МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа

П Р О Г Р А М М А

дисциплины

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

направление **ТЕ 01.00.00 - математика**
специальность **ТЕ 01.01.00 - математика**

Утверждено приказом
Министра Образования
Азербайджанской Республики
№ 1164 от 21.10.2008 г.

Б А К У – 2 0 0 8

Программу составили: Сотрудники кафедры математического анализа:

д.-ф.м.н., проф.**С.К.Абдуллаев,**
к.-ф.м.н., доц.**Ф.А.Абдуллаев,**
к.-ф.м.н., доц. **Н.А.Ильясов,**
к.-ф.м.н., доц. **Р.Дж.Гулиев.**

Научный редактор: Зав кафедрой математического анализа Бакинского Государственного Университета, д.-ф.м.н., проф.**С.К.Абдуллаев.**

Рецензенты: д.-ф.м.н., проф.**А.М.Ахмедов**,
д.-ф.м.н., проф.**В.С.Гулиев.**

П Р О Г Р А М М А
дисциплины математический анализ

(лекция-180 ч., семинар-180 ч.)

Цель дисциплины «Математический анализ» – ознакомление с фундаментальными методами исследования переменных величин посредством анализа бесконечно малых, основу которого составляет теория дифференциального и интегрального исчисления.

Объектами изучения в данной дисциплине являются, прежде всего функции. С их помощью могут быть сформулированы как законы природы, так и разнообразные процессы, происходящие в технике. Отсюда объективная важность математического анализа как средства изучения функций.

I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предмет математического анализа.

Множества и отображения. Понятие множества. Операции над множествами. Объединение и пересечение множеств. Объединение и пересечение семейства множеств. Декартово произведение двух множеств. График отношения. Отображения множеств. Сурьективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений и взаимно обратное отображение. Сужение и продолжение отображения. Аксиома выбора Цермело*⁾. Об аксиоматике теории множеств*⁾.

II. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество действительных чисел. Аксиоматика и общие свойства множества действительных чисел R. Определение множества действительных чисел R, алгебраические свойства действительных чисел, операции над действительными числами, упорядочение множества действительных чисел R, принцип Архимеда. Числовые промежутки. Аксиома о полноте множества R. Множества действительных чисел: натуральные числа и множество натуральных чисел (принцип математической индукции), множество рациональных чисел, множество иррациональных чисел.

Счетные множества. Несчетность множества действительных чисел. Множества одинаковой мощности, понятие кардинального числа. Наибольший и наименьший элементы числового множества. Существование наименьшего и наибольшего элементов конечного числового множества.

Абсолютное значение действительного числа и его свойства. Изображение действительного числа на прямой. Окрестность точки. Топология множества действительных чисел.

Ограниченные числовые множества. Границы числовых множеств. Существование наименьшего (наибольшего) элемента множества верхних (нижних) граней ограниченного сверху (снизу) непустого числового множества. Точные грани числовых множеств. Характеристические свойства точной нижней и точной верхней граней. Неограниченные множества. Расширенное множество действительных чисел. Единственность поля действительных чисел*).

III. ПРЕДЕЛ

Числовые последовательности. Сходящаяся числовая последователь-ность и его предел. Расходящиеся числовые последовательности. Ограниченные (снизу, сверху, снизу и сверху) числовые последовательности. Простейшие свойства числовых последовательностей, имеющих предел: единственность предела и ограниченность последовательности снизу и сверху. Теоремы о справедливости строгих неравенств, имеющих место для предела сходящейся последовательности, для элементов этой последовательности, начиная с некоторого номера.

Бесконечно малые числовые последовательности. Теоремы о том, что сумма конечного числа бесконечно малых и произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность являются бесконечно малыми. Представление в виде суммы (асимптотическое разложение) элементов сходящейся последовательности посредством значения его предела и соответствующих элементов бесконечно малой. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости числовой последовательности (первый принцип сходимости). Арифметические операции над сходящимися последовательностями: теоремы о существовании и вычислении предела суммы, произведения и отношения (при условии, что предел знаменателя отличен от нуля) двух сходящихся

последовательностей. Монотонно возрастающие (убывающие) числовые последовательности и критерии их сходимости: для сходимости монотонно возрастающей (убывающей) последовательности необходимо и достаточно ее ограниченность сверху (снизу), причем значение ее предела равно точной верхней (точной нижней) грани множества значений элементов последовательности. Число e (экспонента).

Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании частичного предела ограниченной последовательности. Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности и их характеристические свойства.

Числовые последовательности, «сходящиеся» (расходящиеся) к $(+\infty)$ и $(-\infty)$. Сходимость числовой последовательности на расширенном множестве действительных чисел: для сходимости числовой последовательности на расширенном множестве действительных чисел необходимо и достаточно равенство верхнего и нижнего пределов (второй принцип сходимости).

Арифметические действия над сходящимися последовательностями на расширенном множестве действительных чисел. Неопределенности.

Бесконечно большие числовые последовательности. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой: последовательность, образованная из обратных величин значений отличных от нуля элементов бесконечно малой последовательности, является бесконечно большой, и наоборот.

Предел функции. Предельная точка множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Предел функции в точке. Определение предела по Коши на языке «$\varepsilon - \delta$» и определение предела по Гейне в терминах последовательностей, их эквивалентность. Общие свойства функций, имеющих предел: единственность предела, локальная ограниченность функции. Критерий Коши (теорема Больцано-Коши) существования конечного предела функции. Предел сложной функции. Теоремы о сохранении, строгих неравенств, имеющих место для предела функции в заданной точке, для значений этой функции в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции и некоторые их свойства: сумма конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой, произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой.

Асимптотическое разложение функции, имеющей предел, посредством бесконечно малой. Арифметические действия над функциями, имеющими предел. Замечательные пределы. Правый и левый пределы числовой функции в точке и критерий существования предела в точке в их терминах.

Монотонные функции. Теорема о существовании и значениях односторонних пределов в точке монотонных функций.

Бесконечные пределы, пределы в бесконечности. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми. Арифметические действия над функциями, имеющими предел на расширенном множестве действительных чисел, неопределенности. Нижний и верхний пределы функции в точке (на расширенном множестве действительных чисел) и критерий существования предела (конечного либо бесконечного) функции в точке в их терминах.

Локальное сравнение функций. Отношение «O», «o», «≍», «~» и их свойства.

Понятие предела по базе*).

IV. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение непрерывности функции в точке по Коши на языке «$\varepsilon - \delta$ ». Критерий непрерывности функции в предельной точке множества. Односторонняя (справа и слева) непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции и их

классификация. Непрерывность сложной числовой функции. Свойство сохранения знака функции в малой окрестности точки ее непрерывности. Арифметические действия над непрерывными функциями.

Функция, непрерывная на множестве. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях и теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции и достижении наибольшего и наименьшего значений. Свойство Дарбу непрерывных функций: образом отрезка при непрерывном отображении является отрезок. Равномерно непрерывная на множестве функция. Модуль непрерывности*). Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции. Точки разрыва монотонной функции: точки разрыва монотонной функции являются точками разрыва первого рода и множество точек разрыва не более чем счетно (либо конечно, либо счетно).

Критерий непрерывности монотонной на отрезке функции: образом отрезка является отрезок.

Существование и непрерывность обратной функции. Критерий существования обратной для непрерывной на отрезке функции: для существования обратной непрерывной на отрезке функции необходимо и достаточно ее строгая монотонность.

Элементарные функции: показательная функция, логарифмическая функция, степенная функция и т.д.

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Дифференцируемые функции. Производная функции в точке. Понятие касательной к функции в точке. Дифференцируемость функции в точке и критерии дифференцируемости: существование конечной производной, существование линейной касательной. Геометрический и механический смысл производной. Касательная прямая и нормаль.

Непрерывность дифференцируемой функции. Производная алгебраической суммы, произведения и отношения дифференцируемых функций. Таблица производных элементарных функций. Правила вычисления производной. Формула для производной сложной функции. Производная обратной функции.

Дифференциал функции. Определение дифференциала функции, его геометрический и физический смысл. Дифференциал алгебраической суммы, произведения и отношения функций. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков: определения. Формула Лейбница. Производные высших порядков параметрически заданных функций. Механический смысл производной второго порядка.

Основные теоремы дифференциального исчисления и их применения. Локальные экстремумы функции. Теорема Ферма о равенстве нулю производной дифференцируемой функции в точке локального экстремума. Теорема Ролля о нулях производной функции, принимающей равные значения на концах отрезка. Теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Некоторые свойства производной: теорема Дарбу о промежуточных значениях производной; что точки разрыва производной являются точками разрыва первого рода. Исследование функций методами дифференциального исчисления: критерии постоянства, возрастания и убывания функции, в промежутке критерии монотонности функции. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида «$0/0$» и «∞/∞». Формула Тейлора функции. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и в форме Лагранжа. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям.

Экстремум функции одной переменной. Определения. Необходимое условие экстремума. Критические точки. Достаточные условия экстремума: достаточные условия в терминах производных высших порядков; достаточные условия в терминах знаков производных в правой и левой окрестности критической точки, достаточные условия, определяемые знаком правой и левой производных в критической точке. Вычисление

наибольшего и наименьшего значений. Исследование графика функции с помощью дифференциального исчисления: определение точек выпуклости, точек вогнутости и точек перегиба графика, асимптоты графика и т.д.

VI. ИНТЕГРАЛ

Неопределенный интеграл. Задача восстановления функции по ее производной. Первообразная функция и неопределенный интеграл, таблица формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Методы интегрирования: замена переменной и интегрирование по частям. Техника вычисления неопределенного интеграла: интегрирование рациональных дробей, биномиальных дифференциалов и прочих выражений.

Определенный интеграл (интеграл Римана). Интеграл Римана ограниченной функции на отрезке. Нижняя и верхняя суммы Дарбу и их геометрическое изображение. Свойства монотонности верхней и нижней сумм Дарбу относительно разбиения. Свойство отделимости множеств нижних и верхних сумм Дарбу. Нижний и верхний интегралы Дарбу. Понятие интеграла Римана от ограниченной функции. Критерий Дарбу интегрируемости функции. Классы интегрируемых функций: непрерывные функции, монотонные функции, ограниченные функции с конечным числом точек разрыва. Простейшие свойства интеграла Римана: линейность относительно подинтегральной функции, аддитивность относительно отрезка интегрирования. Интегрируемость композиции интегрируемой функции и непрерывной функции*). Абсолютная интегрируемость интегрируемой функции. Интегрируемость произведения двух интегрируемых функций. Интеграл Римана как предел интегральных сумм (Римана) *).

Первая теорема о среднем. Площадь криволинейной трапеции.

Интеграл и производная. Непрерывность и дифференцируемость интеграла Римана с переменным верхним пределом.

Существование первообразной непрерывной функции. Связь определенного интеграла с неопределенным интегралом: Формула Ньютона-Лейбница. Расширение понятия первообразной функции *). Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции*). Существование кусочно-гладкой первообразной кусочно-непрерывной функции*). Обобщенная формула Ньютона-Лейбница*).

Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Римана. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.

Вторая теорема о среднем. Формулы Бонне.

Несобственные интегралы. Несобственный интеграл от неограниченной функции по конечному отрезку. Несобственный интеграл от ограниченной функции по неограниченному множеству. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Критерии Коши для сходимости несобственных интегралов. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов. Признаки сходимости: абсолютная и неабсолютная сходимость. Признак Абеля-Дирихле несобственной интегрируемости произведения двух функций.

VII. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пространство R^m. Алгебраические свойства, скалярное произведение, метрика. Метрические пространства. Предельная точка множества в метрическом пространстве, открытые и замкнутые множества. Сходящиеся последовательности и их свойства. Критерий Коши существования предела последовательности в метрическом пространстве. Критерий покоординатной сходимости сходящейся последовательности в евклидовом пространстве R^m. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки ограниченного бесконечного множества в пространстве R^m. m-мерные открытые и

замкнутые клетки. Теорема Кантора о пересечении последовательности вложенных клеток.

Предел и непрерывность отображения в метрических пространствах. Топологическая теорема о непрерывности отображения: для непрерывности отображения необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого открытого множества был открытым множеством*).

Предел функции многих переменных: различные определения и их эквивалентность. Повторные пределы и их связь с кратными пределами. Непрерывность функции многих переменных: по совокупности переменных, по фиксированной переменной. Предел и непрерывность сложного отображения многих переменных. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий компактности множества в евклидовом пространстве: для компактности множества необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

Компактность и непрерывность: теорема Вейерштрасса о компактности образа компактного множества при непрерывном отображении. Связное множество в метрическом пространстве. Критерий связности множества в евклидовом пространстве *). Связность и непрерывность: теорема Коши о связности образа связного множества при непрерывном отображении. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на компактном множестве функции.

VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные функции многих переменных. Дифференцируемость функции в точке. Теорема о необходимости условия существования частных производных и достаточности условия непрерывности частных производных для дифференцируемости функции в точке. Касательная плоскость. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Формула для частных производных сложной функции. Дифференцируемость сложной функции. Производная по направлению. Градиент.

Частные производные высших порядков функции многих переменных. Теорема Шварца о равенстве непрерывных смешанных производных. Формулы Тейлора для функций многих переменных с остаточными членами в форме Лагранжа и в форме Пеано.

Отображения R^n в R^m и их дифференцируемость*⁾. Векторные пространства в R^m. Линейные отображения из R^n в R^m**.** Дифференциал в точке (полная производная) отображения из R^n в R^m. Линейность операции дифференцируемости. Теорема о дифференцируемости сложного отображения. Представление (изображение) в координатах дифференциала отображения. Матрица Якоби. Непрерывно дифференцируемые отображения. Существование и дифференцируемость локальной обратной непрерывно дифференцируемого отображения: теорема о существовании обратного отображения и его производной непрерывно дифференцируемого отображения в окрестности точки возврата производной. Неявные функции. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Теорема о ранге*⁾.

Экстремум функции многих переменных. Необходимое условие для экстремума, достаточные условия. Отыскание (вычисление) наименьшего и наибольшего значений функции в ограниченной области. Условные (относительные) экстремумы. Метод Лагранжа для нахождения условных экстремумов.

IX. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кратный интеграл. Кратный интеграл по k-мерной клетке. Суммы Дарбу и их свойства. Нижние и верхние интегралы Дарбу. Необходимое и достаточное условие в

терминах нижней и верхней сумм Дарбу для существования кратного интеграла (критерий Дарбу). Интегрируемость непрерывных функций. Аддитивность кратного интеграла относительно подинтегральной функции и клетки интегрирования. Необходимое и достаточное условие для существования кратного интеграла в терминах точек разрыва подинтегральной функции (критерий Лебега). Кратный интеграл по множествам, измеримым в смысле Жордана. Теорема Фубини: приведение кратного интеграла к повторному.

Кратные несобственные интегралы. Понятие кратного несобственного интеграла. Абсолютная сходимость несобственных кратных интегралов. Разбиение единицы*⁾. Кратный интеграл по открытому множеству*⁾. Достаточные условия для сходимости кратных несобственных интегралов.

X. СОБСТВЕННЫЕ (ОБЫЧНЫЕ) И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Собственные интегралы зависящие от параметра. Сходимость и равномерная сходимость по параметру семейства функций, зависящих от параметра. Критерий Коши. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости интеграла, зависящего от параметра.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши. Достаточные условия для равномерной сходимости: признак Вейерштрасса, признак Абеля-Дирихле. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегралы Эйлера.

XI. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейные интегралы. Векторно-значные функции одной переменной с ограниченной вариацией. Теорема: для того чтобы векторно-значная функция была функцией ограниченной вариации необходимо и достаточно, чтобы его компоненты были ограниченной вариации. Классы функций ограниченной вариации: класс монотонных на отрезке функций и класс действительных функций, имеющих ограниченную производную. Кривая в R^k. Простая кривая Жордана. Направление на кривой. Спрямляемые кривые. Длина кривой. Формула длины гладкой кривой. Аддитивность длины кривой. Криволинейный интеграл первого рода: определение, простейшие свойства и вычисление (приведение к интегралу Римана). Криволинейные интегралы второго рода: определение, формулы приведения к интегралу Римана. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от направления на кривой. Положительное направление на замкнутой плоской кривой. Формула Грина. Условие независимости общего криволинейного интеграла второго рода от формы пути на плоской кривой: подинтегральное выражение является полным дифференциалом*⁾. Условие представимости дифференциального выражения в форме полного дифференциала. Применения формулы Грина: формула для вычисления площади плоской области с помощью криволинейного интеграла. Замена переменной в двукратном интеграле. Формула замены переменной в кратном интеграле*⁾.

Поверхностные интегралы. Понятие поверхности. Двустороннее поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы I и II рода. Формула Гаусса-Остроградского и формула Стокса. Элементы теории поля. Скалярное поле, векторное поле*⁾. Поток, дивергенция, циркуляция, ротор. Векторная интерпретация формулы Гаусса-Остроградского и формулы Стокса. Оператор Гамильтона,

соленоидальные векторные поля. Потенциальные векторные поля.

XII. ТЕОРИЯ РЯДОВ

Числовые ряды. Сходимость числового ряда. Сумма ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда. Расходящиеся ряды. Абсолютно сходящиеся ряды. Простейшие теоремы сравнения. Теорема Коши для рядов с монотонными положительными членами и его применения*⁾. Признаки Даламбера, Коши и Раабе сходимости числовых рядов. Признаки Лейбница и Абеля-Дирихле сходимости знакопеременных числовых рядов. Понятие о степенных рядах. Радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда. Сумма рядов и их произведение в смысле Коши. Теорема Мертенса о сходимости произведения рядов. Перестановка членов ряда. Безусловно сходящиеся ряды. Безусловная сходимость абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о неабсолютно сходящихся рядах. Методы суммируемости расходящихся рядов: метод Абеля-Пуассона и метод Чезаро*⁾. Двукратные ряды. Понятие о бесконечных произведениях*⁾.

Функциональные последовательности и ряды. Сходимость в точке и поточечная сходимость на множестве функциональной последовательности и функционального ряда. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда на множестве. Критерий Коши равномерной сходимости. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности в терминах остатка. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов: теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда со сходящимся мажоратным рядом, признак Абеля-Дирихле.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. Равномерная сходимость и непрерывность. Теорема о непрерывности предельной функции (суммы) равномерно сходящейся последовательности (равномерно сходящегося ряда) с непрерывными членами.

Равномерная сходимость и интегрируемость: теорема о предельном переходе под знаком интеграла для последовательностей и теорема о почленном интегрировании для рядов.

Равномерная сходимость и дифференцируемость: теорема о справедливости перестановки операции дифференцируемости и операции предельного перехода для последовательностей, теорема о справедливости формулы почленного дифференцирования для рядов.

Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции многочленами.

Степенные ряды. Теорема о почленном интегрировании и почленном дифференцировании степенных рядов. Теорема Абеля о непрерывности суммы степенного ряда и одно его следствие: если сходятся каждый из двух рядов и их, произведение то сумма произведения равна произведению сумм этих рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Ряды Фурье. Понятие об ортонормальных системах и общих рядах Фурье. Замкнутые и полные ортонормальные системы. Тригонометрическая система и замкнутость. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Коэффициенты Фурье. Теорема Римана. Ядро Дирихле. Принцип локализации Римана (зависимость сходимости в точке ряда Фурье функции от его значений, принимаемых в ближайшей окрестности этой точки). Сходимость ряда Фурье в точке. Признаки Дини и Гельдера. Методы суммирования рядов Фурье. Интегралы Фурье и преобразование Фурье*) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1, 2, 3. Москва, 1969, 1970, 1970.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1, 2. Москва, 1981, 1981.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1, 2. Москва , 1981, 1984.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Курс математического анализа. Т.1,2. Москва, 1982, 1984.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, 1977.
6. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Москва, 1984, 1986.