AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ
MEXANİKA-RİYAZİYYAT FAKÜLTƏSİ
«İDARƏETMƏ NƏZƏRİYYƏSİNİN RİYAZİ ÜSULLARI» KAFEDRASI

«VARİASİYA HESABI VƏ OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI» kursunun

P R O Q R A M I

Universitetlər üçün

İstiqamət TE 01.00.00 – riyaziyyat
İxtisas TE 01.01.00 - riyaziyyat

Proqram
Azərbvycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin
21.10.2008-ci il 1164 saylı əmri ilə nəşr olunur
Bakı Dövdət Universitetinin Nəşriyyatı

BAKI - 2008

Tərtib edənlər:

1. f.-r.e.d., prof.M.H.Yaqubov
2. f.-r.e.d., prof.H.F.Quliyev

Elmi redaktor:
«İdarəetmə nəzəriyyəsinin riyazi üsulları» kafedrasının müdiri, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor M.H.Yaqubov

Rəyçilər:

1. f.-r.e.n., prof.Q.K.NAMAZOV
2. f.-r.e.n., prof.K.Q.HƏSƏNOV

Variasiya hesabı və optimallaşdırma üsulları

Ön söz

Variasiya hesabı klassik riyaziyyatın mühüm bölmələrindən biridir. Bu elmin yaranma tarixi 1696-cı ildən başlayır və braxistoxron haqqında məsələnin qoyuluşu ilə bağlıdır. Sonralar mexanikanın və fizikanın bir çox başqa məsələləri də ekstremal qoyuluşda verildi və bu məsələlərin həlli tələbatı variasiya hesabının bir elm sahəsi kimi formalaşmağına çox böyük kömək etdi.Hələ variasiya hesabının yaranmasına qədər bir və çoxdəyişənli funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılmasına gətirilən xeyli praktik məsələ var idi. Sonralar bu məsələlər qeyri-xətti proqramlaşdırma, qabarıq proqramlaşdırma və xətti proqramlaşdırma məsələləri kimi elmi sahələrin yaranmasına səbəb oldu.

Yuxarıda dediklərimiz hamısı «Variasiya hesabı və optimallaşdırma üsulları» adlı fənn kimi tədris olunur.

BDU-nun mexanika-riyaziyyat fıkültəsində təhsil alan tələbələrə «Variasiya hesabı və optimallaşdırma üsulları» fənni VII semestrdə tədris olunur. Təqdim olunan proqramda «Variasiya hesabı və optimallaşdırma üsulları» fənninə dair əsas bölmələr, bu bölmələrə daxil olan mövzular verilmişdir. Proqramdan «Riyaziyyat» ixtisası üzrə kadr hazırlığı aparıldığı digər ali məktəblərdə də istifadə oluna bilər.

I bölmə
Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi.

1. Birdəyişənli funksiyanın ekstremumu üçün zəruri və kafi şərtlər.

Nöqtədə funksiyanın sol və sağ törəmələri olduqda funksiyanın bu nöqtədə ekstremum alması üçün zəruri şərt verilir. Nöqtədə funksiyanın törəməsi olduqda ekstremum üçün zəruri şərt olan Ferma teoremi isbat edilir. Funksiyanın törəməsinin sıfır olduğu nöqtələrdə, yəni stasionar nöqtələrdə və törəməsinin olmadığı nöqtələrdə ekstremum alıb-almadığı araşdırılır. (Stasionar nöqtələr və törəmənin olmadığı nöqtələr böhran nöqtələri adlanır.) Sonra ikinci tərtib törəmələrin köməyi ilə ekstremum üçün zəruri şərt verilir. Göstərilir ki, nöqtədə funksiyanın minimum (maksimum) qiymət alması üçün ikinci tərtib törəmə stasionar nöqtədə mənfi (müsbət) olmamalıdır. Sonra göstərilir ki, stasionar nöqtənin sol yaxın ətrafında törəmənin işarəsi mənfi (müsbət), sağ yaxın ətrafında törəmənin işarəsi müsbət (mənfi) isə, funksiya baxılan nöqtədə minimum (maksimum) qiymət alır. Göstərilir ki, əgər funksiyanın nöqtədə törəməsi sıfırdırsa və ikinci tərtib törəməsi müsbət (mənfi) isə, bu nöqtədə funksiya minimum (maksimum) qiymət alır.

1. Çoxdəyişənli funksiyanın şərtsiz ekstremumu məsələsi.

Ferma teoreminin analoqu isbat edilir, yəni göstərilir ki, əgər funksiyanın nöqtədə kəsilməz xüsusi törəmələri varsa, bu törəmələrin sıfra bərabərliyi ekstremum üçün zəruri şərtdir. Sonra göstərilir ki, funksiyanın nöqtədə ikinci tərtib törəmələrindən düzəldilmiş matrisin mənfi (müsbət) olmaması minimum üçün ikinci tərtib zəruri şərtdir. Əgər nöqtədə funksiyanın qradiyenti sıfra bərabərdirsə və ikinci tərtib törəmələrdən düzəlmiş matris müsbət-müəyyən (mənfi-müəyyən) isə, onda bu nöqtədə funksiya minimum (maksimum) qiymət alır.

3. Bərabərlik tipli məhdudiyyət şərtləri daxilində çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu məsələsi (Şərti ekstremum məsələsi).

Əvvəlcə ekstremum üçün birinci tərtib zəruri şərt, yəni Laqranj vuruqları qaydası və ya Laqranj prinsipi isbat edilir. Göstərilir ki, elə vuruqlar var ki, Laqranj funksiyası üçün stasionarlıq şərti ödənilir. Sonra şərti ekstremum məsələsində ikinci tərtib zəruri şərt verilir, yəni göstərilir ki, əgər nöqtə lokal minimum nöqtəsidirsə, elə Laqranj vuruqları var ki, Laqranj funksiyası üçün stasionarlıq şərti və ikinci tərtib törəmələrdən düzəldilmiş matrisin məhdudiyyət şərtlərinin köməyi ilə təyin olunan hipermüstəvilər üzərində mənfi olmaması şərti ödənilir.

Əgər nöqtədə stasionarlıq şərti ödənirsə və Laqranj funksiyasının ikinci tərtib törəmələrindən düzəldilmiş matris müəyyən hipermüstəvilər üzərində müsbət müəyyəndirsə, onda bu nöqtə şərti ekstremum məsələsinin lokal minimum nöqtəsidir.

4. Bərabərlik və bərabərsizlik tipli məhdudiyyət şərtləri daxilində çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu məsələsi.

Əvvəlcə ekstremum üçün birinci tərtib zəruri şərt - Laqranj prinsipi isbat edilir. Sonra ekstremum üçün birinci tərtib zəruri şərt verilir. Göstərilir ki, əgər nöqtə ekstremum məsələsinin həlli isə Laqranj funksiyası üçün stasionarlıq şərti, müvazinət şərti və ikinci tərtib törəmələrdən düzəlmiş matris müəyyən hipermüstəvilər üzərində mənfi deyil. Sonra ekstremum üçün kafi şərt verilir, yəni göstərilir ki, əgər nöqtədə stasionarlıq şərti, müvazinət şərti və Laqranj funksiyasının ikinci tərtib törəmələrindən düzəlmiş matris müəyyən hipermüstəvilər üzərində müsbət-müəyyəndirsə, bu nöqtə baxılan məsələnin lokal minimum nöqtəsidir.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3. Габасов Р.,Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд-во БГУ,1981, 350 с.

4. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. Москва, 2002, 302 с.

5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.Наука, 1974, 479 с.

II bölmə
Qabarıq proqramlaşdırma məsələsi.

1. Qabarıq çoxluqların və qabarıq funksiyaların xassələri.

Qabarıq çoxluğun tərifi verilir. Sonlu ölçülü ayrılma teoremi isbat edilir, yəni göstərilir ki, əgər qabarıq çoxluq fəzanın koordinat başlanğıcını özündə saxlamasa, koordinat başlanğıcından keçən elə hipermüstəvi var ki, o çoxluq bu hipermüstəvidən bir tərəfdə qalır.

Qabarıq funksiyanın tərifi İensen bərabərsizliyinin və qrafiküstü çoxluğun köməyi ilə verilir. Bunların ekvivalentliyi göstərilir. Funksiyanın qabarıq olması üçün zəruri və kafi şərtlər verilir.

2.Qabarıq proqramlaşdırmanın əsas məsələsi.

Burada xətti fəzada qabarıq çoxluq və qabarıq funksiyalar verilir. Müəyyən qabarıq funksiyanın, qabarıq funksiyalarla verilmiş məhdudiyyətlər şərti daxilində qabarıq çoxluqda minimumunun tapılması məsələsinə baxılır. Bu məsələnin Laqranj funksiyası qurulur. Kun-Takker teoremi isbat edilir. Göstərilir ki, əgər nöqtə baxılan məsələnin həlli isə, Laqranj funksiyası üçün minimum şərti, vuruqların mənfi olmaması şərti və müvazinət şərti ödənir. Bu üç şərtin ödənməsinin məsələnin həlli olması üçün müəyyən halda kafiliyi isbat edilir. Sleyter şərti verilir.

2. İkili məsələ.

Sleyter şərti ödəndikdə qabarıq proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə baxılır. İkili məsələ qoyulur. Əsas məsələ ilə ikili məsələ arasında əlaqə öyrənilir. Göstərilir ki, $\varphi(x)=\sup\limits_{\lambda} L(x,\lambda)\geq\varphi(x)=\min\limits_{x} L(x,\lambda)$. Bu bərabərsizliyin köməyi ilə bir sıra xassələr isbat edilir.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд.БГУ, 1981, 350 с.

4. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. Москва, 2002, 302 с.

III bölmə
Xətti proqramlaşdırma məsələsi

1.Xətti proqramlaşdırmaya aid praktik məsələlər.

Burada nəqliyyat məsələsinin və istehsalın planlaşdırılması məsələsinin riyazi modeli qurulur. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin kiçik ölçülü halda həndəsi izahı verilir.

2. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin kanonik şəkli.

Üətti proqramlaşdırma məsələsinin kanonik şəkli gətirilir. Göstərilir ki, iri formada verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələlərini kanonik şəkilli xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək olar. Üətti proqramlaşdırmanın kanonik şəkilli məsələsinin müxtəlif yazılışları verilir. Üətti proqramlaşdırma məsələsinin planlar çoxluğunun qabarıqlığı göstərilir. Üətti funksiyanın planlar çoxluğunda minimum qiymət aldığı nöqtələr

arasında dayaq plan adlanan təpə nöqtələri də var. Planlar çoxluğunun təpə nöqtələrini onun başqa nöqtələrdən fərqləndirən əlamətlər verilir. Cırlaşmayan dayaq planı üçün optimallıq şərti isbat edilir.

3. Simpleks üsul. Dayaq planın qurulması və ilkin dayaq planın tapılması.

Dayaq planın qurulmasının konstraktiv üsulu verilir. İsbat üsulunun həm də dayaq planının qurulması qaydası olduğu göstərilir. Bu üsul məşhur Simpleks üsuldur. İlkin dayaq planının tapılması məsələsi xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələlərindən biridir. İlkin dayaq planın tapılması üçün üç qaydaya baxılır. Misallar üzərində bunlar əyani göstərilir.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. Гасс С. Линейное программирование. М.Физматиз, 1961.

2.K.Q.Həsənov. Optimallaşdırma üsulları, Bakı, Bakı Dövlət Universiteti nəşr., 1987.

IV bölmə
Variasiya hesabı

1. Variasiya hesabının əsas məsələsinin qoyuluşu.

Variasiya hesabının əsas və ya sadə məsələsi adlanan məsələnin qoyuluşu verilir.Güclü və zəif ekstremum anlayışları daxil edilir, göstərilir ki, zəif ekstremum üçün zəruri şərt həm də güclü ekstremum üçün zəruri şərtdir.

2. Funksionalın birinci variasiyası.

Ümumi şəkildə verilmiş funksionalın birinci variasiyasının tərifi verilir və isbat edilir ki, birinci variasiyanın verilmiş element üçün sıfra çevrilməsi bu elementin ekstremum verməsi üçün zəruri şərtdir. Variasiya hesabındakı funksionalın birinci variasiyası tapılır.

3.Variasiya hesabının əsas lemmaları. Eyler-Laqranj tənliyi.

Laqranj lemması, Dyu-Bua-Raymond lemması isbat edilir və onların köməyi ilə variasiya hesabının əsas məsələsində Eyler-Laqranj tənliyi çıxarılır, onun iki tərtibli adi diferensial tənlik olduğu göstərilir və bəzi xüsusi hallar üçün bu tənliyin birinci inteqralı tapılır.

4.Braxistoxron məsələsi.

Variasiya hesabının yaranmasında mühüm rolu olan braxistoxron məsələsi həll edilir.

5. Ucları hərəkət edən məsələ. Transversallıq şərtləri.

Variasiya hesabının əsas məsələsində qəbul olunur ki, funksionalın təyin olunduğu funksiyalar çoxluğunun bütün funksiyaları eyni bir parçada təyin olunub. Burada isə qəbul olunur ki, funksiyalar, ümumiyyətlə, müxtəlif parçalarda təyin olunublar və funksionalın birinci variasiyası üçün düstur çıxarılır. Sonra isə funksiyaların uc nöqtələri verilmiş əyrilər üzərində olan hal üçün transversallıq şərtləri çıxarılır.

6. Bir neçə funksiyadan asılı olan funksional. Funksiyanın yüksək tərtib törəmələrindən asılı olan funksional.

Funksional bir neçə funksiyadan asılı olan halda ekstremum üçün zəruri şərtlər çıxarılır. Göstərilir ki, verilmiş funksiyaların funksionala ekstremum verməsi üçün Eyler-Laqranj tənlikləri sisteminin həlli olması zəruridir. Sonra göstərilir ki, funksional axtarılan funksiyanın yüksək tərtib törəməsindən asılı olan halda bu funksiyanın, tərtibi funksionaldakı tərtibdən iki ləfə böyük olan tənliyin həlli olması zəruridir.

7. Şərti ekstremum məsələsi (Laqranj məsələsi).

Praktik baxımdan əhəmiyyətinə görə variasiya hesabının sadə məsələsinin ümumiləşməsi olan bu məsələdə ekstremum üçün zəruri şərtlər çıxarılır. Bunun üçün Laqranj vuruqlarının köməyi ilə məsələ yeni funksionalın şərtsiz ekstremumunun tapılmasına gətirilir və onun üçün Eyler-Laqranj tənlikləri sistemi qurulur.

8. İzoperimetrik məsələ.

Bu məsələ də variasiya hesabının əsas məsələsinin ümumiləşməsidir. Burada funksionalın ekstremumu əlavə funksional məhdudiyyət şərtləri daxilində axtarılır və yenə də Laqranj vuruqlarının köməyi ilə yeni funksionalın şərtsiz

ekstremumunun tapılması məsələsinə gətirilir, Eyler-Laqranj tənlikləri sistemi qurulur. Göstərilir ki, bu məsələdə Laqranj vuruqları sabit ədədlər olur.

9. Variasiya hesabının əsas məsələsində zəif və güclü ekstremum üçün kafi şərtlər.

Meydan anlayışı, mərkəzi meydan və ekstremallar meydanı anlayışları daxil edilir. Sonra ekstremallar ailəsinin nə zaman meydan əmələ gətirməsi araşdırılır, bununla əlaqədar qoşma nöqtə anlayışı daxil edilir, Yakobi şərti çıxarılır, Veyerştras funksiyası qurulur və onun köməyi ilə ekstremum üçün kafi şərtlər alınır. Buradan da, xüsusi halda, Lejandr şərti çıxarılır.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1.Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2.Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3.И.М.Гельфанд, С.В.Фомин. Вариационное исчисление. М.Физмагиз., 1961.

4.Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.Наука, 1974, 479 с.

5.Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.IV, 2.

6. Эльгольц Л.Э. Вариационное исчисление. М.Гостехизд., 1958, 163 с.

V bölmə
Optimal idarə məsələləri

1. Optimal idarəetmənin əsas məsələsi (ən tez təsir məsələsi).

Müəyyən xarici qüvvənin təsiri altında maddi nöqtənin verilmiş bir nöqtədən verilmiş digər nöqtəyə ən tez vaxta gətirilməsi məsələsi üzərində optimal ən tez təsir məsələsi izah olunur. Sonra ümumi şəkildə ən tez təsir məsələsi qoyulub və burada mümkün idarə anlayışı verilir.

2. Sağ ucu sərbəst terminal optimal idarəetmə məsələsi.

Adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan və prosesin getmə vaxtı qeyd olunan trayektoriyaların sağ ucu sərbəst olan hal üçün terminal idarə məsələsinin qoyuluşu verilir. İdarəedicilərin, trayektoriyaların artımları anlayışı verilir və onların köməyi ilə funksionalın artımı üçün düstur çıxarılır. Hamilton funksiyası daxil edilir, qoşma sistem qurulur. İdarəedicilərin artımı iynəvari variasiyanın köməyi ilə verilir, trayektoriyaların artımı və funksionalın artımının qalıq həddi qiymətləndirilir. Bunların köməyi ilə optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi şəklində zəruri şərt isbat olunur. Maksimum prinsipindən variasiya hesabının əsas məsələsindəki Eyler-Laqranj tənliyi alınır.

3. Avtonom xətti sistemlərin idarəolunması.

Burada avtonom xətti sistemlərin idarəolunması üçün meyar olan – Kalman teoremi isbat edilir.

4. Optimallıq prinsipi. Dinamik proqramlaşdırma üsulu.

Adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimallıq prinsipini tətbiq etməklə Belman tənliyi alınır.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3. Беллман Р. Динамическое программирование, Москва, ИЛ, 1961.

4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М., Наука, 1969, 408 с.

5. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972, 415 с.

6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.:Наука, 1981, 400 с.

7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд-во БГУ, 1981, 350 с.

8. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория Примеры. Задачи. Москва, 2002, 302 с.

9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.Наука, 1974, 479 с.