xüsusi həllərini tapmış oluruq.

$$v_{k,l}(x) = (A_l e^{\delta_l x} + B_l e^{-\delta_l x}) \sin \frac{\pi l (y_k - y_0)}{Y} \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Aşkardır ki, bu həllərin xətti kombinasiyası, (6.17) məsələsinin ümumi həlli olar:

$$U_k(x) = \sum_{l=1}^n \sin \frac{\pi l}{Y} (y_k - y_0) (A_l e^{\delta_l x} + B_l e^{-\delta_l x}),$$

burada A_l və B_l ixtiyari sabitlərdir.

Diferensial tənliklər kursundan məlum olan sabitin variasiya üsulunu tətbiq edib, bircinsli olmayan (6.14), (6.15) məsələsinin həllini də tapmaq olar. Belə ki, bu həllə daxil olan sabitləri (6.16) şərtlərindən istifadə edib tapmaq olar.

2. Simin rəqs tənliyi. Aşağıdakı kimi qarışıq məsələyə baxaq, $G = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq t < \infty\}$ oblastında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (6.22)$$

tənliyinin elə həllini tapmaq tələb olunur ki,

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x) \quad (0 \leq x \leq X), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u(X, t) = \psi_2(t) \quad (0 \leq t < \infty), \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

burada $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ ($i = 1, 2$) verilən funksiyalardır.

$[0, X]$ parçasında $x_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$; $h = X/(n+1)$) nöqtələri götürsək, $x = x_k$ düz xətlərini çəksək, (6.22) tənliyində $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) qəbul etsək və nəhayət,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} \approx \frac{1}{h^2} [u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t)] \quad (6.24)$$

düsturundan istifadə etsək:

$$\left. \begin{aligned} U_k''(t) - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] &= f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ U_0(t) &= \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t), \\ U_k(0) &= \varphi_1(x_k) = \varphi_{1k}, \\ U_k'(0) &= \varphi_2(x_k) = \varphi_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

məsələsinin, (6.22), (6.23) məsələsini h^2 tərtibdən approksimasiya etdiyini almış olarıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, istər Puasson tənliyini və istərsə də simin rəqs tənliyini approksimasiya etdikdə, alınan sistemi mürəkkəbləşdirməklə approksimasiya tərtibini artırmaq olar. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} &u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t) = \\ &= \frac{5h^2}{6} \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2} \right] + O(h^6) \end{aligned}$$

bərabərliyindən və (6.22) tənliyindən aldığımız

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} - f(x_k, t) = u_k''(t) - f_k(t)$$

bərabərliyindən istifadə etsək:

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6} u_k''(t) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + \\ &+ u_{k-1}(t)] = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)] + O(h^4) \end{aligned}$$

və buradan da

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6} U_k''(t) + \frac{1}{12} [U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = \\ &= \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)] \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t),$$

$$U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1k}, \quad U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

olduğunu alırıq. Aşkıdır ki, bu sistemin approksimasiya tərtibi h^4 -ə bərabərdir.

Birinci bənddə tətbiq etdiyimiz qayda ilə (6.25) və (6.26) məsələlərinin ümumi həllərini tapmaq olar. Bu məsələlərə uyğun bircinsli məsələlərin ümumi həlləri, uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla təyin olunurlar

$$\left. \begin{aligned} U_k(t) &= \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi l x_k}{X} (A_l \cos \delta_l t + B_l \sin \delta_l t), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \delta_l^2 &= \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{2X} x_l}{h^2} \end{aligned} \right\}$$

və

$$\begin{aligned} U_k(t) &= \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi l x_k}{X} (A_l' \cos \delta_l' t + B_l' \sin \delta_l' t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \delta_l'^2 &= \frac{24 \sin^2 \frac{\pi x_l}{2X}}{h^2 \left(5 + \cos \frac{\pi x_l}{X} \right)}. \end{aligned}$$

3. İstilik keçirmə tənliyi üçün. Aşağıdakı qarışıq məsələyə baxaq. $G = \{0 \leq x \leq X, t \geq 0\}$ oblastında

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (6.27)$$

tənliyinin elə həllini tapmaq tələb olunur ki,

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq X), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u(X, t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

şərtləri ödənsin; burada $\varphi(x), \psi_i(t)$ ($i = 1, 2$) verilmiş funksiyalardır.

$[0, X]$ parçasında $x_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots, n+1; h = X/(n+1)$) nöqtələrini götürsək, $x = x_k$ düz xətlərini çəksək, (6.27) tənliyində $x = x_k$ $k = 1, 2, \dots, n+1$ qəbul etsək və nəhayət, (6.24) düsturundan istifadə etsək

$$\left. \begin{aligned} U'_k(t) - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] &= f_k(t), \\ U_k(0) &= \varphi(x_k) = \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ U_0(t) &= \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

məsələsinin, (6.27), (6.28) məsələsinin h^2 tərtibdən approksimasiya etdiyini almış olarıq (ikinci bənddə olduğu kimi, burada da approksimasiya tərtibini artırmaq olar).

(6.29) məsələsinə uyğun bircinsli məsələnin xüsusi həllini

$$U_k(t) = \gamma(k)v(t)$$

şəklində axtarsaq, $\gamma(k)$ -ni tapmaq üçün aşağıdakı fərqlər tənliyini

$$\left. \begin{aligned} \gamma(k+1) - (2 - \delta^2 h^2) \gamma(k) + \gamma(k-1) &= 0, \\ \gamma(0) &= \gamma(n+1) = 0, \end{aligned} \right\}$$

$v(t)$ -ni tapmaq üçün isə

$$v'(t) = -\delta^2 v(t)$$

tənliyini almış olarıq. Bu halda (6.29) məsələsinə uyğun bircins məsələsinin ümumi həllinin

$$\left. \begin{aligned} v_k(t) &= \sum_{l=1}^n c_l \sin \frac{\pi l x_k}{X} e^{-\delta_l^2 t} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \delta_l^2 &= \frac{4 \sin^2 \frac{\pi x_l}{2X}}{h^2} \quad (l = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\}$$

şəklində olduğu alınır. (6.27), (6.28) məsələsinin həllini isə sabitin

variasiya üsulunu tətbiq etməklə tapmaq olar.

4. Xətanın qiymətləndirilməsi. İndi isə (6.27), (6.28) məsələsinə düz xətlər üsulunu tətbiq etdikdə alınan xətanı qiymətləndirək. Eyni qayda ilə (6.12), (6.13) və (6.22), (6.23) məsələləri üçün də düz xətlər üsulunun xətasını qiymətləndirmək olar.

Fərz edək ki, (6.27), (6.28) məsələsinin həlli var və bu həllin x -ə nəzərən dördüncü tərtibdən kəsilməz törəməsi var. Onda

$$\left. \begin{aligned} u'_k(t) - \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] &= f_k(t) + R_k(t), \\ u_k(0) &= \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ u_0(t) &= \psi_1(t), \quad u_{n+1}(t) = \psi_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Burada $u_k(t) = u(x_k, t)$ və $R_k(t) = O(h^2)$. $\varepsilon_k(t) = u_k(t) - U_k(t)$ işarələməsini aparsaq (6.29) və (6.30)-dan

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_k(t) - \frac{1}{h^2} [\varepsilon_{k+1}(t) - 2\varepsilon_k(t) + \varepsilon_{k-1}(t)] &= R_k(t), \\ \varepsilon_k(0) &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \varepsilon_0(t) = 0, \quad \varepsilon_{n+1}(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

olduğunu alırıq.

Biz hissə-hissə inteqrallama düsturuna analoji olan hissə-hissə cəmləmə düsturundan

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \Delta \delta_k = - \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k$$

istifadə edəcəyik. Burada $\Delta \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$.

Bu düsturun doğruluğunu isbat etmək üçün aşağıdakı aşkar düsturdan istifadə edək:

$$\varepsilon_k \Delta \delta_k = \Delta(\varepsilon_k \delta_k) - \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \Delta \delta_k &= \sum_{k=0}^n \Delta(\varepsilon_k \delta_k) - \sum_{k=0}^n \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k, \\ \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \Delta \delta_k &= \varepsilon_{n+1} \delta_{n+1} - \varepsilon_0 \delta_0 - \sum_{k=0}^n \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k. \end{aligned}$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = 0$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \Delta \delta_k = - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{k+1} \Delta \varepsilon_k.$$

$\delta_k = \Delta \varepsilon_{k-1}$ götürsək

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \Delta^2 \varepsilon_{k-1} = - \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta \varepsilon_k)^2. \quad (6.32)$$

Bu düsturdan istifadə edib xətanı qiymətləndirək.

(6.31) tənliklər sisteminin hər tərəfini $\varepsilon_k(t)$ -ə vuraq:

$$\frac{1}{2} [\varepsilon_k^2(t)]' - \frac{\Delta^2 \varepsilon_{k-1}(t)}{h^2} \varepsilon_k(t) = R_k(t) \varepsilon_k(t)$$

və k -ya 1-dən $(n-1)$ -ə qədər qiymətlər verib, alınan bərabərlikləri cəmləyək:

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right]' - \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k(t) \Delta^2 \varepsilon_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} R_k(t) \varepsilon_k(t).$$

(6.32) düsturunu burada nəzərə alsaq

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right]' + \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{n-1} [\Delta \varepsilon_k]^2 = \sum_{k=1}^{n-1} R_k(t) \varepsilon_k(t)$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$\left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right]' \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} R_k(t) \varepsilon_k(t), \quad \left[\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \right]' \leq \sum_{k=1}^{n-1} R_k^2(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t),$$

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq E(t) + R, \quad E(0) = 0, \quad E(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t), \quad R = \max_t \sum_{k=1}^{n-1} R_k^2(t).$$

Bu bərabərsizliyi həll edək. Bunun üçün bərabərsizliyin hər tərəfini e^t funksiyasına vursaq:

$$\left(\frac{dE}{dt} - E \right) e^{-t} \leq R e^{-t}, \quad \frac{d[e^{-t} E(t)]}{dt} \leq R e^{-t},$$

$$e^{-t} E(t) \leq R(1 - e^{-t}), \quad E(t) \leq R(e^t - 1)$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə, üsulun xətası aşağıdakı düsturla qiymətləndirilir:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2(t) \leq (e^t - 1) \sum_{k=1}^{n-1} \max_t R_k^2(t) \leq c(e^t - 1)h^3, \quad c = \text{const.}$$

Nəhayət, qeyd edək ki, düz xətlər üsulunu xüsusi törəməli diferensial tənliklərə tətbiq etdikdə hansı dəyişənə nəzərən bu üsulu tətbiq etməyə xüsusi diqqət yetirmək lazımdır. Düz xətlər üsulu o arqumentə nəzərən tətbiq edilir ki, alınan diferensial tənliklər sistemi ya dəqiq həll edilsin, ya

da, heç olmasa, sadə şəkil alsın. Bu paraqrafın birinci bəndində hansı dəyişənə nəzərən üsulu tətbiq etməyin mənası yoxdur. Çünki hər iki halda eyni məsələ alınır. İkinci və üçüncü bəndlərdə isə mənası var. Simin rəqs tənliyinə x -ə nəzərən tətbiq etdikdə iki tərtibli diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsi aldıq, y -ə nəzərən tətbiq etsəydik sərhəd məsələsi alardıq. Məlumdur ki, birinci halda məsələ nisbətən asan həll edilir. İstilikkeçirmə tənliyində isə x -ə nəzərən düz xətlər üsulunu tətbiq etdikdə bir tərtibli tənliklər sistemi aldıq. Əgər t -ə nəzərən tətbiq etsəydik iki tərtibli diferensial tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsi alardıq.

Əgər düz xətlər üsulunu tətbiq etdikdən sonra alınan diferensial tənliklər sistemi dəqiq həll edilmirsə, onda bu sistemə V fəsildə verdiyimiz təqribi üsullardan birini tətbiq etmək olar.

5. İntegral münasibətləri üsulu. Aşağıdakı kimi Qursa məsələsinə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y) \quad (0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y). \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

$y = y_j = jh$, $h = \frac{Y}{n}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ düz xətləri vasitəsilə $[0, X] \times [0, Y]$ düzbucaqlısını n zolağa bölərək, (6.33) tənliyini hər zolaq boyunca inteqrallasaq və nəhayət, $u(x, y)$ funksiyasını hər bir zolağın sərhədi üzrə xətti interpolyasiya ilə əvəz etsək, (6.33) məsələsinin u_j təqribi həllini tapmaq üçün adi diferensial tənliklər sistemi üçün aşağıdakı məsələni almış olarıq:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1} u'_{i+1}(x) - \beta_i u'_i(x) &= \gamma_{i+1} u_{i+1}(x) + \delta_i u_i(x) + f_{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \\ u_i(x) &= \varphi(x), \quad u_i(0) = \psi(y_i), \quad (i=0, 1, \dots, n). \end{aligned} \right\}$$

Burada $\alpha_{i+1}, \beta_i, \gamma_{i+1}, \delta_i, f_{i+1}$ əmsalları a, b, c, f funksiyalarından asılıdırlar.

Aşkardır ki, (6.33) məsələsinin approksimasiyası h^3 tərtibdən olar. Əgər (6.33) məsələsinə düz xətlər üsulunu (y -ə nəzərən) tətbiq etmiş olsaydıq, məsələnin approksimasiyası h^2 tərtibdən olardı. Lakin qeyd etmək lazımdır ki, düz xətlər üsulunu tətbiq dairəsi daha genişdir.

§ 4. Rits üsulu

Sərhədi Γ olan sonlu G oblastında

$$L(u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu = f \quad (6.34)$$

tənliyinə baxaq. Burada p funksiyası $G + \Gamma$ oblastında kəsilməz diferensiallanan müsbət funksiya; q və f funksiyaları $(G + \Gamma)$ -də kəsilməzdirlər və $q > 0$.

(6.34) tənliyinin elə həllini tapmaq tələb olunur ki,

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (6.35)$$

sərhəd şərti ödənsin. Biz burada ümumiliyi pozmadan sərhəd şərtini sıfır götürmüşük. Əks halda əvəzləmə vasitəsilə buna nail olmaq olar.

(6.34), (6.35) məsələsinə Rits üsulunu tətbiq etmək üçün V fəsilə operator tənliklər üçün isbat etdiyimiz teoremdən istifadə etmək lazımdır.

$H = L^2(G)$ və $A(u) = L(u)$ götürək. A operatorunun təyin oblastı $-H_A$ elə $u(x, y) \in L^2(G)$ funksiyalar çoxluğudur ki, bu funksiyaların ikinci tərtibdən törəmələri var, bu törəmələr $L^2(G)$ fəzasına daxildir və (6.35) şərtini ödəyirlər.

İsbat edək ki, $A(u)$ operatoru H_A -da simmetrik və müsbət-müəyyəndir.

Tutaq ki, $u(x, y), v(x, y) \in H_A$. Onda (6.35) şərtini nəzərə almaqla Qrin düsturunu tətbiq etsək:

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_G v Au \, dx dy = - \int_G v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] x \, dx dy + \\ &+ \int_G quv \, dx dy = - \int_G p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ \int_G quv \, dx dy = \int_G u Av \, dx dy = (u, Av) \end{aligned}$$

olduğunu alırıq ki, bu da A operatorunun H_A -da simmetrik operator olduğunu göstərir.

İndi isə isbat edək ki, $A(u)$ operatoru müsbət-müəyyəndir. Tutaq ki, $u(x, y) \in H_A$. Onda, (6.35) şərtini nəzərə almaqla, Qrin düsturunu tətbiq etsək:

$$\begin{aligned} (Au, u) &= \int_G u Au \, dx dy = - \int_G u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy + \\ &+ \int_G qu^2 \, dx dy = \int_G \left\{ p \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + qu^2 \right\} dx dy > \\ &> \int_G qu^2 \, dx dy \geq q_0 \int_G u^2 \, dx dy = q_0(u, u) \end{aligned}$$

olduğunu alırıq ki, bu da A operatorunun müsbət-müəyyən olduğunu göstərir, çünki

$$q_0 = \min q(x, y) > 0.$$

$A(u) \equiv L(u)$ operatoru üçün

$$J(u) = (Au, u) - 2(f, u)$$

funksionalını hesablasaq:

$$J(u) = \int_G \left\{ p \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + qu^2 - 2fu \right\} dx dy$$

olduğunu alırıq.

Teorem 5.5-ə əsasən (6.34), (6.35) məsələsinin həllini tapmaq üçün bu funksionala minimum verən nöqtəni tapmaq lazımdır. Teorem 5.6-ya əsasən isə bu funksionalı minimumlaşdıran ardıcılıq qurmaq kifayətdir.

Beləliklə, (6.34), (6.35) məsələsinin təqribi həllini tapmaq üçün minimumlaşdıran ardıcılıq quraq.

Aşağıdakı şərtləri ödəyən $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$ funksiyalar sisteminə baxaq:

1) $\varphi_i(x, y)$ funksiyalarının $G + \Gamma$ oblastında ikinci tərtibdən kəsilməz törəmələri var;

2) $\varphi_i(x, y)$ funksiyaları (6.35) sərhəd şərtini ödəyir;

3) $\{\varphi_i(x, y)\}$ funksiyalar sisteminin ixtiyari sonlu saydakı xətti asılı deyil;

4) ixtiyari $u \in L_2(G)$ və $\varepsilon > 0$ üçün elə $b_1, b_2, \dots, b_m$ tapmaq olar ki,

$$\int_G \left[u - \sum_{i=1}^m b_i L(\varphi_i) \right]^2 dx dy < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənsin.

Minimallaşdırma ardıcılığının n -ci həddini

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y)$$

şəklində axtaraq. a_i ($i=1, 2, \dots, n$) parametrlərini elə seçək ki,

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Onda:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} a_j = B_j \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (6.36)$$

Burada

$$A_{ij} = \iint_G \left\{ q \varphi_j - \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \right\} \varphi_i dx dy,$$

$$B_i = \iint_G f \varphi_i dx dy \quad (i, j=1, 2, \dots, n).$$

$\{\varphi_i\}_{i=1, n}$ – xətti asılı olmayan sistem təşkil etdiyindən, (6.36) sisteminin

yeganə həlli var. a_i -lərin tapılan bu qiymətlərini

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y)$$

düsturunda yerinə yazsaq, minimumlaşdırma ardıcılığını tapmış oluruq. Teorem 5.6-ya əsasən bu $u_n(x, y)$ funksiyasını (6.34), (6.35) məsələsinin təqribi həlli kimi götürmək olar.

§5. Kvazixətti hiperbolik tipli tənliklər üçün xarakteristika üsulu

1. Tənliklər sisteminin həllinə uyğun xarakteristika. Aşağıdakı kimi n sayda birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər sisteminə baxaq:

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6.37)$$

Burada a_{ij}, b_{ij}, c_i funksiyaları $x, y, u_1, u_2, \dots, u_n$ dəyişənlərindən asılıdır və bu dəyişənlərə nəzərən kəsilməz diferensiallanandırırlar. a_{ij}, b_{ij}, c_i

funksiyaları naməlum $u_1, u_2, \dots, u_n$ funksiyalarından da qeyri-xətti asılı olduqlarından, bu sistemə kvazixətti sistem deyirlər.

Tutaq ki, (x, y) müstəvisinin G oblastında kəsilməz diferensiallanan $u_1(x, y), \dots, u_n(x, y)$ funksiyaları (6.37) sisteminin həllidir. C ilə G oblastına daxil olan və təkrar nöqtələri olmayan hamar əyrini işarə edək.

Aşağıdakı məsələyə baxaq: (6.37) sistemindən və $u(x, y), \dots, u_n(x, y)$ həllinin C əyrisi üzərindəki qiymətindən istifadə edərək,

$$p_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_C, \quad q_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} \Big|_C$$

xüsusi törəmələrini tapmalı.

Aşkardır ki,

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} p_j + b_{ij} q_j) = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (x, y) \in (C), \quad (6.38)$$

burada əmsallar C əyrisi üzrə hesablanır və

$$p_i dx + q_i dy = du_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6.39)$$

burada diferensial C əyrisi boyunca götürülür.

Beləliklə, p_i, q_i ($i=1, 2, \dots, n$) məchullarını tapmaq üçün $2n$ sayda xətti tənliklər sistemi almış oluruq.

Fərz edək ki, C əyrisi üzərində baxdığımız nöqtədə $dx \neq 0$. Onda (6.39)-dan

$$p_i = -q_i \frac{dy}{dx} + \frac{du_i}{dx} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.40)$$

olar. Bu qiymətləri (6.38)-də nəzərə alsaq:

$$\sum_{j=1}^n (b_{ij} dx - a_{ij} dy) q_j = c_i dx - \sum_{j=1}^n a_{ij} du_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.41)$$

olduğunu alırıq.

Əgər bu sistemdən q_i -ləri tapmaq mümkün olsa, onda (6.40)-dan p_i -ləri də tapmaq olar.

$dx = 0$ olsa, $dy \neq 0$ olar. Onda (6.39)-dan

$$q_i = -p_i \frac{dx}{dy} + \frac{du_i}{dy} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Bu qiymətləri (6.38)-də nəzərə alsaq:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}dy - b_{ij}dx)p_j = c_i dy - \sum_{j=1}^n b_{ij}du_j \quad (i=1,2,\dots,n)$$

olduğunu alırıq. Bu sistemin determinantı (6.41) sisteminin determinantından yalnız işarə ilə fərqlənə bilər.

(6.41) sisteminin determinantını Δ ilə işarə edək, onda

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}dx - a_{11}dy & b_{12}dx - a_{12}dy & \dots & b_{1n}dx - a_{1n}dy \\ b_{21}dx - a_{21}dy & b_{22}dx - a_{22}dy & \dots & b_{2n}dx - a_{2n}dy \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}dx - a_{n1}dy & b_{n2}dx - a_{n2}dy & \dots & b_{nn}dx - a_{nn}dy \end{vmatrix}.$$

Aşağıdakı hallara baxaq:

- 1) C əyrisinin heç bir nöqtəsində Δ sıfır ola bilməz.
- 2) C əyrisinin bütün nöqtələrində Δ sıfıra bərabərdir.

Birinci halda (6.41) sisteminin yeganə həlli var. Deməli, C əyrisi üzrə (6.37) sisteminin həlli məlum olsa, bu əyri üzrə həllin törəmələrini də birqiymətli tapmaq olar.

Tutaq ki, $\Delta \equiv 0$. (6.37) diferensial tənliklər sisteminin həlli olduğundan (6.41) sisteminin də həlli olmalıdır.

Δ determinantı sıfır olduğundan bu sistemin sonsuz sayda həlli olar. Beləliklə, ikinci halda p_i və q_i -ləri birqiymətli tapmaq olmaz. Bu halda C əyrisinə (6.37) sisteminin verilmiş həllinə uyğun xarakteristikası deyirlər.

C əyrisinə toxunanla x oxu arasındakı bucağın tangensi $\lambda = dy/dx$ aşağıdakı tənliyi ödəyir:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} & \dots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} & \dots & b_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & b_{n2} - \lambda a_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.42)$$

Qeyd olunmuş $(x, y, u_1, \dots, u_n)$ nöqtəsində bu tənlik.

λ -ya nəzərən n dərəcəli tənlikdir. Əgər (6.42) tənliyinin y nöqtədə n müxtəlif kökü varsa, onda (6.37) sistemə hiperbolik sistem deyirlər.

(6.42) tənliyinin köklərini $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ilə işarə edək. (6.37) sisteminin $u_1(x, y), \dots, u_n(x, y)$ həlli üçün λ_i -lər x və y -dən asılı funksiyalardır. Beləliklə, aşağıdakı diferensial tənlikləri almış olarıq:

$$dy = \lambda_i(x, y)dx \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.43)$$

(6.37) sisteminin hər bir həlli üçün (6.43) diferensial tənliklər sistemini həll edib n xarakteristika tapmış olarıq.

G oblastının hər bir nöqtəsindən yalnız və yalnız bir xarakteristika keçəcəkdir.

Tutaq ki, C əyrisi (6.37) sisteminin $u_1(x, y), \dots, u_n(x, y)$ həllinə uyğun xarakteristikadır.

C əyrisi üzərində $\Delta = 0$ və (6.41) sistemi birgə olduğundan, Δ determinantının k -nıncı sütun ünsürlərini uyğun olaraq bu sistemin sağ tərəfindəki ünsürlərlə əvəz etsək, alınan determinant - Δ_k -da sıfıra çevrilməlidir:

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0. \quad (6.44)$$

(6.37) sistemi hiperbolik olduğundan, C əyrisinin nöqtələrində

$$\begin{pmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} & \dots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} & \dots & b_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & b_{n2} - \lambda a_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin rangı $n-1$ olar. Bu halda, bu matrisin sütunlarından birini, (6.37) sisteminin sağ tərəfinin ünsürləri ilə əvəz etdikdə alınan matrisin rangı da $n-1$ olar. Tutaq ki, bu matris Δ_k -dir. Onda

$$\Delta = 0, \quad \Delta_k = 0 \quad (6.45)$$

şərtlərindən (6.44)-ün qalan şərtləri alınar.

Deməli, C xarakteristikası üzərində $u_1(x, y), \dots, u_n(x, y)$ həlli (6.45) şərtləri ilə bağlıdır. Bu şərtlərə xarakteristik tənliklər deyirlər. Bu şərtlərdən birincisinə xarakteristikanın istiqaməti tənliyi, ikincisinə isə xarakteristika üzərində diferensial münasibət deyirlər.

İndi isə iki xüsusi hala baxaq.

$n=1$. Bu halda (6.37) sistemi

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c$$

şəklində, xarakteristikanın istiqamətinin tənliyi

$$b dx - a dy = 0$$

şəklində, və nəhayət, diferensial münasibət

$$c dx - a du = 0$$

şəklində olar.

$n=2$. Bu halda (6.37) sistemi

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{12} \frac{\partial u_2}{\partial y} &= c_1, \\ a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

şəklində olar.

Xarakteristikanın istiqamətləri aşağıdakı tənliklərlə təyin edilir:

$$dy - \lambda_i dx = 0 \quad (i=1,2),$$

burada λ_i

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.47)$$

tənliyinin kökləridir.

Xarakteristika üzərində diferensial münasibət

$$\begin{vmatrix} c_1 dx - a_{11} du_1 - a_{12} du_2 & b_{12} - \lambda_i a_{12} \\ c_2 dx - a_{11} du_1 - a_{22} du_2 & b_{22} - \lambda_i a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

və ya

$$(\lambda_i A + B) du_1 + c du_2 + M dx + N dy = 0 \quad (6.48)$$

şəklində olar. Burada

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{11} \\ b_{22} & a_{21} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (6.49)$$

$$M = \begin{vmatrix} c_1 & b_{12} \\ c_2 & b_{22} \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} a_{12} & c_1 \\ a_{22} & c_2 \end{vmatrix}.$$

2. İki tərtibli tənlik üçün xarakteristika. İndi iki tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliyə baxaq:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f. \quad (6.50)$$

Burada a, b, c, f funksiyaları $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ -dən asılı olub, kəsilməz diferensiallanandırılar. (6.50) tənliyinə kvazixətti tənlik deyirlər.

Tutaq ki, (x, y) müstəvisinin G oblastında iki tərtibdən kəsilməz törəmələri olan $u(x, y)$ funksiyası (6.50) tənliyinin həllidir. C ilə G oblastına daxil olan və təkrar nöqtələri olmayan hamar əyrini işarə edək.

Aşağıdakı məsələyə baxaq: (6.50) tənliyindən və $u(x, y)$ həllinin,

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ törəmələrinin C əyrisi üzərindəki qiymətindən istifadə edərək,

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_C, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_C, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_C$$

xüsusi törəmələrini tapmalı.

Aşkardır ki,

$$\left. \begin{aligned} ar + 2bs + ct &= f, \\ r dx + s dy &= dp, \\ s dx + t dy &= dq, \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

burada əmsallar C əyrisi üzrə hesablanır və diferensiallar bu əyri boyunca götürülür. (6.51) sistemi r, s, t məchullarına nəzərən xətti bircinsli olmayan sistemdir. Bu sistemin determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = a(dy)^2 - 2b dx dy + c(dx)^2$$

düsturu ilə hesablanır.

$\Delta|_C \neq 0$ olduqda r, s, t (6.51) sistemindən birqiymətli təyin olunurlar.

$\Delta|_C \equiv 0$ halına baxaq. (6.50) tənliyinin həlli olduğundan, (6.51) sisteminin də həlli olmalıdır. $\Delta|_C \equiv 0$ olduğundan bu sistemin sonsuz sayda həlli olar.

Deməli, $\Delta|_C \equiv 0$ olduqda r, s, t məchullarını birqiymətli tapmaq olmaz. Bu halda C əyrisinə (6.50) tənliyinin həllinin xarakteristikası deyirlər.

Əgər C əyrisi (6.50) tənliyinin həlli üçün xarakteristikadırsa, onda

$$a(dy)^2 - 2b dx dy + c(dx)^2 = 0$$

və ya

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c = 0 \quad (6.52)$$

olar. Bu tənliyi həll etsək,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Əgər $b^2 - ac > 0$ isə, onda iki birtərtibli adi diferensial tənliklər alırıq. Bu tənliklər inteqral əyriləri ailəsi təşkil edir. Bu əyrilər ailələrini (6.50) tənliyinin həllinə uyğun xarakteristikaları ailəsi adlandırırlar. G oblastının hər bir nöqtəsindən bu ailələrin hər birindən ancaq bir xarakteristika keçir.

Əgər (6.52) tənliyinin $\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ nöqtəsində $\frac{\partial y}{\partial x}$ -ə nəzərən iki müxtəlif kökü varsa, onda (6.50) tənliyinə **hiperbolik** tənlik deyirlər.

Tutaq ki, C verilmiş $u(x, y)$ həlli üçün xarakteristikasıdır. Onda (6.51) sistemi birgə olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c & f \\ dx & dy & 0 & dp \\ 0 & dx & dy & dq \end{pmatrix}$$

matrisinin üç tərtibli determinantlarının hamısı C əyrisi üzərində sıfıra çevrilir:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2b & c & f \\ dy & 0 & dp \\ dx & dy & dq \end{vmatrix} = c(dp dx - dq dy) - 2b dp dy + f(dy)^2 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & c & f \\ dx & 0 & dp \\ 0 & dy & dq \end{vmatrix} = -c dq dx - a dp dy + f dx dy = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 2b & f \\ dx & dy & dp \\ 0 & dx & dq \end{vmatrix} = a(dq dy - dp dx) - 2b dq dx + f(dx)^2 = 0.$$

Bu tənliklərdən və (6.52)-dən

$$(a dp - f dx)(b \pm \sqrt{b^2 - ac}) + ac dq = 0$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə

$$ady - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})dx = 0,$$

$$(a dp - f dx)(b \pm \sqrt{b^2 - ac}) + ac dq = 0,$$

$$du = p dx + q dy$$

tənliklərini almış oluruq. Bu tənliklərə xarakteristik tənliklər deyirlər. Bu tənliklərdən birinci ikisinə xarakteristikanın istiqamət tənlikləri, axırıncı ikisinə isə xarakteristika boyunca diferensial münasibətləri deyirlər.

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

işarələmələrini aparsaq, xarakteristik tənlikləri aşağıdakı kimi yazmaq olar.

Birinci ailə üçün:

$$dy - \lambda_1 dx = 0, \quad a(dp + \lambda_2 dq) - f dx = 0, \\ du = p dx + q dy.$$

İkinci ailə üçün:

$$dy - \lambda_2 dx = 0, \quad a(dp + \lambda_1 dq) - f dx = 0, \\ du = p dx + q dy.$$

3. Tənliklər sistemi üçün Masso üsulu. Sadəlik üçün iki məchullu kvazixətti hiperbolik tənliklər sisteminə - (6.46) baxaq:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= c_1, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= c_2. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistem üçün qoyulmuş məsələlərin təqribi həllərini tapmaq üçün Masso üsulunu tətbiq edək.

Əvvəlcə (x, y) müstəvisində bir-birinə yaxın iki $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ nöqtələrini götürək. Tutaq ki, bu nöqtələrdə verilmiş sistemin həlli məlumdur. Xüsusi qayda ilə seçilmiş üçüncü $A_3(x_3, y_3)$ nöqtəsində sistemin təqribi həllini tapmaq üsulunu verək. A_1 nöqtəsindən birinci ailənin xarakteristikalarının istiqamətində, A_2 nöqtəsindən isə ikinci ailənin xarakteristikalarının istiqamətində düz xətlər keçirək. (6.48) sistemi hiperbolik olduğundan bu düz xətlər hər hansı bir $A_3(x_3, y_3)$ nöqtəsində kəsişəcəklər. Bu nöqtənin koordinatları aşağıdakı sistemdən tapılar:

$$\left. \begin{aligned} y_3^{(1)} - y_1 &= \lambda_{11}^{(1)}(x_1^{(1)} - x_1), \\ y_3^{(1)} - y_2 &= \lambda_{22}^{(1)}(x_3^{(1)} - x_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

Burada $\lambda_{11}^{(1)}$ – birinci ailənin xarakteristikasına A_1 nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalı, $\lambda_{22}^{(1)}$ isə ikinci ailənin xarakteristikasına A_2 nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalıdır. $\lambda_{11}^{(1)}$ və $\lambda_{22}^{(1)}$ ədədləri A_1 və A_2 nöqtələrində (6.47) tənliyinin uyğun kökləridir. (6.48) diferensial münasibətlərinə daxil olan diferensialları sonlu fərqlərlə əvəz etsək, $u(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$, $v(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ məchullarını tapmaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini almış olarıq:

$$\left. \begin{aligned} &(\lambda_{11}^{(1)} A_1^{(1)} + B_1^{(1)})[u(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}) - u(x_1, y_1)] + \\ &+ C_1^{(1)}[v(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}) - v(x_1, y_1)] + M_1^{(1)}(x_3^{(1)} - x_1) + N_1^{(1)}(y_3^{(1)} - y_1) = 0, \\ &(\lambda_{22}^{(1)} A_2^{(1)} + B_2^{(1)})[u(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}) - u(x_2, y_2)] + \\ &+ C_2^{(1)}[v(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}) - v(x_2, y_2)] + M_2^{(1)}(x_3^{(1)} - x_2) + N_2^{(1)}(y_3^{(1)} - y_2) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Burada $A_i^{(1)}, B_i^{(1)}, C_i^{(1)}, M_i^{(1)}, N_i^{(1)}$ ($i=1,2$) (6.49) determinantlarının A_i nöqtələrində qiymətləridir. Bu sistemi həll edib, $u(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ və $v(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ tapmış olarıq.

Tapdığımız $u(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ $v(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ (6.50) sisteminin həllinin (x_3, y_3) nöqtəsində təqribi qiymətini tapmaq üçün birinci yaxınlaşmadır. Çünki, A_1 və A_2 nöqtələrindən çıxan xarakteristikaları düz xətlərlə əvəz etdiyimizdən, tapdığımız bu qiymət həllin dəqiq qiymətindən çox uzaq ola bilər. Bu qiymətləri dəqiqləşdirmək üçün birinci və ikinci ailələrin xarakteristikalarını A_3 nöqtəsində qiymətlərini- $\lambda_{13}^{(1)}, \lambda_{23}^{(1)}$ bilərəkdən, aşağıdakı qiymətləri hesablamaq lazımdır:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^{(1)} + \lambda_{13}^{(1)}), \quad \lambda_{23}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_{22}^{(1)} + \lambda_{23}^{(1)}), \\ A_i^{(2)} &= \frac{1}{2}(A_i^{(1)} + A_3^{(1)}), \quad B_i^{(2)} = \frac{1}{2}(B_i^{(1)} + B_3^{(1)}), \\ C_i^{(2)} &= \frac{1}{2}(C_i^{(1)} + C_3^{(1)}), \quad M_i^{(2)} = \frac{1}{2}(M_i^{(1)} + M_3^{(1)}), \\ N_i^{(2)} &= \frac{1}{2}(N_i^{(1)} + N_3^{(1)}) \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

Burada $A_3^{(1)}, B_3^{(1)}, C_3^{(1)}, M_3^{(1)}, N_3^{(1)}$ ədədləri A, B, C, M, N funksiyalarının $(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}, u_3^{(1)}, v_3^{(1)})$ nöqtəsində qiymətləridir.

Bu hesablamalardan sonra ikinci yaxınlaşmalar aşağıdakı düsturla tapılar:

$$\left. \begin{aligned} y_3^{(2)} - y_1 &= \lambda_{11}^{(2)}(x_3^{(2)} - x_1), \\ y_3^{(2)} - y_2 &= \lambda_{22}^{(2)}(x_3^{(2)} - x_2), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &(\lambda_{11}^{(2)} A_1^{(2)} + B_1^{(2)})[u(x_3^{(2)}, y_3^{(2)}) - u(x_1, y_1)] + \\ &+ C_1^{(2)}[v(x_3^{(2)}, y_3^{(2)}) - v(x_1, y_1)] + M_1^{(2)}(x_3^{(2)} - x_1) + N_1^{(2)}(y_3^{(2)} - y_1) = 0, \\ &(\lambda_{22}^{(2)} A_3^{(2)} + B_3^{(2)})[u(x_3^{(2)}, y_3^{(2)}) - u(x_2, y_2)] + \\ &+ C_2^{(2)}[v(x_3^{(2)}, y_3^{(2)}) - v(x_2, y_2)] + M_2^{(2)}(x_3^{(2)} - x_2) + N_2^{(2)}(y_3^{(2)} - y_2) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemi həll edib, məsələnin həllinin A_3 nöqtəsində təqribi qiymətini tapmaq üçün ikinci yaxınlaşmanı - $u(x_3^{(2)}, y_3^{(2)})$, $v(x_3^{(2)}, y_3^{(2)})$ tapmış olarıq. Bu qayda ilə həllin qiymətinə daha yaxın yaxınlaşmaları tapmaq olar.

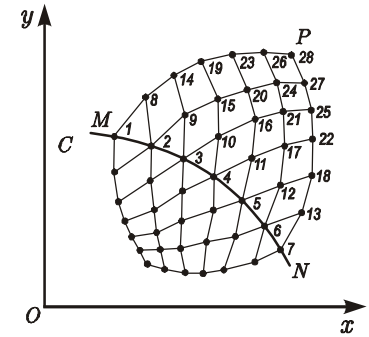
İndi isə yuxarıda şərh etdiyimiz üsulu (6.50) sistemi üçün qoyulmuş məsələnin həllinə tətbiq edək.

Əvvəlcə Koşi məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, C hamar əyrisinin nöqtələrində xarakteristik istiqamət yoxdur.

(6.50) sisteminin elə həllini - (u, v) tapmaq tələb olunur ki, C əyrisinin hər hansı bir qövsündə verilmiş funksiya bərabər olsun.

Bu Koşi məsələsini Masso üsulu ilə həll edək. Əyrinin qövsündə bir-birinə kafi qədər yaxın nöqtələr götürmək lazımdır (şəkil 7). 1-ci və 2-ci nöqtələrdə həllin qiymətlərini bildiyimizdən Masso üsulunu tətbiq edib, 8-ci nöqtədə həlli tapmaq olar. 2-ci və 3-cü nöqtələrdə həllin qiymətləri məlum olduğundan yenə də Masso üsulunu tətbiq edib, 9-cu nöqtədə həllin qiymətini tapmaq olar. Bu qayda ilə 10, 11, 12 və 13-cü nöqtələrdə də həllin qiymətlərini tapmaq olar. Bundan sonra 8, 9, 10, 11, 12, 13 nöqtələrini ilkin nöqtələr kimi qəbul edib, Masso üsulu ilə 14, 15, 16, 17, 18-ci nöqtələrdə həllin qiymətlərini tapmış olarıq. Bu qayda ilə MNP «əyri-xətli üçbucağa» daxil olan bütün nöqtələrdə həllin qiymətlərini tapmaq olar. MP sıx xətlərdən düzəldilmiş «əyri» birinci ailənin xarakteristikasına, MN isə ikinci ailənin xarakteristikasına yaxın olan «əyrilərdir». Eyni qayda ilə MN qövsünün aşağı hissəsindəki nöqtələrdə də həllin təqribi qiymətlərini tapmaq olar.

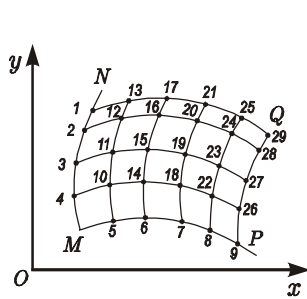
İndi isə Qursa məsələsinə baxaq. (6.50) sisteminin elə həllini - (u, v) tapmaq tələb olunur ki, M nöqtəsindən çıxan MP və MN



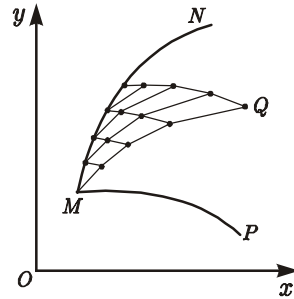
Şəkil 7.

xarakteristikalarında verilmiş funksiyalarla üst-üstə düşsün. Belə ki, bu funksiyaların M nöqtəsində qiymətləri bir-birinə bərabər olmalıdırlar. Bu məsələyə Qursa məsələsi deyirlər. Masso üsulu ilə bu məsələni həll etmək üçün MP və MN qövsləri üzərində bir-birinə kafi qədər yaxın olan nöqtələr götürülür (şəkil 8). Bu nöqtələrdə həllin qiymətləri verilmişdir. Yuxarıda verdiyimiz qayda isə, 4 və 5 nöqtələrində həllin qiymətlərini bilərəkdən 10 nöqtəsində də tapırıq. Bu qayda ilə 3 və 10 nöqtələrindən istifadə edib 11 nöqtəsində; 2 və 11 nöqtələrindən istifadə edib 12 nöqtəsində, və nəhayət, 1 və 12 nöqtəsindən istifadə edib 13 nöqtəsində həllin qiymətlərini tapmış oluruq. 5, 10, 11, 12, 13 və 6 nöqtələrindən istifadə edib, 14, 15, 16, 17 nöqtələrində həllin qiymətlərini tapırıq. Bu qayda ilə $MNQP$ «dördbucaqlısının» digər nöqtələrindən də həllin qiymətlərini tapa bilərik. Bu «dördbucaqlının» iki tərəfi (MN və MP) verilmiş xarakteristikaların qövsləridir, digər iki tərəfləri isə, N və P nöqtələrindən çıxan ikinci ailənin xarakteristikalarına yaxın olan «əyrilərdir».

Nəhayət, qarışıq məsələsinin həllinə baxaq. (6.50) sisteminin elə həllini tapmaq tələb olunur ki, M nöqtəsindən çıxan xarakteristikanı MN qövsündə və həmin nöqtədən çıxan, heç bir nöqtədə xarakteristik istiqaməti olmayan əyrinin MP qövsündə, əvvəlcədən verilmiş funksiyalarla üst-üstə düşsün. Fərz edilir ki, verilmiş funksiyalar ortaq M nöqtəsində bir-biri ilə uzlaşırlar və ikinci ailənin xarakteristikası PMN «bucağının» daxilində qalır (şəkil 9).



Şəkil 8.



Şəkil 9.

Bu məsələnin həlli Koşi və Qursa məsələlərin həllinə gətirilir. Doğrudan da, əvvəlcə (6.50) sisteminin elə həllini tapmaq ki, MN qövsü üzərində əvvəlcədən verilmiş funksiya ilə üst-üstə düşsün (Koşi məsələsi). Bu məsələni yuxarıda Masso üsulu ilə həll edib, ikinci

xarakteristikaya yaxın «əyrini» (MQ) tapa bilərik. Bundan sonra (6.50) sisteminin elə həllini tapırıq ki, MP və MQ xarakteristikaları da əvvəlcədən üst-üstə düşsün (Qursa məsələsi). Bu məsələni həll etmək qarışıq məsələni həll etmiş oluruq.

4. İki tərtibli tənliklər üçün Masso üsulu. Yenidən (6.50) tənliyinə baxaq:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f.$$

Yuxarıda isbat etdik ki, bu tənlik üçün xarakteristika tənlikləri aşağıdakı şəkildə olar:

I ailə üçün	II ailə üçün
$dy - \lambda_1 dx = 0,$	$dy - \lambda_2 dx = 0,$
$a(dp + \lambda_2 dq) - f dx = 0,$	$a(dp + \lambda_1 dq) - f dx = 0,$
$du = p dx + q dy,$	$du = p dx + q dy.$

Fərz edək ki, iki $A_1(x_1, y_1)$ və $A_2(x_2, y_2)$ nöqtələrində u, p və q - nün qiymətləri məlumdur. A_1 nöqtəsindən, birinci ailənin bu nöqtədən çıxan xarakteristikanın istiqamətində düz xətt çəkək. A_2 nöqtəsindən, ikinci ailənin bu nöqtədən çıxan xarakteristikanın istiqamətində düz xətt çəkək. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsinin (tənlik hiperbolik tipli olduğundan bu düz xətlər hökmən bir nöqtədə kəsişməlidirlər) koordinatlarını $(x_3^{(1)}, y_3^{(1)})$ ilə işarə edək. Aşkardır ki, bu koordinatlar aşağıdakı sistemdən təyin olunur:

$$\begin{aligned} y_3^{(1)} - y_1 &= \lambda_{11}(x_3^{(1)} - x_1), \\ y_3^{(1)} - y_2 &= \lambda_{22}(x_3^{(1)} - x_2). \end{aligned}$$

Burada λ_{ij} ədədi λ_i -nin (x_j, y_j) nöqtəsindən qiymətidir.

Diferensial münasibətləri hər iki xarakteristika üçün, sonlu fərqlərlə əvəz edib və onların cəmlərinin yarısını götürsək:

$$\begin{aligned} a_1[(p_3^{(1)} - p_1) + \lambda_{21}(q_3^{(1)} - q_1)] - f_1(x_3^{(1)} - x_1) &= 0, \\ a_2[(p_3^{(1)} - p_2) + \lambda_{12}(q_3^{(1)} - q_2)] - f_2(x_3^{(1)} - x_2) &= 0, \\ u_3^{(1)} - \frac{u_1 + u_2}{2} &= \frac{1}{2}[p_1(x_3^{(1)} - x_1) + q_1(y_3^{(1)} - y_1)] + \\ &+ \frac{1}{2}[p_2(x_3^{(1)} - x_2) + q_2(y_3^{(1)} - y_2)] \end{aligned}$$

olduğunu alırıq. Burada a_i, f_i ədədləri a, f funksiyalarının (x_i, y_i) nöqtələrindəki qiymətləridir. Bu sistemi həll edib, $u_3^{(1)}, p_3^{(1)}, q_3^{(1)}$ tapmış olarıq. Tapdığımız bu qiymətlər u_3, p_3, q_3 üçün birinci yaxınlaşmalardır. 3-cü bənddə verdiyimiz üsulla digər yaxınlaşmaları da tapmaq olar.

Nəhayət, qeyd edək ki, (6.50) tənliyi üçün Koşi, Qursa və qarışıq məsələləri də yuxarıda göstərdiyimiz üsulla həll etmək olar.

VII FƏSİL

İNTEQRAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ ÜSULLARLA HƏLLİ

İnteqral tənliklər nəzəriyyəsində tədqiq edilən əsas xətti inteqral tənliklər aşağıdakılardır:

I növ Fredholm inteqral tənliyi

$$\lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x),$$

II növ Fredholm inteqral tənliyi

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x),$$

I növ Volter inteqral tənliyi

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x),$$

nəhayət, II növ Volter inteqral tənliyi

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

Burada $f(x), K(x, s) (a \leq x, s \leq b)$ verilmiş funksiyalar, $y(x) (a \leq x \leq b)$ məchul funksiya, λ isə parametrdir. $f(x)$ funksiyasına inteqral tənliyin sərbəst həddi, $K(x, s)$ -ə isə inteqral tənliyin nüvəsi deyirlər. Aşkardır ki,

$$\tilde{K}(x, s) = \begin{cases} K(x, s) & a \leq s \leq x, \\ 0 & x \leq s \leq b \end{cases}$$

köməkçi funksiyasını götürsək, Volter tənliklərini Fredholm tənliklərinə gətirmək olar:

$$\lambda \int_a^b \tilde{K}(x, s) y(s) ds = f(x),$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b \tilde{K}(x, s) y(s) ds = f(x).$$

Bu onu göstərir ki, Fredholm inteqral tənlikləri üçün alınmış faktları uyğun olaraq Volter inteqral tənlikləri üçün də almaq olar (o şərtlə ki, $\tilde{K}$ nüvəsi K -nin üzərinə qoyulan şərtləri ödəsin). Lakin gələcəkdə görəcəyik ki, Volter tənlikləri üçün elə faktlar almaq olar ki, Fredholm

tənlikləri üçün bu faktlar doğru olmasın.

§1. İnteqralı inteqral cəmi ilə əvəz etmək üsulu

II növ Fredholm inteqral tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (7.1)$$

Fərz edək ki, $K(x, s)$ və $f(x)$ ($a \leq x, s \leq b$) kəsilməz funksiyalardır.

1. Aşağıdakı kimi kvadratura düsturunu götürək

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j F(x_j) + R(F). \quad (7.2)$$

Burada $x_i \in [a, b]$ ($i=1, 2, \dots, n$), A_i ($i=1, 2, \dots, n$) sabitləri $F(x)$ funksiyasının seçilməsindən asılı deyillər və $R(F)$ – kvadratura düsturunun qalıq həddidir. x_i və A_i -ləri konkret seçməklə konkret kvadratura düsturları almış olarıq. Məsələn, əgər (7.2) kvadratura düsturu əvəzinə ümumiləşmiş trapeslər düsturunu götürsək, onda

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n-1)h = b,$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h$$

olduğunu alarıq.

(7.1) tənliyində $x = x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) götürək:

$$y(x_i) = \lambda \int_a^b K(x_i, s)y(s)ds + f(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

İnteqralı (7.2) kvadratura düsturu ilə əvəz edək:

$$y(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j)y(x_j) = f(x_i) + \lambda R_i, \quad (7.3)$$

$$R_i = [K(x_i, s), y(s)].$$

λR_i həddini atsaq

$$Y_i = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7.4)$$

Burada $K_{ij} = K(x_i, y_j)$, $f_i = f(x_i)$. Bu sistemi həll edib $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ədədlərini tapırıq. Tapılan bu ədədləri (7.1) tənliyinin həllinin x_i

($i=1, 2, \dots, n$) nöqtələrində təqribi qiymətləri kimi götürürük:

$$y(x_i) \approx Y_i.$$

(7.1) tənliyinin $[a, b]$ parçasında təqribi həlli kimi

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) Y_j \quad (7.5)$$

funksiyasını götürmək olar. Aşkardır ki, bu funksiyanın $x_1, x_2, \dots, x_n$ nöqtələrində qiymətləri, uyğun olaraq, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ilə üst-üstə düşürlər.

I növ Fredholm tənliyi üçün bu üsulu tətbiq etsəydik (7.4) sistemi əvəzinə

$$\lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

olduğunu alardıq.

Əgər (7.1) tənliyi bircinsli olsaydı, yəni $f(x) \equiv 0$ olsaydı, onda (7.4) sistemi bircinsli sistem olardı. Bu sistemin isə o vaxt həlli olardı ki, determinantı sıfır olsun. Beləliklə, (7.4) sisteminə uyğun bircinsli sistemin həllini tapmaq üçün λ -ya nəzərən n -dərəcəli cəbri tənliyi həll edib, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ -ləri tapmaq lazımdır. Bundan sonra (7.4)-ə uyğun bircinsli sistemi həll edib $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ədədlərini tapmaq lazımdır. Tapılan bu ədədlər (7.1) tənliyinin ($f(x) \equiv 0$ olduqda) x_i ($i=1, 2, \dots, n$) nöqtələrində təqribi qiymətləri olar.

Onu da qeyd edək ki, I-növ Fredholm tənliyi üçün bu üsulu tətbiq etsəydik, (7.3) sistemi əvəzinə

$$\lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

olduğunu alardıq.

2. Üsulun xətasını qiymətləndirək. $\varepsilon_i = y(x_i) - Y_i$ işarələməsini aparsaq, (7.3) və (7.4) sistemlərindən

$$\varepsilon_i = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} \varepsilon_j + \lambda R_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (7.5)$$

olduğunu alarıq.

(7.5) və yaxud (7.4) sistemlərinin determinantını $D(\lambda)$ ilə və bu determinantın cəbri tamamlayıcılarını isə $D_{ij}(\lambda)$ ilə işarə etsək, (7.5) sisteminin həllini

$$\varepsilon_i = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij} R_j$$

şəklində alırıq. Buradan:

$$|\varepsilon_i| \leq |\lambda| B r, \quad (7.6)$$

$$B = \frac{1}{|D(\lambda)|} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |D_{ij}|, \quad r = \max_{a \leq x, s \leq b} |R|, \quad R = R[K(x, s), y(s)].$$

Digər tərəfdən (7.5) və

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y(x_j) + \lambda R$$

düsturlarından istifadə etsək,

$$\varepsilon(x) = y(x) - Y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) \varepsilon_j + \lambda R.$$

Burada (7.6)-nı nəzərə alsaq,

$$|\varepsilon(x)| \leq |\lambda| \sum_{j=1}^n |A_j| |K(x, x_j)| |\varepsilon_j| + |\lambda| r,$$

$$|\varepsilon(x)| \leq |\lambda|^2 K_0 \left(\sum_{j=1}^n |A_j| \right) r B + |\lambda| r,$$

$$K_0 = \max_{a \leq x, s \leq b} |K(x, s)|$$

olduğunu alırıq.

Beləliklə isbat etdik ki,

$$|y(x) - Y(x)| \leq C r, \quad C = |\lambda|^2 K_0 \sum_{j=1}^n |A_j| + B + |\lambda|. \quad (7.7)$$

Burada r -i hesablamaq üçün kvadratura düsturunu konkret götürmək lazımdır. Məsələn, əgər ümumiləşmiş trapeslər düsturunu götürsək

$$R(F) = \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} F''(\xi)$$

olar (burada fərz edirik ki, $K(x, s)$ və $f(x)$ funksiyaları iki tərtibdən diferensiallanandılar). Bu hal üçün r -i hesablayaq.

(7.1) tənliyindən

$$y^{(i)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^i K(x, s)}{\partial x^i} y(s) ds + f^{(i)}(x) \quad (i=1,2),$$

$$|y^{(i)}(x)| \leq |\lambda| K_i (b-a) N_0 + P_i \quad (i=1,2),$$

$$N_i \leq |\lambda| K_i (b-a) N_0 + P_i \quad (i=1,2). \quad (7.8)$$

Burada $i=0,1,2$ üçün

$$K_i = \max_{a \leq x, s \leq b} \left\{ \left| \frac{\partial^i K(x, s)}{\partial x^i} \right|, \left| \frac{\partial^i K(x, s)}{\partial s^i} \right| \right\},$$

$$N_i = \max_{a \leq x \leq b} |y^{(i)}(x)|, \quad P_i = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x)|.$$

Aşkardır ki, $f(s) = K(s, s) y(s)$, funksiyasının törəmələri aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$F'(s) = \frac{\partial K(s, s)}{\partial s} y(s) + K(s, s) y'(s),$$

$$F''(s) = \frac{\partial^2 K(s, s)}{\partial s^2} y(s) + 2 \frac{\partial K(s, s)}{\partial s} y'(s) + K(s, s) y''(s).$$

Buradan

$$|F'(s)| \leq K_1 N_0 + K_0 N_1, \quad |F''(s)| \leq K_2 N_0 + 2K_1 N_1 + K_0 N_2.$$

(7.8) düsturlarını burada nəzərə alsaq,

$$|F''(s)| \leq K_2 N_0 + 2K_1 [|\lambda| K_1 (b-a) N_0 + P_1] + \\ + K_0 [|\lambda| K_2 (b-a) N_0 + P_2] = [K_2 + 2K_1^2 |\lambda| (b-a) + \\ + K_0 K_2 |\lambda| (b-a)] N_0 + 2K_1 P_1 + K_0 P_2,$$

$$|F''(s)| \leq C_1 N_0 + C_2, \quad C_i = \text{const} \quad (i=1,2)$$

olduğunu alırıq. Deməli,

$$|R(F)| \leq \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} (C_1 N_0 + C_2), \quad r \leq \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} (C_1 N_0 + C_2).$$

(7.7) düsturundan $Y_0 = \max_{a \leq x \leq b} |Y(x)|$ ilə işarə etsək,

$$|y(x)| \leq |y(x) - Y(x)| + |Y(x)| \leq C r + Y_0 \leq \\ \leq C \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} (C_1 N_0 + C_2) + Y_0,$$

$$N_0 \leq C C_1 \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} N_0 + C C_2 \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} + Y_0,$$

$$N_0 \leq \frac{CC_2 \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} + Y_0}{1-C^*}.$$

Burada fərz edilir ki,

$$C^* = CC_1 \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} < 1.$$

Nəhayət,

$$r \leq \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} \left[C_1 \frac{CC_2 \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} + Y_0}{1-C^*} + C_2 \right].$$

§2. Nüvəni, cırlaşmış nüvə ilə əvəz etmək üsulu

1. Əgər integral tənliyin nüvəsini aşağıdakı şəkildə göstərmək olarsa

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(s),$$

onda deyirlər ki, nüvə cırlaşandır. Burada $\{A_i(x)\}_{i=1, \overline{n}}$ və $\{B_i(x)\}_{i=1, \overline{n}}$ funksiyalar sistemi $[a, b]$ parçasında xətti asılı olmayan sistemlərdir.

Aşağıdakı kimi cırlaşan nüvəli II növ Fredholm integral tənliyinə baxaq:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) y_n(s) ds + f(x). \quad (7.9)$$

Bu tənliyin dəqiq həllini tapaq. (7.9) tənliyini

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b B_i(s) y_n(s) ds \right) A_i(x) + f(x)$$

şəklində yazmaq mümkün olduğundan bu tənliyin həllini aşağıdakı şəkildə axtarmaq təbiidir:

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i A_i(x) + f(x). \quad (7.10)$$

Burada C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – sabitlərdir. Həllin bu ifadəsini (7.9)-da nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{i=1}^n C_i A_i(x) + f(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(s) \left[\lambda \sum_{i=1}^n C_i A_i(s) + f(s) \right] ds + f(x), \\ \sum_{i=1}^n C_i A_i(x) &= \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(s) \right) \left(\sum_{j=1}^n C_j A_j(s) \right) ds + \\ &\quad + \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(s) \right) f(s) ds, \\ \sum_{i=1}^n C_i A_i(x) &= \lambda \sum_{i=1}^n A_i(x) \sum_{j=1}^n C_j \left(\int_a^b B_i(s) A_j(s) ds \right) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n A_i(x) \left(\int_a^b B_i(s) f(s) ds \right). \end{aligned}$$

$A_1^{(x)}, \dots, A_n^{(x)}$ funksiyalar sistemi xətti asılı olmadığından

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} C_j = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.11)$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b B_i(s) A_j(s) ds, \quad \beta_i = \int_a^b B_i(s) f(s) ds$$

olduğunu alırıq.

Fərz edək ki, (7.11) sisteminin determinantı $D(\lambda) \neq 0$. Onda məlumdur ki, bu sistemin yeganə həlli var. Tapdığımız C_i -ləri (7.10) düsturunda yerinə yazsaq (7.9) tənliyinin həllini tapmış oluruq.

Məlumdur ki, (7.11) sisteminin həlli

$$C_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

şəklində olar. Burada

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i-1} & \beta_1 & \alpha_{1i+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{ni-1} & \beta_n & \alpha_{ni+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

D_{ij} ilə D_j determinantının (i, j) elementinin cəbri tamalayıcısını işarə etsək:

$$D_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \beta_j.$$

Onda

$$C_i = \sum_{j=1}^n \frac{D_{ij}}{D} \beta_j \quad (i=1,2,\dots,n)$$

tapdığımız bu qiymətləri (7.10)-da yerinə yazsaq,

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n A_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{D_{ij}}{D} \beta_j = f(x),$$

$$y_n(x) = \lambda \sum_{i,j=1}^n A_i(x) \frac{D_{ij}}{D} \int_a^b B_j(s) f(s) ds + f(x),$$

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{D_{ij}}{D} A_i(x) B_j(s) \right) f(s) ds + f(x),$$

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b R_n(x, s; \lambda) f(s) ds + f(x) \quad (7.12)$$

olduğunu alırıq. Burada

$$R_n(x, s, \lambda) = \frac{1}{D} \sum_{i,j=1}^n D_{ij} A_i(x) B_j(s)$$

funksiyasına $K_n(x, s)$ nüvəsinin rezolventi deyirlər.

2. (7.1) integral tənliyinə baxaq. Fərz edək ki, $K(x, s)$ nüvəsini $\{K_n(x, s)\}_{n=1,2,\dots}$ cırlaşan nüvələr ardıcılığı ilə aproksimasiya etmək olar, yəni

$$K(x, s) = K_n(x, s) + \delta_n(x, s), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(x,s)} |\delta_n(x, s)| = 0.$$

(7.1) tənliyində nüvənin bu ifadəsindən istifadə etsək

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) y(s) ds + \lambda \int_a^b \delta_n(x, s) y(s) ds + f(x) \quad (7.13)$$

olduğunu alırıq. Kafi qədər böyük n -lər üçün $\delta_n(x, s)$ kiçik olduğundan tənliyin sağ tərəfindəki ikinci integralı atmaq olar. Onda

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) y_n(s) ds + f(x). \quad (7.14)$$

(7.12) cırlaşan nüvəli integral tənlik olduğundan onun dəqiq həllini -

$y_n(x)$ tapmaq olar. Tapılan bu həlli n -in kafi qədər böyük qiymətləri üçün (7.1) tənliyinin təqribi həlli kimi götürmək olar. Bu halda buraxılan xətanı qiymətləndirək.

$\varepsilon_n(x) = y(x) - y_n(x)$ işarələməsini aparsaq, (7.13) və (7.14) tənliklərindən

$$\varepsilon_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) \varepsilon_n(s) ds + \lambda \int_a^b \delta_n(x, s) y(s) ds$$

olduğunu alırıq. Bu cırlaşmamış nüvəli I növ Fredholm integral tənliyidir. Bu tənliyin həlli üçün (7.12) düsturundan istifadə etsək:

$$\varepsilon_n(x) = \lambda \int_a^b \delta_n(x, s) y(s) ds + \lambda \int_a^b R_n(x, s) \left[\lambda \int_a^b \delta_n(s, \tau) y(\tau) d\tau \right] ds$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$|\varepsilon_n(x)| \leq |\lambda| \delta_n N_0 (b-a) + \lambda^2 R_n^* \delta_n N_0 (b-a)^2, \\ |\varepsilon_n(x)| \leq |\lambda| (b-a) [1 + |\lambda| R_n^* (b-a)] N_0 \delta_n, \quad (7.15)$$

$$\delta_n = \max_{a \leq x \leq b} |\delta_n(x, s)|, \quad N_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|, \quad R_n^* = \max_{a \leq x, s \leq b} |R_n(x, s)|.$$

İndi isə N_0 -ı qiymətləndirək. Aşkardır ki,

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) y(s) ds + f(x) - \lambda \int_a^b [K_n(x, s) - K(x, s)] y(s) ds,$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s) y(s) ds + F(x), \quad (7.16)$$

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^b [K_n(x, s) - K(x, s)] y(s) ds. \quad (7.17)$$

(7.16) tənliyinin həlli üçün (7.12) düsturundan istifadə etsək:

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R_n(x, s) F(s) ds \quad (7.18)$$

olduğunu alırıq. (7.17)-dən

$$|F(x)| \leq P_0 + |\lambda| \delta_n (b-a) N_0$$

olduğunu (7.18)-də nəzərə alsaq:

$$|y(x)| \leq P_0 + |\lambda| \delta_n (b-a) N_0 + |\lambda| R_n^* (b-a) [P_0 + |\lambda| \delta_n (b-a) N_0],$$

$$N_0 \leq P_0 [1 + |\lambda| R_n^* (b-a)] + |\lambda| \delta_n (b-a) [1 + |\lambda| R_n^* (b-a)] N_0.$$

Fərz edək ki,

$$|\lambda|\delta_n(b-a)[1+|\lambda|R_n^*(b-a)] < 1.$$

Onda

$$N_0 \leq P_0 \frac{1+|\lambda|R_n^*(b-a)}{1-|\lambda|\delta_n(b-a)[1+|\lambda|R_n^*(b-a)]}.$$

Bu qiymətləndirməni (7.15)-də nəzərə alsaq, xəta üçün aşağıdakı düsturu almış olarıq:

$$|y(x) - y_n(x)| \leq |\lambda|(b-a)P_0 \frac{[1+|\lambda|R_n^*(b-a)]^2}{1-|\lambda|\delta_n(b-a)[1+|\lambda|R_n^*(b-a)]} \delta_n.$$

3. Bu paragrafın axırında $K(x, s)$ nüvəsini approksimasiya edən cırlaşmış $K_n(x, s)$ nüvəsinin qurulması üçün bir üsul (Betmen üsulu) verək.

$K_n(x, s)$ nüvəsini aşağıdakı bərabərlikdən təyin edək:

$$K \equiv \begin{vmatrix} K_n(x, s) & K(x, s_1) & K(x, s_2) & \cdots & K(x, s_n) \\ K(x_1, s) & K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s) & K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix} = 0,$$

burada $x_1, x_2, \dots, x_n; s_1, s_2, \dots, s_n - [a, b]$ parçasına daxil olan nöqtələrdir.

K determinantının birinci sütununun ünsürlərini $K_n(x, s) + 0$, $0 + K(x_1, s)$, $0 + K(x_2, s)$, $\dots$, $0 + K(x_n, s)$ şəklində yazıb, bu determinantı iki determinantın cəmi kimi yazdıqdan sonra $K = 0$ bərabərliyindən

$$K_n(x, s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x, s_1) & \cdots & K(x, s_n) \\ K(x_1, s) & K(x_1, s_1) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s) & K(x_n, s_1) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \cdots & K(x_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}}.$$

olduğunu alarıq. $K_n(x, s)$ -in bu ifadəsindən görsənir ki, bu nüvə cırlaşandır. $K_n(x, s)$ -in aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$K_n(x, s) = K(x, s) - \frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x, s_1) & \cdots & K(x, s_n) \\ K(x_1, s) & K(x_1, s_1) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s) & K(x_n, s_1) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \cdots & K(x_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \cdots & K(x_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \cdots & K(x_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}} K(x, s) =$$

$$= K(x, s) - \frac{\begin{vmatrix} K(x, s) & K(x, s_1) & \cdots & K(x, s_n) \\ K(x_1, s) & K(x_1, s_1) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s) & K(x_n, s_1) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \cdots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \cdots & K(x_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \cdots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}}.$$

Buradan görünür ki, $K_n(x, s)$ funksiyası $x = x_i, s = s_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) düz xətlərində $K(x, s)$ ilə üst-üstə düşür.

Qeyd edək ki, $K(x, s)$ nüvəsini qüvvət və triqonometrik sıralara ayırıb, onların xüsusi cəmlərini də $K_n(x, s)$ əvəzinə götürmək olar.

§3. Adi iterasiya üsulu

1. II növ Fredholm integral tənliyi üçün. Yenidən II növ Fredholm integral tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x). \quad (7.19)$$

Fərz edək ki, $K(x, s), f(x)$ ($a \leq x, s \leq b$) kəsilməz funksiyalardır.

(7.1) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl

yaxınlaşmalar quraq:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y_{n-1}(s) ds + f(x) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (7.20)$$

Burada $y_0(x)$ ($a \leq x \leq b$) ixtiyari kəsilməz funksiyadır. $H = C[a, b]$ fəzasında ($[a, b]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzası $C[a, b]$ ilə işarə edilmişdir)

$$A(y) \equiv \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$$

operatorunu təyin edək. Onda (7.1) tənliyini

$$y = A(y), \quad (7.19^1)$$

(7.2) ardıcıl yaxınlaşmalarını isə

$$y_n = A(y_{n-1}) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7.20^1)$$

şəklində yazmaq olar.

(7.20¹) düsturları ilə təyin olan y_n yaxınlaşmalarının (7.19¹) tənliyinin həllinə yığıldığını isbat etmək üçün sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edək.

Fərz edək ki,

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad M = \max_{a \leq x, s \leq b} |K(x, s)|.$$

Onda $A(y)$ operatoru $H = C[a, b]$ fəzasında təsir edir və sıxan operatorudur. $K(x, s), f(x)$ funksiyaları kəsilməz olduqlarından $A(y)$ operatoru $C[a, b]$ -də təsir edər. $A(y)$ operatorunun sıxan olması isə aşağıdakı bərabərsizlikdən çıxır:

$$\begin{aligned} |A(y) - A(\bar{y})| &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x, s)| |y(s) - \bar{y}(s)| ds \leq \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{a \leq s \leq b} |y(s) - \bar{y}(s)| = |\lambda| M(b-a) \|y - \bar{y}\|_C, \\ \|A(y) - A(\bar{y})\|_C &\leq \alpha \|y - \bar{y}\|_C, \alpha = |\lambda| M(b-a) < 1. \end{aligned}$$

Sıxılmış inikas prinsipini (7.19¹) tənliyinə $H = C[a, b]$ fəzasında tətbiq etsək, aşağıdakı teoremin doğruluğunu almış olarıq.

Teorem 7.1. Tutaq ki, $K(x, s)$ və $f(x)$ ($a \leq x, s \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir və

$$\alpha = |\lambda| M(b-a) < 1.$$

Onda (7.19) tənliyinin kəsilməz funksiyalar fəzasında yeganə həlli

var, bu həll (7.20) yaxınlaşmalarının limitinə bərabərdir və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\|y_n(x) - y(x)\|_C \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_C.$$

(7.20) yaxınlaşmalarını başqa formada da yazmaq olar. Bunun üçün aşağıdakı işarələmələri aparaq:

$$\left. \begin{aligned} K_n(x, s) &= \lambda \int_a^b K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, s) d\tau \quad (n=1, 2, \dots), \\ K_0(x, s) &= \lambda K(x, s). \end{aligned} \right\}$$

(7.20)-də $n=1$ qəbul etdikdə

$$y_1(x) = \int_a^b K_0(x, s) y_0(s) ds + f(x).$$

$n=2$ götürsək

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x, \tau) \left[\int_a^b K_0(\tau, s) y_0(s) ds \right] d\tau + f(x), \\ y_2(x) &= \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x, \tau) K_0(\tau, s) d\tau \right] y_0(s) ds + f(x), \\ y_2(x) &= \int_a^b K_1(x, s) y_0(s) ds + f(x) \end{aligned}$$

olduğunu alırıq.

Fərz edək ki,

$$y_n(x) = \int_a^b K_{n-1}(x, s) y_0(s) ds + f(x).$$

Onda (7.20)-dən

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b K(x, s) y_n(s) ds + f(x), \\ y_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b K(x, \tau) \left[\int_a^b K_{n-1}(\tau, s) y_0(s) ds \right] d\tau + f(x), \\ y_{n+1}(x) &= \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, s) d\tau \right] y_0(s) ds + f(x), \end{aligned}$$

$$y_{n+1}(x) = \int_a^b K_n(x, s) y_0(s) ds.$$

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etsək, ixtiyari n üçün

$$y_n(x) = \int_a^b K_{n-1}(x, s) y_0(s) ds + f(x)$$

olduğunu alırıq.

2. II-növ Volter integral tənliyi üçün. Biz fəslin girişində qeyd etdik ki, Volter tənliyi üçün elə fakt isbat etmək olar ki, o fakt Fredholm tənliyi üçün doğru olmasın. İndi belə bir faktı isbat edək.

II növ Volter tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds + f(x). \quad (7.21)$$

Fərz edək ki, $K(x, s), f(x)$ ($a \leq x, s \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir.

(7.21) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl yaxınlaşmaları quraq:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) y_{n-1}(s) ds + f(x), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.22)$$

Burada da $y_0(x)$ ($a \leq x \leq b$) ixtiyari kəsilməz funksiyadır.

İsbat edək ki, ixtiyari λ üçün (7.22) düsturları ilə təyin olunan $y_n(x)$ funksiyaları (7.21) tənliyinin yeganə həllinə yığılır. Aşağıdakı funksional sıranı nəzərdən keçirək:

$$y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots \quad (7.23)$$

funksional sırasına baxaq.

Aşkardır ki,

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq |\lambda| M \int_a^x |y_i(s) - y_{i-1}(s)| ds \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Buradan

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq |\lambda| M C \frac{x-a}{1!}, \quad C = \max_{a \leq s \leq b} |y_1(s) - y_0(s)|,$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq |\lambda| M \int_a^x |\lambda| M C (s-a) ds,$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq (|\lambda| M)^2 C \frac{(x-a)^2}{2!}$$

olduğunu alırıq.

Fərz edək ki,

$$|y_i(x) - y_{i-1}(x)| \leq (|\lambda| M)^{i-1} C \frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Onda

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq |\lambda| M \int_a^x (|\lambda| M)^{i-1} C \frac{(s-a)^{i-1}}{(i-1)!} ds,$$

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq (|\lambda| M)^i C \frac{(x-a)^i}{i!}$$

olar.

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etsək, ixtiyari $i = 0, 1, 2, \dots$ üçün

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq \frac{[|\lambda| M(b-a)]^i}{i!} C$$

olduğunu alırıq.

Buradan alırıq ki,

$$C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[|\lambda| M(b-a)]^i}{i!}$$

ədədi sırası (7.23) funksional sırası üçün majorant sıradır. Bu ədədi sıra ixtiyari λ üçün yığıldığından (7.23) funksional sırası ixtiyari $x \in [a, b]$ üçün yığılan olar. $y_n(x)$ (7.23) sırasının xüsusi cəmi olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y^*(x)$$

olar. (7.22)-də $n \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək $y^*(x)$ funksiyasının (7.21) tənliyinin həlli olduğunu almış olarıq.

İndi isə $|y_n(x) - y^*(x)|$ fərqi qiymətləndirək:

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq |\lambda| M \int_a^x |y_{n-1}(s) - y^*(s)| ds$$

bərabərsizliyindən

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!} \left(\max_{a \leq s \leq b} |y_0(s) - y^*(s)| \right) \quad (7.24)$$

olduğunu alırıq. Bu düstur $\{y_n(x)\}$ ardıcılığının $y^*(x)$ funksiyasına yığılma sürətini təyin edir.

(7.24) düsturu (7.21) tənliyinin ixtiyari həlli üçün doğru olduğundan,

əgər bu tənliyin ikinci $y^{**}(x)$ həlli də olsaydı, onda

$$|y_n(x) - y^{**}(x)| \leq \frac{[\lambda |M(b-a)|]^n}{n!} \left(\max_{a \leq s \leq b} |y_0(s) - y^*(s)| \right) \quad (7.25)$$

olduğunu alardıq.

Onda (7.24) və (7.25)-dən

$$\begin{aligned} |y^*(x) - y^{**}(x)| &\leq |y^*(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y^{**}(x)| \leq \\ &\leq \frac{[\lambda |M(b-a)|]^n}{n!} \left[\max_{a \leq s \leq b} |y_0(s) - y^*(s)| + \max_{a \leq s \leq b} |y_0(s) - y^{**}(s)| \right]. \end{aligned}$$

olar. Burada $n \rightarrow \infty$ -da limitə keçsək,

$$y^*(x) \equiv y^{**}(x)$$

olduğunu alırıq. Bu o deməkdir ki, (7.21) tənliyinin həlli yeganədir.

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 7.2. Tutaq ki, $K(x, s), f(x)$ ($a \leq x, s \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir. Onda, ixtiyari λ üçün, (7.21) tənliyinin kəsilməz funksiyalar fəzasında yeganə həlli var, bu həll (7.22) yaxınlaşmalarının limitinə bərabərdir və yığılma sürəti (7.24) düsturu ilə təyin edilir.

3. Qeyri-xətti integral tənliklər üçün. İndi isə göstərək ki, adi iterasiya üsulunu qeyri-xətti integral tənliklərə də tətbiq etmək olar.

Əvvəlcə qeyri-xətti Fredholm tipli integral tənliyə baxaq:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K[x, s; y(s)] ds + f(x), \quad (7.26)$$

burada $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b, -\infty < y < \infty$) və $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) verilmiş kəsilməz funksiyalardır.

(7.26) integral tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı qayda ilə ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K[x, s; y_{n-1}(s)] ds + f(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.27)$$

burada $y_0(x)$ ($a \leq x \leq b$) ixtiyari kəsilməz funksiyadır.

Fərz edək ki, $K(x, s; y)$ ($a \leq x, s \leq b, -\infty < y < \infty$) funksiyası y -ə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir:

$$|K(x, s; y) - K(x, s; \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|.$$

$y_n(x)$ yaxınlaşmalarının (7.26) tənliyinin həllinə yığıldığını isbat etmək üçün sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edək. Bunun üçün

$$H = C[a, b],$$

$$A(y) \equiv \lambda \int_a^b K[x, s; y(s)] ds + f(x)$$

götürək. Aşkardır ki, $A(y)$ operatoru $C[a, b]$ -də təsir edir (K və f kəsilməz funksiyalar olduğundan).

Tutaq ki, $y(x), \bar{y}(x) \in C[a, b]$. Onda

$$|A(y) - A(\bar{y})| \leq |\lambda| \int_a^b |K[x, s; y(s)] - K[x, s; \bar{y}(s)]| ds \leq$$

$$\leq |\lambda| L \int_a^b |y(s) - \bar{y}(s)| ds \leq |\lambda| L(b-a) \|y - \bar{y}\|_C,$$

$$\|A(y) - A(\bar{y})\|_C \leq \alpha \|y - \bar{y}\|_C, \quad \alpha = |\lambda| L(b-a)$$

olduğunu alırıq.

Əgər $\alpha < 1$ olduğunu fərz etsək, onda $A(y)$ operatorunun $C[a, b]$ -də sıxan operator olduğunu almış olarıq.

Beləliklə, sıxılmış inikas prinsipindən istifadə etsək aşağıdakı teoremin doğruluğunu almış oluruq.

Teorem 7.3. Tutaq ki, $K(x, s; y)$, $f(x)$ ($a \leq x, s \leq b, -\infty < y < \infty$) funksiyaları kəsilməzdir və $K(x, s; y)$ funksiyası y -ə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir. Əgər

$$\alpha = |\lambda| L(b-a) < 1 \quad (7.28)$$

şərti ödənersə, onda (7.26) tənliyinin kəsilməz funksiyalar fəzasında yeganə həlli var, bu həll (7.27) yaxınlaşmalarının limitidir və, nəhayət, yığılma sürəti

$$\|y_n(x) - y(x)\| \leq_C \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|y_1 - y_0\|_C$$

düsturu ilə təyin edilir.

Qeyd edək ki, $K(x, s; y)$ funksiyası y -ə nəzərən Lipşits şərtini $(-\infty, \infty)$ intervalında deyil, $[-r, r]$ parçasında ödəyirsə, onda $A(y)$ operatoru $\|y\|_C \leq r$ kürəsində sıxan operator olacaqdır. Əgər əlavə olaraq

$$\|f\|_C + |\lambda| M(b-a) \leq r, \quad M = \max_{\substack{a \leq x, s \leq b \\ |y| \leq r}} |K(x, s; y)|$$

olduğunu fərz etsək, $A(y)$ operatorunun $\|y\|_C \leq r$ kürəsində təsir etdiyini almış olarıq. Onda sıxılmış inikas prinsipini $S = \{y \in C[a, b]; \|y\|_C \leq r\}$

kürəsində

$$y = A(y)$$

operator tənliyinə tətbiq etsək, (7.26) tənliyinin S kürəsində yeganə həlli olduğunu, (7.27) yaxınlaşmaların bu həllə yığıldığını almış olarıq. Yığılma sürəti (7.28) düsturu ilə təyin olar.

Nəhayət, bu paraqrafın axırında qeyri-xətti Volter tənliyinə baxaq:

$$y(x) = \lambda \int_a^x K[x, s; y(s)] ds + f(x). \quad (7.29)$$

İsbat edək ki, (7.29) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün qurulan

$$y_n(x) = \lambda \int_a^x K[x, s; y_{n-1}(s)] ds + f(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.30)$$

yaxınlaşmaları, ixtiyari λ üçün ((7.28) şərti ödənmədən) (7.29) tənliyinin həllinə yığılır (xətti tənliklərdə olduğu kimi).

Teorem 7.4. Tutaq ki, $K(x, s; y)$, $f(x)$ ($a \leq x, s \leq b, -\infty < y < \infty$) funksiyaları kəsilməzdir və $K(x, s; y)$ funksiyası y -ə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir.

Onda (7.29) tənliyinin yeganə həlli var, (7.30) yaxınlaşmaları bu həllə yığılır və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\|y_n - y\|_C \leq \frac{[\|\lambda\| L(b-a)]^n}{n!} \|y_1 - y_0\|_C. \quad (7.31)$$

İsbatı. (7.30)-dan

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |y_n(s) - y_{n-1}(s)| ds,$$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{[\|\lambda\| L(b-a)]^n}{n!} \|y_1(x) - y_0(x)\|_C$$

olduğunu alarıq. Buradan çıxır ki,

$$\|y_1 - y_0\|_C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\|\lambda\| L(b-a)]^i}{i!}$$

yığılan ədədi sıra

$$y_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} (y_{i+1}(x) - y_i(x))$$

funksional sırası üçün majorant sıra olar.

Ona görə də bu axırıncı sıra, yəni $y_n(x)$ ardıcılığı yığılan olar.

(7.30)-da limitə keçsək ($n \rightarrow \infty$ -da) $y_n(x)$ -in (7.29) tənliyinin

həllinə yığıldığını alarıq.

(7.31) bərabərsizliyi xətti tənliklərdə olduğu kimi isbat olunur. Bu bərabərsizlik ixtiyari həll üçün doğru olduğundan həllin yeganəliyi də isbat olunur.

§4. Requlyarlaşdırma üsulu

Bu paraqrafda birinci növ Fredholm integral tənliyinin

$$A(y) \equiv \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (7.32)$$

təqribi həllini tapmaq üçün A.N. Tixinovun təklif etdiyi requlyarlaşdırma üsulunun sxemi verilir. Fərz olunur ki, $K(x, s)$ ($a \leq s \leq b$), ($c \leq x \leq d$) nüvəsi kəsilməz funksiyadır.

1. Fərz edək ki, $A(y)$ operatoru tam metrik Y funksional fəzasından, tam metrik F funksional fəzasına kəsilməz təsir edir. Tutaq ki, hər bir $f(x) \in F$ üçün Y -də (7.32) tənliyinin yeganə həlli $y = R(f)$ təyin olunub.

Tərif 1. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta(\varepsilon) > 0$ tapmaq olarsa ki, $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ bərabərsizliyindən $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \varepsilon$ bərabərsizliyinin doğru olduğu alınsın, burada

$$y_1 = R(f_1), \quad y_2 = R(f_2), \quad f_1, f_2 \in F, \quad y_1, y_2 \in Y,$$

onda deyirlər ki, $y = R(f)$ həlli dayanıqlıdır.

Tərif 2. 1) Əgər ixtiyari $f \in F$ üçün (7.32) tənliyinin Y -də yeganə həlli varsa və 2) bu həll dayanıqlıdırsa, onda deyirlər ki, (7.32) tənliyinin həllinin tapılması məsələsi korrektdir.

Bu şərtlər ödənilmirsə, onda deyirlər ki, məsələ korrekt deyil.

İsbat edək ki, $Y = C[a, b]$ və $F = L^2[a, b]$ götürsək (7.32) tənliyinin həllini tapmaq məsələsi korrekt deyildir.

Aşkardır ki, (7.32) tənliyinin həllini $y(x)$ ilə işarə etsək, $y^*(x) = y(x) + N \sin \omega x$ funksiyası

$$A(y) = f^*(x)$$

tənliyinin həlli olar. Burada

$$f^*(x) = N \int_a^b K(x, s) \sin \omega s ds.$$

Aşkardır ki, ixtiyari N ədədi və ω -nın kafi qədər kiçik qiymətlərində

$$\rho_F(f, f^*) = |N| \left(\int_c^d \int_a^b K(x, s) \sin \omega s ds \right)^2 dx \Big)^{1/2}$$

kafi qədər kiçik edilə bildiyi halda

$$\rho_Y(y, y^*) = |N|$$

sabit ədəddir. Bu da o deməkdir ki, (7.32) tənliyi korrekt deyil.

Qeyd edək ki, $Y = L^2[a, b]$ olduqda da

$$\rho_Y(y, y^*) = |N| \sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin \omega(b-a) \sin \omega(b+a)}$$

kafi qədər kiçildilə bilməz, yəni bu halda da (7.32) tənliyi korrekt deyil.

I növ Fredholm inteqral tənliyinin bu xassəsi onun tədqiqini, II növ Fredholm inteqral tənliyinə nəzərən, çətinləşdirir.

2. Tutaq ki, $y^*(x)$ funksiyası $A(y) = f_*(x)$ tənliyinin həllidir. Adətən, $f_*(x)$ funksiyası əvəzinə $\rho_F(f_\delta, f_*) \leq \delta$ bərabərsizliyini ödəyən $f_\delta(x)$ funksiyası və δ ədədi məlum olur. Verilmiş f_δ, A, δ üçün elə y_δ həllini tapmaq tələb olunur ki, bu həll f_δ -ya nəzərən dayanıqlı olsun.

δ parametri (7.32) tənliyinin sağ tərəfini xətasını xarakterizə edir. Buna görə də $y_\delta(x)$ -i δ parametrindən asılı olan operator vasitəsilə təyin etmək lazımdır, belə ki, bu operatorunu elə seçmək lazımdır ki, $\delta \rightarrow 0$ -da və $f_\delta \rightarrow f_*$ olduqda $y_\delta \rightarrow y_*$ olsun.

Tərif 3. F -dən Y -ə təsir edən $R(f, \delta)$ operatoru aşağıdakı şərtləri ödəyirsə, onda bu operatora (7.32) tənliyi üçün requlyarlaşdıran operator deyirlər:

1) elə $\delta_1 > 0$ ədədi var ki, $R(f, \delta)$ operatoru ixtiyari $\delta \in [0, \delta_1]$ və $f_\delta \in F$ üçün

$$\rho_F(f_* f_\delta) \leq \delta$$

ödənir;

2) ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, f_\delta) \leq \delta_1$ var ki,

$$\rho_F(f_\delta, f_*) \leq \delta \leq \delta_0$$

bərabərsizliyindən

$$\rho_Y(y_\delta, y_*) \leq \varepsilon$$

olduğu alınır. Burada

$$y_\delta = R(f_\delta, \delta).$$

Aşkardır ki, (7.32) tənliyi üçün requlyarlaşdıran operator, bu tənliyin sağ tərəfinə nəzərən dayanıqlı həlli təyin edir. Buna görə də $R(f_\delta, \delta)$ operatoru (7.32) tənliyi üçün requlyarlaşdıran operator dursaydı, onda $y_\delta = R(f_\delta, \delta)$ -ya bu tənliyin requlyarlaşdırılmış həlli deyirlər.

Əgər $\rho_F(f_\delta, f_*) \leq \delta$ isə, onda $\delta \rightarrow 0$ -da requlyarlaşdırılmış həll-
 $y_\delta = R(f_\delta, \delta)$ (7.32) tənliyinin dəqiq həllinə y^* yığılar, yəni

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_Y(y_\delta, y^*) = 0.$$

Beləliklə, (7.32) tənliyinin sağ tərəfə nəzərən dayanıqlı həllini tapmaq üçün requlyarlaşdıran operatoru tapmaq kifayətdir. Şərh olunan bu sxemə requlyarlaşdırma üsulu deyirlər.

3. $[a, b]$ parçasında kəsilməz və bu parçada kvadratı ilə cəmlənən törəməsi olan funksiyalar çoxluğunu Y_1 ilə işarə edək.

Fərz edək ki, (7.32) tənliyinin sağ tərəfi dəqiq funksiya $f = f_*(x) \in L^2[a, b]$ olduqda Y_1 çoxluğunda yeganə həlli var. Tutaq ki, $f_*(x)$ əvəzinə aşağıdakı şərti ödəyən $f_\delta(x) \in L^2[a, b]$ funksiyası verilmişdir:

$$\rho_{L^2}(f_*, f_\delta) \leq \delta, \delta^2 < \int_c^d f_\delta^2(x) dx.$$

Beləliklə,

$$A(y) = f_*$$

tənliyi əvəzinə

$$A(y) = f_\delta$$

tənliyinə baxacağıq.

Q_δ ilə

$$\rho_{L^2}(A(y), f_\delta) \leq \delta$$

bərabərsizliyini ödəyən kəsilməz funksiyalar çoxluğunu işarə edək və təqribi həlli

$$Y_{1,\delta} = Q_\delta \cap Y_1$$

çoxluğunda axtaraq.

Bu çoxluğa daxil olan elə funksiya- «təqribi həll» var ki, sağ tərəfə nəzərən dayanıqlı olmur. Buna görə də bu çoxluqdan götürülmüş ixtiyari funksiyanı «təqribi həll» kimi götürmək olmaz. Bu çoxluqdan elə funksiya seçməliyik ki, sağ tərəfə nəzərən dayanıqlı olsun.

Bunun üçün Y_1 -ə daxil olan $y(s)$ funksiyalar üçün aşağıdakı funksionalı təyin edək:

$$\Omega(y) = \int_a^b \left\{ q(s)y^2(s) + p(s) \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right\} ds,$$

burada $q(s), p(s)$ elə mənfi olmayan kəsilməz funksiyalardır ki, $s \in [a, b]$ üçün $q^2(s) + p^2(s) \neq 0, p(s) \geq p_0 > 0$.

$\Omega(y)$ mənfi olmayan funksional olduğundan $Y_{1,\delta}$ çoxluğunda aşağı dəqiq sərhədini alır, yəni

$$\Omega_0 = \inf_{y \in Y_{1,\delta}} \Omega(y).$$

Axtarılan təqribi həlli- $y_\delta(s) \in Y_{1,\delta}$ elə seçməliyik ki, $\Omega(y)$ funksionalına minimum qiymət versin. Bu funksiyanı

$$y_\delta(s) = \tilde{R}(f_\delta, \delta)$$

şəklində götürsək, isbat etmək olar ki, (bax: dərsliyin axırında verilmiş ədəbiyyatda A.N. Tixinov və V.A. Arsenin kitabına) $\tilde{R}(f_\delta, \delta)$ operatoru aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $\tilde{R}(f_\delta, \delta)$ operatoru $L^2[c, d]$ -dən Y_1 -ə təsir edir:

2) $\tilde{R}(f_\delta, \delta)$ operatoru (7.32) tənliyi üçün requlyarlaşdırıcı operatorudur.

4. Nəhayət,

$$A(y) = f_\delta \quad (7.33)$$

tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı variasiya məsələsini həll edək:

Y_1 çoxluğuna daxil olan və $\rho_{L^2}(A(y), f_\delta) \leq \delta$ bərabərsizliyini ödəyən $y(s)$ funksiyalarından elə $y_\delta(s)$ funksiyasını tapmaq lazımdır ki, $\Omega(y)$ funksionalına $Y_{1,\delta}$ çoxluğunda minimum versin.

Bunun üçün əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. $\Omega(y)$ funksionalı $Y_{1,\delta}$ çoxluğunda özünün dəqiq aşağı sərhədini

$$\rho_{L^2}(A(y_\delta), f_\delta) = \delta$$

şərtini ödəyən $y_\delta(s) \in Y_1$ funksiyasında alır.

İsbatı. Fərz edək ki, $\Omega(y)$ funksionalı $Y_{1,\delta}$ çoxluğunda özünün dəqiq

aşağı sərhədi, yəni $\inf_{y \in Y_{1,\delta}} \Omega(y)$

$$\rho_{L^2}(A(y_\delta), f_\delta) = \beta < \delta$$

şərtini ödəyən $y_\delta(s) \in Y_1$ funksiyasında alır. Şərtə görə,

$$\delta^2 < \int_c^d f_\delta^2(x) dx$$

və $\Omega(0) = 0$ olduğundan $y_\delta(s) \neq 0$ olar. $A(y)$ operatoru kəsilməz olduğundan $y_\delta(s)$ funksiyasının Y_1 -ə daxil olan elə S ətrafı var ki, orada

$$\rho_{L^2}(A(y), A(y_\delta)) < \frac{\delta - \beta}{2}$$

bərabərsizliyi ödənər. Bu ətrafdan götürülmüş ixtiyari $y(s)$ funksiyası üçün

$$\begin{aligned} \rho_{L^2}(A(y), f_\delta) &\leq \rho_{L^2}(A(y), A(y_\delta)) + \rho_{L^2}(A(y_\delta), f_\delta) < \\ &< \frac{\delta - \beta}{2} + \beta = \frac{\delta + \beta}{2} < \delta \end{aligned}$$

olar.

Bu bərabərsizlikdən çıxır ki, S ətrafına daxil olan funksiyalar Q_δ çoxluğuna daxildir.

$\Omega(y)$ kvadrat funksional və $y_\delta(s) \neq 0$ olduğundan S ətrafına daxil olan $\tilde{y}_\delta(s) \in Y_{1,\delta}$ var ki,

$$\Omega(\tilde{y}_\delta) < \Omega(y_\delta)$$

bərabərsizliyi ödənər. Bu isə $\Omega(y)$ funksionalının $y_\delta(s)$ funksiyasında özünün dəqiq aşağı sərhədinin olmasına ziddir. Deməli, $\beta < \delta$ ola bilməz. Lemma isbat olundu.

Bu lemmadan istifadə etsək, (7.33) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı variasiya məsələsini həll etmək lazımdır.

Y_1 çoxluğundan götürülmüş və

$$\rho_{L^2}(A(y), f_\delta) = \delta$$

şərtini ödəyən $y(s)$ funksiyaları içərisində elə $y_\delta(s)$ funksiyasını tapmaq lazımdır ki, $\Omega(y)$ funksionalına $Y_{1,\delta}$ çoxluğunda minimum versin.

Bu məsələ variasiya hesabı kursundan məlum «şərti minimum» məsələsidir və Laqranj üsulu ilə həll olunur. Bunun üçün

$$M^\alpha(y, f_\delta) = \rho_{L^2}^2(A(y), f_\delta) + \alpha \Omega(y)$$

funksionalına minimum verən $y_\alpha(s)$ funksiyasını tapmaq lazımdır. Burada α parametri

$$\rho_{L^2}(A(y_\alpha), f_\delta) = \delta$$

şərtindən tapılır: $\alpha = \alpha(\delta)$.

$y_\alpha(s)$ ($\alpha = \alpha(\delta)$) funksiyası (7.33) tənliyinin sağ tərəfə nəzərən dayanıqlı olan təqribi həllidir.

§5. Volter-Fredholm integral tənliyi

Bundan qabaqkı paragraflarda, II növ xətti Volter və Fredholm integral tənliklərini həll etmək üçün təqribi üsulları şərh etdik. İndi isə aşağıdakı kimi xətti integral tənliyə baxaq:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)y(s)ds + \int_a^b K_0(x, s)y(s)ds. \quad (7.35)$$

Burada $K_0(x, s), K(x, s)$ ($a \leq x, s \leq b$), $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiyaları verilmiş kəsilməz funksiyalar, $y(x)$ isə axtarılan funksiyadır. Məchul funksiya həm Volter və həm də Fredholm integral operatorlarına daxil olduğundan bu tənliyə Volter-Fredholm integral tənliyi deyirlər.

Bu fəslin girişində qeyd etdiyimiz kimi, (7.35) tənliyini Fredholm integral tənliyinə gətirmək olar və Fredholm integral tənliyi üçün verdiyimiz təqribi üsullar bu tənlik üçün də verilə bilər. Lakin (7.35) tənliyi üçün elə təqribi üsullar verilə bilər ki, Fredholm tənliyi üçün yararlı olmasın. Aşağıda belə bir üsul şərh edilir.

Fərz edək ki, $K_0(x, s)$ nüvəsi cırılşan nüvədir, yəni

$$K_0(x, s) = \sum_{i=1}^m a_i(x)b_i(s).$$

(7.35) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı kimi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_n(x) &= f_{n-1}(x) + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds + \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m a_i(x)b_i(s) \right] y_n(s)ds, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

$$f_{n-1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds$$

işarələməsini aparsaq:

$$y_n(x) = f_{n-1}(x) + \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m a_i(x)b_i(s) \right] y_n(s)ds \quad (7.37)$$

olduğunu alırıq. Bu cırılşan nüvəli II növ Fredholm integral tənliyidir. Bu fəslin ikinci paragrafında göstərdik ki, (7.37) tənliyinin həlli aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$y_n(x) = f_{n-1}(x) + \int_a^b R(x, s)f_{n-1}(s)ds. \quad (7.38)$$

Burada

$$R(x, s) = \frac{1}{D} \sum_{i,j=1}^m D_{ij}a_i(x)b_j(s),$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & + & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 1 & + & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{ij} = - \int_a^b b_i(s)a_j(s)ds,$$

D_{ij} isə D determinantının α_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

$f_{n-1}(x)$ -in ifadəsini (7.38)-də nəzərə alsaq:

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds + \int_a^b R(x, s) \left[f(s) + \int_a^s K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds$$

və yaxud

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^b R(x, s)f(s)ds + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds + \int_a^b \int_a^s R(x, s)K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau ds. \quad (7.39)$$

$y_0(x) = f(x)$ olduğunu nəzərə alıb, (7.39)-da $n = 1, 2, \dots$ qəbul etməklə $\{y_n(x)\}$ ardıcılığının bütün elementlərini tapmaq olar.

İndi isə şərh etdiyimiz üsulun həllə yığılma sürətini tapmaq. $y^*(x)$ ilə (7.35) tənliyinin dəqiq həllini:

$$y^*(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)y^*(s)ds + \int_a^b K_0(x,s)y^*(s)ds,$$

$y_n(x)$ ilə təqribi həllini:

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_n(x) &= f(x) + \int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds + \int_a^b K_0(x,s)y_{n-1}(s)ds \\ (n=1,2,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

işarə edək. Onda

$$\begin{aligned} y_n(x) - y^*(x) &= \int_a^x K(x,s)[y_{n-1}(s) - y^*(s)]ds + \\ &+ \int_a^b K_0(x,s)[y_{n-1}(s) - y^*(s)]ds. \end{aligned} \quad (7.41)$$

$\varepsilon_i(x) = y_i(x) - y^*(x)$ ($i=1,2,\dots$) işarələmələrini aparsaq:

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \int_a^b K_0(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds$$

olduğunu alırıq.

$$F_{n-1}(x) = \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds$$

funksiyasına məlum funksiya kimi baxsaq:

$$\varepsilon_n(x) = F_{n-1}(x) + \int_a^b K_0(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds$$

cırlaşan nüvəli II növ Fredholm integral tənliyini almış olarıq.

(7.38) düsturundan istifadə etsək

$$\varepsilon_n(x) = F_{n-1}(x) + \int_a^b R(x,s)F_{n-1}(s)ds$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x,s)\varepsilon_n(s)ds + \int_a^b R(x,s)[K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)]ds,$$

yaxud

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \int_a^b \int_a^s R(x,s)K(x,s)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau ds.$$

$$M = \max_{(x,s)} |K(x,s)|, \quad R = \max_{(x,s)} |R(x,s)|$$

işarələmələrini aparsaq:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(x)| &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR \int_a^b \int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau ds \leq \\ &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR \int_a^b \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau ds = M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \\ &+ MR \left(\int_a^b |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau \right) \int_a^b ds = M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + MR(b-a) \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(s)|ds, \\ |\varepsilon_n(x)| &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + M_1 \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(s)|ds, \quad M_1 = MR(b-a). \end{aligned}$$

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etsək, ixtiyari n üçün

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_0 \frac{[M(b-a)]^n}{n!} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m-1} \frac{[M(b-a)]^m}{m!}, \quad (*)$$

$$\varepsilon_0 = \max_{a \leq x \leq b} |\varepsilon_0(x)|, \quad C_k = \frac{M_1}{M} \left\{ \varepsilon_0 \frac{[M(b-a)]^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-i-1} \frac{[M(b-a)]^{i+1}}{(i+1)!} \right\}.$$

Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruk.

Teorem 7.5. Fərz edək ki, $K_0(x,s)$, $K(x,s)$ ($a \leq x, s \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir və $K_0(x,s)$ cırlaşan nüvədir. Əgər $D \neq 0$ isə onda (7.35) tənliyinin təqribi həllini (7.39) düsturu ilə tapmaq olar və yığılma sürəti (*) düsturu ilə təyin olunur.

Qeyd. Biz Volter-Fredholm integral tənliyi üçün, $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşan olduqda, adi iterasiya üsulunun bir modifikasiyasını verdik və üsulun yığılma sürətini qiymətləndirdik. Məlumdur ki, $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşmayan olduqda da bəzi hallarda II növ Fredholm tənliyinin həllini tapmaq olar. Bu o deməkdir ki, $y_n(x)$ yaxınlaşmalarını (7.40) tənliyi vasitəsilə, $K_0(x,s)$ nüvəsi cırlaşmayan olan halda da tapmaq olar. Bu hal üçün üsulun yığılma sürəti aşağıdakı qayda ilə qiymətləndirilir.

$$M_0 = \max_{(x,s)} |K_0(x,s)|$$

işarələmsini qəbul etsək, (7.41)-dən

$$|\varepsilon_n(x)| \leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + M_0 \int_a^b |\varepsilon_n(s)| ds \quad (7.42)$$

olduğunu alırıq.

Bu bərabərsizliyin hər tərəfini $[a, b]$ parçasında integrallasaq:

$$\int_a^b |\varepsilon_n(s)| ds \leq M \int_a^b \left(\int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau \right) ds + M_0(b-a) \int_a^b |\varepsilon_n(s)| ds.$$

Fərz edək ki,

$$M_0(b-a) < 1$$

Onda

$$\int_a^b |\varepsilon_n(s)| ds \leq \frac{M}{1-M_0(b-a)} \int_a^b \left(\int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau \right) ds.$$

Bu qiymətləndirməni (7.42)-də nəzərə alsaq:

$$|\varepsilon_n(x)| \leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + \frac{M_0 M}{1-M_0(b-a)} \int_a^b \left(\int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)| d\tau \right) ds,$$

$$|\varepsilon_n(x)| \leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + \frac{M_0 M(b-a)}{1-M_0(b-a)} \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(s)| ds,$$

$$|\varepsilon_n(x)| \leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds + M_2 \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(s)| ds, \quad M_2 = \frac{M_0 M(b-a)}{1-M_0(b-a)}.$$

Buradan $\varepsilon_n(x)$ -in (*) bərabərsizliyini ödəyəni alırıq, beləki M_1 əvəzinə M_2 götürmək lazımdır.

Beləliklə isbat etdik ki, ixtiyari $K_0(x, s)$ nüvəsi üçün (7.40) yaxınlaşmaları, $M_0(b-a) < 1$ şərti ödəndikdə (7.35) tənliyinin həllinə yığılır və yığılma sürəti (*) düsturu ilə təyin edilir, beləki M_1 əvəzinə M_2 götürmək lazımdır.

§6. Xətti sərhəd məsələlərinin integral tənliklər üsulu ilə həlli

1. Aşağıdakı kimi xətti sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\left. \begin{aligned} y'' &= q(x)y + f(x), \\ y(a) &= y_a, \quad y(b) = y_b. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Dərsləyin V fəslində (7.43) məsələsinin həll etmək üçün bir neçə təqribi üsul vermişik. Bu paraqrafda (7.43) məsələsinin Volter-Fredholm

integral tənliyinə gətirməklə həll edəcəyik.

Əvvəlcə məsələni ekvivalent integral tənliyə gətirək. Fərz edək ki, $y(x)$ funksiyası (7.43) məsələsinin həllidir. Onda (7.43)-dən

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x [q(s)y(s) + f(s)] ds,$$

$$y(x) = y_a + y'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)] ds d\tau. \quad (7.44)$$

$y(b) = y_b$ olduğundan

$$y_a = y'(a)(b-a) + \int_a^b \int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)] ds d\tau = y_b,$$

$$y'(a) = \frac{y_b - y_a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)] ds d\tau.$$

Tapdığımız bu qiyməti (7.44)-də nəzərə alsaq:

$$y(x) = y(a) + \frac{x-a}{b-a} (y_b - y_a) - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b \int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)] ds d\tau +$$

$$+ \int_a^x \int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)] ds d\tau,$$

$$y(x) = \frac{b-x}{b-a} y_a + \frac{x-a}{b-a} y_b + \int_a^x \int_a^\tau f(s) ds d\tau - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b \int_a^\tau f(s) ds d\tau +$$

$$+ \int_a^x \int_a^\tau q(s)y(s) ds d\tau - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b \int_a^\tau q(s)y(s) ds d\tau.$$

Məlumdur ki,

$$\int_a^x \int_a^\tau f(s) ds d\tau = \int_a^x (x-s) f(s) ds.$$

Bu düsturdan istifadə etsək:

$$y(x) = \frac{b-x}{b-a} y_a + \frac{x-a}{b-a} y_b + \int_a^x (x-s) f(s) ds - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-s) f(s) ds +$$

$$+ \int_a^x (x-s) q(s)y(s) ds - \int_a^b \frac{x-a}{b-a} (b-s) q(s)y(s) ds.$$

Aşağıdakı kimi işarələmələr apararaq:

$$F(x) = \frac{b-x}{b-a}y_a + \frac{x-a}{b-a}y_b + \int_a^x (x-s)f(s)ds - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-s)f(s)ds,$$

$$K(x,s) = (x-s)q(s), \quad K_0(x,s) = -\frac{x-a}{b-a}(b-s)q(s),$$

aşağıdakı kimi Volter-Fredholm integral tənliyini almış olarıq:

$$y(x) = F(x) + \int_a^x K(x,s)y(s)ds + \int_a^b K_0(x,s)y(s)ds. \quad (7.45)$$

Bu tənlik xətti Volter-Fredholm integral tənliyidir.

Beləliklə isbat etdik ki, (7.43) məsələsinin həlli (7.45) integral tənliyinin də həlli olar. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (7.45) tənliyinin də həlli (7.43) məsələsinin həllidir. Bu o deməkdir ki, (7.44) integral tənliyi (7.43) məsələsinə ekvivalentdir, yəni (7.43) məsələsinin həllini tapmaq üçün (7.45) integral tənliyinin həllini tapmaq kifayətdir.

$$K_0(x,s) = -\frac{x-a}{b-a}(b-s)q(s)$$

cırılşan nüvə olduğundan (7.45) tənliyini §5-də verilən üsulla həll etmək olar.

İndi isə (7.45) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün aşağıdakı kimi yaxınlaşmalar quraq:

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= F(x), \\ y_n(x) &= F(x) + \int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds + \int_a^b K_0(x,s)y_n(s)ds \end{aligned} \right\} \quad (n=1,2,\dots). \quad (7.46)$$

$$F_{n-1}(x) = F(x) + \int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)ds$$

işarələməsini aparsaq, $\{y_n(x)\}$ ardıcılığını tapmaq üçün aşağıdakı cırılşan nüvəli II növ Fredholm integral tənliyini həll etmək kifayətdir:

$$y_n(x) = F_{n-1}(x) + \int_a^b \frac{x-a}{b-a}(b-s)q(s)y_n(s)ds.$$

Bu integral tənliyin həllini

$$y_n(x) = F_{n-1}(x) + \frac{x-a}{b-a}c_n \quad (7.47)$$

şəklində axtarsaq:

$$F_{n-1}(x) + \frac{x-a}{b-a}c_n = F_{n-1}(x) + \int_a^b \frac{x-a}{b-a}(b-s)q(s) \times \\ \times \left[F_{n-1}(s) + \frac{s-a}{b-a}c_n \right] ds$$

olduğunu alarıq. Buradan

$$c_n = \int_a^b (b-s)q(s)F_{n-1}(s)ds + \left[\int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-a}q(s)ds \right] c_n.$$

Fərz edək ki,

$$A = \int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-a}q(s)ds \neq 1.$$

Onda

$$c_n = \frac{1}{1-A} \int_a^b (b-s)q(s)F_{n-1}(s)ds.$$

c_n -nin bu qiymətini (7.47)-də yerinə yazsaq:

$$y_n(x) = F_{n-1}(x) + \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{1}{1-A} \int_a^b (b-s)q(s)F_{n-1}(s)ds.$$

İndi isə $F_{n-1}(x)$ -in ifadəsini yerinə yazsaq:

$$y_n(x) = F(x) + \int_a^x (x-s)q(s)y_{n-1}(s)ds + \frac{(x-a)}{(x-b)(1-A)} \times \\ \times \int_a^b (b-s)q(s) \left[F(s) + \int_a^s (s-\tau)q(\tau)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds, \\ y_n(x) = F(x) + \frac{(x-a)}{(x-b)(1-A)} \int_a^b (b-s)q(s)F(s)ds + \\ + \int_a^x (x-s)q(s)y_{n-1}(s)ds + \frac{x-a}{(x-b)(1-A)} \int_a^b (b-s)q(s) \times \\ \times \left[\int_a^s (s-\tau)q(\tau)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds.$$

Buradan

$$y_n(x) = \tilde{F}(x) + \int_a^x (x-s)q(s)y_{n-1}(s)ds +$$

$$+ \frac{x-a}{(x-b)(1-A)} \int_a^b \int_a^s (b-s)q(s)(s-\tau)q(\tau)y_{n-1}(\tau)d\tau ds, \quad (7.48)$$

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \frac{x-a}{(x-b)(1-A)} \int_a^b (b-s)q(s)F(s)ds.$$

$y_0(x) = f(x)$ olduğunu nəzərə alıb, (7.48)-də $n=1,2,\dots$ qəbul etməklə $\{y_n(x)\}$ yaxınlaşmalarının bütün elementlərini tapmaq olar.

(7.48) düsturu ilə tapılan $y_n(x)$ funksiyasını (7.45) integral tənliyinin, yəni (7.43) məsələsinin, təqribi həlli kimi qəbul edəcəyik.

İndi isə $y_n(x)$ ardıcılığının (7.45) tənliyinin dəqiq həllinə $y^*(x)$ -ə yığıldığını isbat etmək və eyni zamanda yığılma sürətini təyin etmək.

$\varepsilon_n(x) = y_n(x) - y^*(x)$ işarələməsini aparsaq (7.45) və (7.46)-dan

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x (x-s)q(s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \int_a^b \frac{x-a}{b-a} (b-s)q(s)\varepsilon_n(s)ds$$

olduğu alınar.

Bu tənlik $\varepsilon_n(x)$ -ə nəzərən cırlaşan nüvəli Fredholmun I növ integral tənliyidir. Bunun həllini

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x (x-s)q(s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \frac{x-a}{b-a}c_n$$

şəklində axtaraq. Onda

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-s)q(s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \frac{x-a}{b-a}c_n &= \int_a^x (x-s)q(s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \\ &+ \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-s)q(s) \left[\int_a^s (s-\tau)q(\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau + \frac{s-a}{b-a}c_n \right] ds, \\ c_n &= \int_a^b (b-s)q(s) \int_a^s (s-\tau)q(\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau ds + \left[\int_a^b (b-s)q(s) \frac{s-a}{b-a} ds \right] c_n, \\ c_n &= \int_a^b \int_a^s (b-s)(s-\tau)q(s)q(\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau ds + Ac_n. \end{aligned}$$

$A \neq 1$ olduğundan

$$c_n = \frac{1}{1-A} \int_a^b \int_a^s (b-s)(s-\tau)q(s)q(\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau ds.$$

c_n -nin bu qiymətin $\varepsilon_n(x)$ -in ifadəsində nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= \int_a^x (x-s)q(s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \frac{x-a}{(b-a)(1-A)} \times \\ &\times \int_a^b \int_a^s (b-s)(s-\tau)q(s)q(\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau ds. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(x)| &\leq \int_a^x (x-s)|q(s)||\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{x-a}{(b-a)|1-A|} \times \\ &\times \int_a^b \int_a^s (b-a)(x-\tau)|q(s)||q(\tau)||\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau ds, \\ |\varepsilon_n(x)| &\leq \int_a^x (x-s)|q(s)||\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{x-a}{(b-a)|1-A|} \times \\ &\times \int_a^b \left[\int_a^x (b-a)(x-\tau)|q(\tau)||\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau \right] |q(s)|ds, \\ |\varepsilon_n(x)| &\leq \int_a^x (x-s)|q(s)||\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{x-a}{|1-A|} \left[\int_a^b |q(s)|ds \right] \times \\ &\times \int_a^x (x-\tau)|q(\tau)||\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau, \\ |\varepsilon_n(x)| &\leq q_0(b-a) \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{(b-a)^3 q_0^2}{|1-A|} \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(s)|ds, \\ q_0 &= \max_{a \leq x \leq b} |q(x)|. \end{aligned}$$

Nəhayət,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(x)| &\leq L_1 \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + L_2 \int_a^b |\varepsilon_{n-1}(s)|ds, \\ L_1 &= q_0(b-a), \quad L_2 = \frac{(b-a)^3 q_0^2}{|1-A|}. \end{aligned}$$

Buradan, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, asanlıqla aşağıdakı bərabərsizliyi ala bilərik.

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_0 \frac{[L_1(b-a)]^n}{n!} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m-1} \frac{[L_1(b-a)]^m}{m!}, \quad \varepsilon_0 = \max_{a \leq x \leq b} |\varepsilon_0(x)|,$$

$$C_k = \frac{L_2}{L_1} \left\{ \varepsilon_0 \frac{[L_1(b-a)]^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-i-1} \frac{[L_1(b-a)]^{i+1}}{(i+1)!} \right\}.$$

Nəhayət, ixtiyari n üçün

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |y_0(x) - y^*(x)| + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m-1} \frac{[L_1(b-a)]^m}{m!}. \quad (**)$$

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 7.6. Tutaq ki, $q(x)$ və $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir və

$$A = \int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-a} q(s) ds \neq 1.$$

Onda (7.43) məsələsinin təqribi həllini $y_n(x)$ (7.48) düsturu ilə tapmaq olar və bu təqribi həll məsələnin dəqiq həllinə yığılma sürəti $(**)$ düsturu ilə təyin edilir.

Biz yuxarıda (7.43) məsələsini ekvivalent Volter-Fredholm integral tənliyinə gətirib, onun həlli üçün təqribi üsul verdik. Qeyd etmək lazımdır ki, bəzən (7.43) məsələsini II növ Fredholm integral tənliyinə gətirib həll edirlər.

(7.43) məsələsini Fredholm integral tənliyinə gətirmək üçün (7.45) tənliyini Fredholm integral tənliyinə gətirmək lazımdır.

(7.45) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$y(x) = F(x) + \int_a^x K(x,s)y(s)ds + \int_a^x K_0(x,s)y(s)ds + \int_x^b K_0(x,s)y(s)ds,$$

$$y(x) = F(x) + \int_a^x [K(x,s) + K_0(x,s)]y(s)ds + \int_x^b K_0(x,s)y(s)ds,$$

Aşkardır ki,

$$K(x,s) + K_0(x,s) = (x-s)q(s) - \frac{x-a}{b-a}(b-s)q(s) =$$

$$= \left[(x-s) - \frac{x-a}{b-a}(b-s) \right] q(s) = -\frac{(s-a)(b-x)}{b-a} q(s).$$

Buna görə də

$$y(x) = F(x) - \int_a^x \frac{(s-a)(b-x)}{b-a} q(s)y(s)ds - \int_x^b \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} q(s)y(s)ds,$$

$$y(x) = F(x) + \int_a^b G(x,s)q(s)y(s)ds \quad (7.49)$$

olacaqdır. Burada

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(b-x)}{b-a} & a \leq s \leq x, \\ \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} & x \leq s \leq b. \end{cases}$$

Bu funksiya **Qrin funksiyası** deyirlər. Diferensial tənliklər kursundan məlumdur ki, Qrin funksiyası müsbət deyil, kəsilməzdir və

$$|G(x,s)| \leq \frac{b-a}{4}, \quad \int_a^b |G(x,s)| ds \leq \frac{(b-a)^2}{8}.$$

(7.49) tənliyinin təqribi həllini tapmaq üçün adi ardıcıl yaxınlaşma üsulunu tətbiq edək:

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= F(x), \\ y_n(x) &= F(x) + \int_a^b G(x,s)q(s)y_{n-1}(s)ds \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

Fərz edək ki,

$$\alpha_* = \frac{(b-a)}{8} \max_x |q(x)| < 1.$$

Onda aşkardır ki,

$$\int_a^b |G(x,s)||q(s)|ds < 1.$$

Bu fəslin üçüncü paragrafında isbat etdik ki, bu şərt daxilində (7.49) tənliyi üçün qurulmuş adi iterasiyalar (7.50) tənliyinin dəqiq həllinə yığılacaq və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq \alpha_*^n \max_x |y_0(x) - y^*(x)|. \quad (7.51)$$

Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 7.7. Tutaq ki, $q(x)$ və $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiyaları kəsilməz funksiyalardır və

$$\alpha_* = \frac{(b-a)}{8} \max_x |q(x)| < 1.$$

Onda (7.50) düsturları ilə təyin olunmuş funksiyalar ardıcılığı, (7.43)

məsələsinin həllinə yığılır və yığılma sürəti (7.51) düsturu ilə təyin olunur.

2. İndi isə (7.43) məsələsindən fərqli başqa bir məsələyə baxaq və göstərək ki, bu məsələni də Volter-Fredholm integral tənliyinə gətirib, yuxarıda şərh etdiyimiz üsulla təqribi həllini tapmaq olar.

$$\left. \begin{aligned} y'' &= q(x)y + f(x), \\ y(a) &= y_a, \quad y(c) = y(b) \quad (a < c < b) \end{aligned} \right\}. \quad (7.52)$$

Xüsusi sərhəd məsələsinə baxaq.

Əvvəlcə bu məsələni ekvivalent integral tənliyə gətirək. Fərz edək ki, $y(x)$ funksiyası (7.52) məsələsinin həllidir. Onda (7.52)-dən

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(a) + \int_a^x [q(s)y(s) + f(s)]ds, \\ y(x) &= y_a + y'(a)(x-a) + \int_a^x \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (7.53)$$

$y(c) = y(b)$ şərtini nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} y_a + y'(a)(c-a) + \int_a^c \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau &= \\ = y_a + y'(a)(b-a) + \int_a^b \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau \end{aligned}$$

və ya

$$(b-c)y'(a) = \int_a^c \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau - \int_a^b \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau$$

olduğunu alırıq. Buradan

$$\begin{aligned} y'(a) &= \frac{1}{b-c} \int_a^c \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{b-c} \int_a^b \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

$y'(a)$ -nın bu qiymətini (7.53)-də nəzərə alsaq:

$$y(x) = y_a + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau -$$

$$\begin{aligned} &- \frac{x-a}{b-c} \int_a^b \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau + \int_a^x \left(\int_a^\tau [q(s)y(s) + f(s)]ds \right) d\tau, \\ y(x) &= y_a + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c \left(\int_a^\tau f(s)ds \right) d\tau - \frac{x-a}{b-c} \int_a^b \left(\int_a^\tau f(s)ds \right) d\tau + \\ &\quad + \int_a^x \left(\int_a^\tau f(s)ds \right) d\tau + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c \left(\int_a^\tau q(s)y(s)ds \right) d\tau - \\ &\quad - \frac{x-a}{b-c} \int_a^b \left(\int_a^\tau q(s)y(s)ds \right) d\tau + \int_a^x \left(\int_a^\tau q(s)y(s)ds \right) d\tau \end{aligned}$$

olar.

$$\int_a^x \int_a^\tau f(s)dsd\tau = \int_a^x (x-s)f(s)ds$$

düsturundan istifadə etsək:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_a + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c (c-s)f(s)ds - \frac{x-a}{b-c} \int_a^b (b-s)f(s)ds + \\ &\quad + \int_a^x (x-s)f(s)ds + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c (c-s)q(s)y(s)ds - \\ &\quad - \frac{x-a}{b-c} \int_a^b (b-s)q(s)y(s)ds + \int_a^x (x-s)q(s)y(s)ds. \end{aligned}$$

Aşağıdakı işarələmələri aparsaq:

$$F(x) = y_a + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c (c-s)f(s)ds - \frac{x-a}{b-c} \int_a^b (b-s)f(s)ds + \int_a^x (x-s)f(s)ds,$$

$$\begin{aligned} K_0(x, s) &= -\frac{x-a}{b-c} (b-s)q(s), \quad K_1(x, s) = \frac{x-a}{x-c} (c-s)q(s), \\ K(x, s) &= (x-s)q(s). \end{aligned}$$

Onda

$$\begin{aligned} y(x) + F(x) &+ \int_a^b K_0(x, s)y(s)ds + \int_a^c K_1(x, s)y(s)ds + \\ &\quad + \int_a^x K(x, s)y(s)ds \end{aligned} \quad (7.54)$$

Volter-Fredholm integral tənliyini almış olarıq. Bu integral tənlik (7.52) məsələsinə ekvivalentdir. Aşkardır ki, $K_0(x, s)$ və $K_1(x, s)$ nüvələri cırlaşandır.

(7.54) tənliyini təqribi həll etmək üçün ardıcıl yaxınlaşmaları aşağıdakı kimi quraq:

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= F(x), \\ y_n(x) &= F(x) + \int_a^b K_0(x, s)y_n(s)ds + \int_a^c K_1(x, s)y_n(s)ds + \\ &\quad + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds \quad (n=1, 2, \dots). \\ F_{n-1}(x) &= F(x) + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

işarələməsini qəbul edib,

$$y_n(x) = F_{n-1}(x) + \int_n^b K_0(x, s)y_n(s)ds + \int_a^c K_1(x, s)y_n(s)ds$$

tənliyindən $y_n(x)$ -i tapaq.

Bu tənliyin həllini

$$y_n(x) = F_{n-1}(x) - \frac{x-a}{b-c} C_n$$

şəklində axtarsaq:

$$\begin{aligned} F_{n-1}(x) - \frac{x-a}{b-c} C_n &= F_{n-1}(x) - \frac{x-a}{b-c} \int_a^b (b-s)q(s) \times \\ &\quad \times \left[F_{n-1}(s) - \frac{s-a}{b-c} C_n \right] ds + \\ &\quad + \frac{x-a}{b-c} \int_a^c (c-s)q(s) \left[F_{n-1}(s) - \frac{s-a}{b-c} C_n \right] ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \int_a^b (b-s)q(s)F_{n-1}(s)ds - \left[\int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \right] C_n - \\ &\quad - \int_a^c (c-s)q(s)F_{n-1}(s)ds + \left[\int_a^c \frac{(c-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \right] C_n. \end{aligned}$$

Fərz edək ki,

$$A = - \int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds + \int_a^c \frac{(c-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \neq 1.$$

Onda

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{1-A} \int_a^b (b-s)q(s)F_{n-1}(s)ds - \frac{1}{1-A} \int_a^c (c-s)q(s)F_{n-1}(s)ds, \\ C_n &= \frac{1}{1-A} \int_a^b (b-s)q(s)F(s)ds - \frac{1}{1-A} \int_a^c (c-s)q(s)F(s)ds + \\ &\quad + \frac{1}{1-A} \int_a^b (b-s)q(s) \left[\int_a^s K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds - \\ &\quad - \frac{1}{1-A} \int_a^b (c-s)q(s) \left[\int_a^s K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds. \end{aligned}$$

C_n -nin qiymətini $y_n(x)$ -in ifadəsində yerinə yazsaq:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= F(x) + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds - \frac{x-a}{(1-A)(b-c)} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_a^b (b-s)q(s)F(s)ds - \int_a^c (c-s)q(s)F(s)ds + \right. \\ &\quad + \int_a^b (b-s)q(s) \left[\int_a^b K(x, s)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds - \\ &\quad \left. - \int_a^b (c-s)q(s) \left[\int_a^s K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau \right] ds \right\}, \end{aligned}$$

yaxud

$$\begin{aligned} y_n(x) &= F(x) + \int_a^x K(x, s)y_{n-1}(s)ds - \frac{x-a}{(1-A)(b-c)} \times \\ &\quad \times \int_a^b \int_a^s (b-s)q(s)K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau ds + \frac{x-a}{(1-A)(b-c)} \times \\ &\quad \times \int_a^b \int_a^s (c-s)q(s)K(s, \tau)y_{n-1}(\tau)d\tau ds, \quad (7.56) \\ \tilde{F}(x) &= F(x) - \frac{x-a}{(1-A)(b-c)} \int_a^b (b-s)q(s)F(s)ds + \end{aligned}$$

$$+ \frac{x-a}{(1-A)(b-c)} \int_a^c (c-s)q(s)F(s)ds,$$

$y_0(x) = F(x)$ olduğunu nəzərə alıb, $n=1,2,\dots$ götürməklə $\{y_n(x)\}$ ardıcılığının bütün elementlərini (7.56) düsturu ilə tapmaq olar.

İrəlidəki bənddə olduğu kimi, bu ardıcılığın (7.52) məsələsinin həllinə yığıldığını isbat etmək olar və yığılma sürətini təyin etmək olar.

İndi isə isbat edək ki, $y_n(x)$ ardıcılığı (7.52) məsələsinin həllinə yığılır və yığılma sürətini tapaq. $y^*(x)$ ilə (7.52) məsələsinin həllini işarə edib,

$$\varepsilon_n(x) = y_n(x) - y^*(x)$$

işarələməsini aparaq.

(7.54) və (7.55)-dən

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^b K_0(x,s)\varepsilon_n(s)ds + \int_a^c K_1(x,s)\varepsilon_n(s)ds + \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds.$$

Bu tənlik $\varepsilon_n(x)$ -ə nəzərən cırlaşan nüvəli I növ Fredholm integral tənliyidir. Bunun həllini

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds - \frac{x-a}{b-c} C_n \quad (7.57)$$

şəklində axtarsaq:

$$\begin{aligned} \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds - \frac{x-a}{b-c} C_n &= \int_a^b K_0(x,s) \times \\ &\times \left[\int_a^s K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau - \frac{s-a}{b-c} C_n \right] ds + \\ &+ \int_a^c K_1(x,s) \left[\int_a^s K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau - \frac{s-a}{b-c} C_n \right] ds + \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds, \\ C_n &= \int_a^b (b-s)q(s) \left[\int_a^s K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau - \frac{s-a}{b-c} C_n \right] ds - \\ &- \int_a^c (c-s)q(s) \left[\int_a^s K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)d\tau - \frac{s-a}{b-c} C_n \right] ds, \\ C_n &= \int_a^c \int_a^s (b-s)q(s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau - \left[\int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \right] C_n - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \int_a^c \int_a^s (c-s)q(s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau + \left[\int_a^c \frac{(c-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \right] C_n, \\ &1 + \int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds - \left[\int_a^c \frac{(c-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \right] C_n = \\ &= \int_a^b \int_a^s (b-s)q(s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau - \int_a^c \int_a^s (c-s)q(s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau. \\ A &= - \int_a^b \frac{(b-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds + \int_a^c \frac{(c-s)(s-a)}{b-c} q(s)ds \neq 1 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{1-A} \int_a^b \int_a^s (b-s)q(s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau - \\ &- \frac{1}{1-A} \int_a^c \int_a^s (c-s)q(s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau. \end{aligned}$$

C_n -nin bu qiymətini (7.57)-də nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= \int_a^x K(x,s)\varepsilon_{n-1}(s)ds + \frac{1}{1-A} \int_a^b \int_a^s K_0(x,s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau - \\ &- \frac{1}{1-A} \int_a^c \int_a^s K_1(x,s)K(s,\tau)\varepsilon_{n-1}(\tau)dsd\tau \end{aligned}$$

olduğunu alırıq.

Buradan

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(x)| &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{M_0 M}{|1-A|} \int_a^b \int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau ds + \\ &+ \frac{M_1 M}{|1-A|} \int_a^c \int_a^s |\varepsilon_{n-1}(\tau)|d\tau ds, \\ |\varepsilon_n(x)| &\leq M \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \frac{M_0 M(b-a)}{|1-A|} \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds + \\ &+ \frac{M_1 M(c-a)}{|1-A|} \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)|ds, \end{aligned}$$

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \gamma \int_a^x |\varepsilon_{n-1}(s)| ds, \quad |\varepsilon_n(x)| \leq \gamma^n \varepsilon_0.$$

Burada

$$M = \max_x |K(x, s)|, \quad M_i = \max_x |K_i(x, s)| \quad (i = 0, 1),$$

$$\gamma = M + \frac{M_0 M(b-a)}{|1-A|} + \frac{M_1 M(c-a)}{|1-A|}.$$

Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq.

Teorem 7.8. Tutaq ki, $q(x)$ və $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) funksiyaları kəsilməzdir və $\gamma < 1$.

Onda (7.56) düsturları ilə təyin olunan $\{y_n(x)\}$ ardıcılığı (7.52) məsələsinin həllinə yığılır və yığılma sürəti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq \gamma^n \max_x |y_0(x) - y^*(x)|.$$

3. Operator tənliyin təqribi həlli. Biz yuxarıda, bu fəslin beşinci paragrafında Volter-Fredholm tənliyinin təqribi həlli üçün bir üsul verdik. Bu paragrafda isə həmin üsulu (7.43) məsələsinin təqribi həllinə tətbiq etdik. Aşağıda bu üsulun ideyası ümumi şəkildə bir sıra xətti operator tənliklər üçün şərh edilir.

$$y = A_1 y + A_2 y + f \quad (7.58)$$

operator tənliyinə baxaq. Fərz edək ki, A_1 operatoru sonlu ölçülü, A_2 operatoru isə elə operatordur ki, onun spektral radiusu kiçik ədəddir.

$$S_k = 1 + A_2 + \dots + A_2^k$$

ilə işarə edək.

Aşkardır ki, kafi qədər böyük k ədədi üçün S_k operatoru $I - A_2$ operatorunun tərsinə, yəni $(I - A_2)^{-1}$ operatoruna yaxındır. Buna görə də

$$S_k y = S_k A_1 y + A_2^{k+1} y + S_k f$$

tənliyi (7.52) tənliyinə ekvivalent olacaqdır.

Bu axırıncı tənliyi

$$y = S_k A_1 y + A_2^{k+1} y + S_k f \quad (7.59)$$

şəklində yazaq.

A_1 operatorunun sonlu ölçülü olmasından $S_k A_1$ operatorunun da sonlu ölçülü olduğu çıxır. Buna görə də (7.59) tənliyinin həllini tapmaq

üçün aşağıdakı qayda ilə qurulan yaxınlaşmalar

$$y_{n+1} = S_k A_1 y_{n+1} + A_2^{k+1} y_n + S_k f \quad (n = 0, 1, \dots)$$

(7.58) tənliyinin də təqribi həllini tapmaq üçün səmərəli olacaqdır.

İSTİFADƏ OLUNMUŞ ƏDƏBİYYAT

1. Бахвалов Н.С. Численные методы, т. I, «Наука», М., 1975.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. I, «Наука», М., 1966, т.2, «Фигматгиз», М., 1962.
3. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы, «Наука», М., 1966.
4. Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ, «Наука», М., 1977.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т. I, «Наука», М., 1976.
6. Мамедов Я.Д. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, «Маариф», Баку, 1974.
7. Рябенский В.С. Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений, «Гостехиздат», М., 1956.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. «Наука», М., 1977.
9. Самарский А.А. Введение в численные методы, М., 1982.
10. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике, «Наука», М., 1976.
11. Тихонов А.Н., Арсенин В.А. Методы решения некорректных задач, «Наука», М., 1979.
12. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, «Гостехиздат», М-Л., 1950.

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ.....	3
------------	---

I Hissə. Riyazi analizin təqribi üsulları

1 FƏSİL. Yaxınlaşmalar nəzəriyyəsi.....	11
§ 1. İnterpolyasiya məsələsi.....	11
§ 2. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi.....	14
§ 3. Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi.....	20
§ 4. Başqa interpolyasiya çoxhədliləri.....	25
§ 5. İnterpolyasiya prosesinin yığılması.....	30
§ 6. Təkrarlanan düyün nöqtələri üçün interpolyasiya çoxhədlisi.....	33
§ 7. Çoxdəyişənli funksiyalar üçün interpolyasiya çoxhədliləri.....	37
§ 8. Splaynlar vasitəsilə yaxınlaşmalar.....	39
§ 9. Ən yaxşı yaxınlaşmalar.....	42
§ 10. Orta kvadratik yaxınlaşmalar.....	43
II Fəsil. Ədədi diferensiallama və integrallama.....	48
§ 1. Ədədi diferensiallama.....	48
§ 2. Ədədi integrallama.....	51
§ 3. Ən yaxşı qalıq hədlili kvadratura düsturu.....	68
§ 4. Kvadratura düsturunun dəqiqliyinin artırılması.....	71
§ 5. Çoxqat integralların təqribi hesablanması.....	74
§ 6. Qeyri-müəyyən integralların təqribi hesablanması.....	77

II Hissə. Cəbrin təqribi üsulları

III Fəsil. Xətti tənliklər sisteminin təqribi üsullarla həlli.....	81
§ 1. Yoxetmə üsulu.....	81
§ 2. Parçalanma üsulu.....	83
§ 3. Ortoqonallaşdırma üsulu.....	85
§ 4. İterasiya üsulları.....	87
§ 5. Enmə üsulları.....	93
§ 6. Adi iterasiyanın yığılmasını sürətləndirmək üsulları.....	97
§ 7. Matrisin məxsusi ədədləri və vektorlarının təqribi üsullarla tapılması.....	102
VI Fəsil. Qeyri-xətti tənliklərin təqribi üsullarla həlli.....	115
§ 1. Sıxılmış inikas prinsipi.....	115
§ 2. Ardıcıl yaxınlaşma üsulları.....	118
§ 3. Lobaçevski üsulu.....	131
§ 4. Qeyri-xətti tənliklər sisteminin təqribi üsulları haqqında.....	135

III Hissə. Diferensial və integral tənliklərin təqribi üsulları

V Fəsil. Adi diferensial tənliklərin ədədi üsulları	140
§ 1. Analitik təqribi üsullar	140
§ 2. Runqe-Kutta üsulu	147
§ 3. Adams üsulu	151
§ 4. Ştyormer üsulu	157
§ 5. Sonlu-fərqlər üsulu	159
§ 6. Sərhəd məsələsinin fərqlər üsulu ilə həlli	163
§ 7. Xətti sərhəd məsələsinin dəqiq fərqlər sxemi ilə həlli	170
§ 8. Xətti sərhəd məsələsinin başlangıç məsələlərə gətirilməsi	174
§ 9. Operator tənliklər üçün variasiya üsulu	177
§ 10. Rits üsulu	179
§ 11. Uyğunsuzluqların minimumlaşdırılması üsulları haqqında	187
VI Fəsil. Xüsusi törəməli diferensial tənliklərin təqribi üsullarla həlli	190
§ 1. Şəbəkə üsulu	190
§ 2. Fərqlər sxeminin dayanıqlığı və yığılması	211
§ 3. Düz xətlər üsulu	218
§ 4. Rits üsulu	227
§ 5. Kvazixətti hiperbolik tipli tənliklər üçün xarakteristika üsulu	229
VII Fəsil. İnteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli	242
§ 1. İnteqralı inteqral cəmi ilə əvəz etmək üsulu	243
§ 2. Nüvəni cırılmış nüvə ilə əvəz etmək üsulu	247
§ 3. Adi iterasiya üsulu	252
§ 4. Requlyarlaşdırma üsulu	260
§ 5. Følter-Fredholm inteqral tənliyi	265
§ 6. Xətti sərhəd məsələlərinin inteqral tənliklər üsulu ilə həlli	270
İstifadə olunmuş ədəbiyyat	285

Çapa imzalanmışdır: 14.03.2008.
Formatı 60x84 1/16. Sifariş 34
Həcmi 18,0 ç.v. Sayı 350.

«Bakı Universiteti» nəşriyyatı,
Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.

