

Yaqubov M.H.

BDU, professor

Babayeva S.İ.

Bakı Modern Təhsil Kompleksi

ÇOXLUQLAR, BİRLƏŞMƏLƏR, KOMBİNATORİKANIN VƏ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİNİN TƏDRİSİNƏ DAİR

Artıq respublika məktəblərinin bütün siniflərində fənlərin hamısı, o cümlədən “Riyaziyyat” fənni də, yeni təhsil standartları (kurikulum) əsasında və mövzuların çətinlik səviyyəsinə uyğun olaraq tədris olunur. Lakin hazırda işləyən dərsliklərdə bu mövzular anlaşıqlı formada verilmədiyindən, əsasən iş təcrübəsi az olan və xüsusən gənc müəllimlərdə müəyyən çətinliklər yaranır. Məsələn, işə təzə başlayan müəllim VIII sinifdə dərs deməlidirsə, ehtimal nəzəriyyəsinin bu sinifə aid mövzularının tədrisi ona çətinlik yaradır. Belə çətinlikləri azaltmaq üçün adları məqalənin mövzusunda göstərilənləri bütün siniflər üçün bir yerdə verməyi məqsəduyğun sayırıq.

1. Çoxluq anlayışı, çoxluqların birləşməsi, kəsişməsi, fərqi, çoxluqlar cəbri.

Çoxluq anlayışına tərif verilmir, yalnız izah edilir. Çoxluq müəyyən xüsusiyyətlərinə görə seçilmiş ədədlər, fiqurlar, əşyalar və s. toplusunu göstərir, “toplu” sözü əvəzinə “çoxluq” sözü işlədilir. Çoxluğa misal olaraq, natural ədədlər çoxluğunu, üçbucaqlar çoxluğunu, dördbucaqlar çoxluğunu və s. göstərmək olar. Çoxluğu təşkil edənlərə onun elementləri deyilir. Məsələn, hər bir natural ədəd, N natural ədədlər çoxluğunun elementidir. Hər bir üçbucaq üçbucaqlar çoxluğunun elementidir.

Çoxluğu latın əlifbasının baş hərfləri ilə, elementi isə bu əlifbanın kiçik hərfləri ilə işarə etmək qəbul edilib. Hər hansı m elementinin A çoxluğuna daxil olması $m \in A$ kimi, daxil olmaması isə $m \notin A$ (və ya $m \bar{\in} A$) kimi işarə edilir.

Sonlu sayda elementləri olan çoxluğa *sonlu çoxluq*, elementlərinin sayı sonsuz olan çoxluğa *sonsuz çoxluq* deyilir. Heç bir elementi olmayan çoxluq *boş çoxluq* adlanır və $\emptyset$ kimi işarə olunur.

Sonlu çoxluğa misal olaraq ikirəqəmli natural ədədlər çoxluğunu, beşbucaqların diaqonalları çoxluğunu, sonsuz çoxluğa misal olaraq tam ədədlər çoxluğunu, düz xətt parçası üzərindəki nöqtələr çoxluğunu və s. göstərmək olar.

Sonlu və ya sonsuz çoxluğun elementləri hər hansı xüsusiyyətlərinə görə nömrələnilsə, deyilir ki, bu çoxluq *nizamlanıb*. Məsələn, 100-ü aşmayan və artan, yaxud azalan istiqamətdə düzülmüş $\{1, 2, \dots, 100\}$, $\{100, 99, 98, \dots, 2, 1\}$ natural

ədədlər çoxluqları nizamlanmış çoxluqlardır. Sonlu A çoxluğunun elementlərinin sayı $n(A)$ kimi işarə edilir.

Verilmiş B çoxluğunun hər bir elementi həm də A çoxluğunun elementi olarsa, B çoxluğuna A çoxluğunun *alt çoxluğu* deyilir və $B \subset A$ kimi yazılır. Məsələn, tək natural ədədlər çoxluğu natural ədədlər çoxluğunun alt çoxluğudur.

Tamamilə eyni elementlərdən təşkil olunmuş çoxluqlara *bərabər* çoxluqlar deyilir. Məsələn, cüt ədədlər çoxluğu ilə 2-yə bölünən ədədlər çoxluğu bərabərdir. İki sonlu çoxluğun bərabərliyi onların elementlərinin düzülüşündən asılı deyil. Məsələn, $A=\{a,b,c,d\}$ və $B=\{c,d,b,a\}$ isə, belə A və B çoxluqları bərabərdir $A=B$.

İki A və B çoxluqlarının hər ikisinə daxil olan elementlərdən düzəlmiş çoxluğa A və B çoxluqlarının *kəsişməsi* deyilir və $A \cap B$ kimi yazılır. Deməli A və B çoxluqlarının kəsişməsi bu çoxluqların ortaq elementlərindən təşkil olunmuş çoxluqdur.

Misal 1. A -düzbucaqlılar çoxluğu, B -romblar çoxluğu olsun. Onda $A \cap B$ - kvadratlar çoxluğudur, çünki, hər bir kvadrat həm düzbucaqlı, həm də rombdu.

İki X və Y çoxluqlarından heç olmasa birinə daxil olan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa bu çoxluqların *birləşməsi* deyilir və $X \cup Y$ kimi yazılır. Qeyd edək ki, X və Y çoxluqlarının hər ikisinə daxil olan elementlər varsa, $X \cup Y$ çoxluğunda belə elementlər bir dəfə yazılır.

Misal 2. X və Y ilə tək və cüt natural ədədlər çoxluqlarını işarə edək.

$X=\{1,3,5,\dots, 2k-1,\dots\}$ və $Y=\{2,4,6,\dots,2k,\dots\}$, $k=1,2,3,\dots$ olsun. Onda $X \cup Y$ çoxluğu natural ədədlər çoxluğu olur, yəni $N=X \cup Y = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$, $n=1,2,3,\dots$

Misal 3. A və B ilə istifadə etdiyimiz dəftərxana ləvazimatları çoxluqlarını $A=\{\text{qələm, karandaş, xətkəş, pərgar}\}$, $B=\{\text{transportir, xətkəş, pozan, marker, qələm}\}$ ilə işarə edək. Onda

$A \cup B = \{\text{qələm, karandaş, xətkəş, pərgar, transportir, pozan}\}$ olur.

Verilmiş A və B çoxluqları üçün A -nın B -yə daxil olmayan elementlərindən təşkil olunmuş çoxluğa A ilə B -nin *fərqi* deyilir və $A \setminus B$ kimi işarə olunur.

Əgər $B \subset A$ olarsa, $A \setminus B$ fərqi B çoxluğunun A -ya *tamamlayıcısı* adlanır və B_A' ilə işarə edilir.

Qeyd edək ki, Eyler –Venn diaqramlarının köməyi ilə yuxarıda verilən anlayışları əyani şəkildə göstərmək əlverişli olur və şagirdlər mövzunu daha tez mənimsəyir.

Verilən anlayışların köməyi ilə çoxluqlar cəbrini, yəni çoxluqlar üzərində əməlləri vermək olar. Bu əməllərin bəziləri ədədlər üzərində aparılan əməllərin analoqu olur, amma elələri də var ki, onların ədədlər üzərindəki əməllərdə analoqu yoxdur. Əvvəlcə analoqu olanların bəzilərini göstərək:

Ədədlərdə	Çoxluqlarda
1. İstənilən iki x, y ədədləri üçün $x + y = y + x$; $xy = yx$ eynilikləri doğrudur 2. İstənilən x, y, z ədədləri üçün $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(xy)z = x(yz)$ eynilikləri doğrudur 3. İstənilən x, y, z ədədləri üçün $(x + y)z = xz + yz$ eyniliyi doğrudur 4. İstənilən x, y, z ədədləri üçün $x(y - z) = xy - xz$	1. İstənilən iki X, Y çoxluqları üçün $X \cup Y = Y \cup X$; $X \cap Y = Y \cap X$ bərabərlikləri doğrudur 2. İstənilən X, Y, Z çoxluqları üçün $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$; $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ bərabərlikləri doğrudur 3. İstənilən X, Y, Z çoxluqları üçün $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ bərabərliyi doğrudur 4. İstənilən X, Y, Z çoxluqları üçün $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$ bərabərliyi doğrudur

Çoxluqlar cəbrinin ədədlərdə analoqu olmayan bəzi bərabərlikləri:

İstənilən X, Y, Z çoxluqları üçün

1. $X \cup X = X$; $X \neq \emptyset$; 2. $X \cap X = X$;

3. $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;

4. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ bərabərlikləri doğrudur

Çoxluqlar üçün verilən bərabərliklərin doğruluğunu yuxarıda verilən təriflərin köməyi ilə göstərmək olar. Bu bərabərliklərin bəzilərinin isbatı hazırda istifadədən çıxarılmış VII sinif dərslində var. İsbatların əsas ideyası bərabərliyin sol tərəfindəki ixtiyari elementin sağ tərəfə və əksinə, sağ tərəfdə olan ixtiyari elementin sol tərəfə daxil olduğunu göstərməkdən ibarətdir. Qeyd edək ki, bu bərabərliklərin isbatı şagirdlərin məntiqi mühakimə aparmaq qabiliyyətini artırır.

Burada qeyd olunanlarla adi cəbrlə, çoxluqlar cəbrinin oxşar cəhətləri və fərqləri göstərilir.

2. Kortej, çoxluqların Dekart hasili, çoxluqlarda vurma qaydası

Birləşmələr nəzəriyyəsinin elementlərinin tədrisinin əsasında duran vacib anlayışlardan biri *kortej* anlayışıdır. Bu anlayışın daxil edilməsi birləşmələr nəzəriyyəsinin elementlərinin mənimsənilməsində mühüm rol oynayır. Bu anlayışı belə daxil etmək olar.

Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ çoxluqları verilib, belə ki, bu çoxluqlar sonlu və ya sonsuz ola bilər. X_1 çoxluğundan ixtiyari x_1 , X_2 -dən x_2 və X_n -dən x_n elementi götürməklə düzələn $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ə n uzunluqlu *kortej*, x_m -ə ($m=1, 2, \dots, n$) isə bu kortejin *m-ci koordinatı* deyilir. Kortejə aid misal göstərək.

$X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{1, 3, 5\}$: Bu çoxluqlardan uzunluğu 2 olan $(a, 1)$, $(a, 3)$, $(a, 5)$, $(b, 1)$, $(b, 3)$, $(b, 5)$ kortejlərini, eləcə də $(1, a)$, $(1, b)$, $(3, a)$, $(3, b)$, $(5, a)$, $(5, b)$ və $(a, 1)$, $(a, 3)$, $(a, 5)$, $(b, 1)$, $(b, 3)$, $(b, 5)$ kortejlərini düzəltmək olar, həm də çoxluqlardan fərqli olaraq, bu kortejlər bərabər deyil. Yəni məsələn, 5-elementli

$A=\{a,b,i,k,t\}$, $B=\{k,i,t,a,b\}$ çoxluqları bərabərdir, lakin uzunluqları 5 olan (a,b,i,k,t) və (k,i,t,a,b) kortejləri bərabər deyil.

Ümumiyyətlə, iki kortej yalnız və yalnız uzunluqları eyni, eyni nömrəli yerdə duran koordinatları bərabər olduqda bərabər olur. Yəni $a=(x_1,x_2,...x_m)$, $b=(y_1,y_2,...,y_n)$ kortejləri yalnız və yalnız $m=n$, $x_1=y_1$, $x_2=y_2,...$, $x_m=y_m$ olduqda bərabərdir.

Qeyd edək ki, kortej anlayışı birləşmələr nəzəriyyəsində, xüsusən yerdəyişmələrin və yerləşmələrin tədrisində əsas rol oynayır.

Kortej anlayışının köməyi ilə daxil edilən anlayışlardan biri də çoxluqların Dekart hasili anlayışıdır. Bu da çətin mənimsənilən anlayışdır. Odur ki, anlayışı daxil etdikdən sonra bir neçə misalla izah etmək lazımdır.

Tutaq ki, $X_1, X_2, ..., X_n$ çoxluqları verilib. Bu çoxluqların hərəsindən bir element götürməklə düzələn bütün mümkün $a=(x_1,x_2,...x_n)$ kortejlər çoxluğuna $X_1, X_2, ..., X_n$ çoxluqlarının Dekart hasili deyilir və $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ ilə işarə edilir.

Tərifə görə hər çoxluğun hər bir elementi digər çoxluqların bütün elementləri ilə götürülür.

Əvvəlcə qeyd etmək olar ki, $X_1, X_2, ..., X_n$ çoxluqlarının hamısı sonlu, hamısı sonsuz və ya bəziləri sonlu, digərləri sonsuz çoxluq ola bilər.

Misallar:

1. $X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2=\{4,5\}$, çoxluqlarının Dekart hasilini tapaq.

Verilmiş çoxluqlardan bütün mümkün olan kortejləri düzəldək. Dekart hasili $X_1 \times X_2 = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$ olar.

2. $X_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $X_2=\{1,2\}$. Onda Dekart hasili

$X_1 \times X_2 = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2)\}$ olar.

3. X_1 -natural ədədlər çoxluğu, $X_2=\{m,n\}$ olsun. $X_1 \times X_2$ və $X_2 \times X_1$ Dekart hasilərini tapaq:

$X_1 \times X_2 = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n), (3, m), (3, n),, (k, m), (k, n),\}$

$X_2 \times X_1 = \{(m, 1), (m, 2), (m, 3),, (n, 1), (n, 2), (n, 3),, (m, k), (n, k),\}$

Aydınır ki, $X_1 \times X_2 \neq X_2 \times X_1$

4. $A=\{1,2,3,4\}$ çoxluğu üçün $A \times A$ Dekart hasilini tapaq.

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

Onu da qeyd etmək olar ki, $A \times A$ hasilinə koordinat müstəvisində koordinatları $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)$ olan nöqtələr çoxluğu kimi baxmaq olar.

Kortej anlayışının köməyi ilə daxil edilən anlayışlardan biri də sonlu çoxluqlarda vurma qaydasıdır.

Kəsişməyən iki sonlu $A=(a_1, a_2, \dots, a_m)$, $B=(b_1, b_2, \dots, b_k)$ çoxluqları üçün bu qayda belədir: **Kəsişməyən iki A və B çoxluqlarının Dekart hasilindəki cütlərin elementlərinin sayı bu çoxluqların elementlərinin sayının hasilinə bərabərdir, yəni $A \cap B = \emptyset$ isə**

$$n(A \cap B) = n(A) \cdot n(B) = m \cdot k; \text{ Xüsusi halda } n(A \cap A) = m^2.$$

Cüt-cüt kəsişməyən $A_1, A_2, \dots, A_k$ sonlu çoxluqları üçün qayda belədir:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ isə, } n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_k)$$

3. Təkrarlar olan və təkrarsız yerləşdirmələr

a) Təkrarlar olan yerləşdirmələr.

Elementlərinin sayı m ($n(A)=m$) olan $A=(a_1, a_2, \dots, a_m)$ çoxluğundan düzəldilən k uzunluqlu bütün (yəni koordinatlar eyni də ola bilər) kortejlərin sayını tapmaq. Bu o deməkdir ki, A çoxluğunun özü ilə k dəfə Dekart hasilinin, yəni $A \times A \times \dots \times A$ hasilinin elementlərinin sayını tapmaq lazımdır. Vurma qaydasına görə $n(A \times A \times \dots \times A) = n(A) \cdot n(A) \cdot \dots \cdot n(A) = m^k$

Belə qayda ilə m -elementli A çoxluğundan düzəldilən bütün k uzunluqlu kortejlərə m elementdən k təkrarlar olan yerləşdirmələr deyilir.

Misal 1. 1,2,3,4,5,6,7,8,9 rəqəmlərindən neçə beşrəqəmli ədəd düzəltmək olar?

Bu rəqəmlər $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ çoxluğunun elementləri olduğundan, suala cavab vermək A -nın öz-özü ilə beş dəfə Dekart hasilini olan (rəqəmləri təkrarlananlar da götürülür) çoxluğun elementlərinin sayını tapmaq deməkdir. $n(A)=9$ olduğu üçün, vurma qaydasına görə

$$n(A \times A \times \dots \times A) = n(A) \cdot n(A) \cdot \dots \cdot n(A) = [n(A)]^5 = 9^5 = 6561$$

Misal 2. 9 müxtəlif ehtiyat hissəsini neçə üsulla 3 yeşiyə yığmaq olar?

Yeşiklərə $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ çoxluğunun elementləri kimi baxsaq, məsələn bu çoxluğun özü-özü ilə 9 dəfə Dekart hasilinin elementlərinin sayını tapmaq deməkdir. Vurma qaydasına görə

$$n(A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A) = [n(A)]^9 = 3^9$$

b) Təkrarsız yerləşdirmələr

Təkrarlar olan yerləşdirmədə elementlərinin sayı m olan X çoxluğunda k uzunluqlu kortejlər düzəldəndə elementlər təkrarlana bilər. İndi isə bu X çoxluğunda elementləri təkrarlanmayan k uzunluqlu kortejlərin sayını tapmaq. Bu halda alınan çoxluğa m -elementli çoxluqda k uzunluqlu *təkrarsız yerləşdirmə* deyilir. Belə çoxluğun elementlərinin sayını tapmaq üçün aşağıdakı kimi mühakimə aparaq:

X çoxluğunun istənilən elementini kortejin birinci elementi kimi götürək. X -in elementlərinin sayı m olduğundan, belə seçimlərin mümkün sayı m olur. Birinci elementi x_1 ilə işarə edək. Onda ikinci element x_1 -dən başqa qalan $m-1$ elementdən seçilir. Bu elementi x_2 ilə işarə edək. Deməli üçüncü element x_1, x_2 -dən

başqa qalan $m - 2$ elementdən seçilir. Onu da x_3 ilə işarə edək və s. Bu qayda ilə k -cı element qalan $m - (k - 1)$ sayda elementdən, yəni $m - k + 1$ üsulla seçilir. Buradan vurma qaydasına görə alınır ki, m elementdən təkrarsız k uzunluqlu kortejlərin sayı

${}_mP_k = m(m - 1)(m - 2) \dots (m - k + 1)$ olar. Bu düsturu da

$(m - k)! = (m - k)(m - k - 1) \dots 1$ – əvuraraq $(m - k)! {}_mP_k = m!$ şəklində və

ya ${}_mP_k = \frac{m!}{(m - k)!}$ şəklində yazmaq olar; burada $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$

Qeyd edək ki, bir çox ədəbiyyatlarda və dərsliklərdə ${}_mP_k$ əvəzinə A_m^k (aranjeman m elementdən k) yazılır.

Əgər m elementdən düzələn təkrarsız m uzunluqlu kortejlərin sayı axtarılsa, ${}_mP_k$ üçün düsturda $k = m$ götürülür. Onda m elementli çoxluqda təkrarsız yerləşdirmələr m uzunluqlu kortejlər bir-birindən yalnız elementlərin düzülüşü ilə fərqlənir, onların sayı isə, $0! = 1$ qəbul edildiyindən,

${}_mP_m = m!$ olur. Belə yerləşdirmələr *yerdəyişmələr* adlanır və P_m (təkrarsız permutasiyalar) ilə işarə olunur. Deməli $P_m = m!$

Misal 1. Bir müəssisədə işləyən 9 işçidən 4-ünü sanatoriyaya göndərmək lazımdır. Bunu neçə üsulla etmək olar?

Məsələyə 9 elementli çoxluqdan elementləri təkrarlanmayan və uzunluqları 4 olan kortejlərin sayını tapmaq məsələsi kimi baxsaq, yuxarıda alınan düstura əsasən ${}_9P_4 = \frac{9!}{(9 - 4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$

Misal 2. Bir emalatxanada 8 usta var. Hər birinə yalnız bir hissə (detal) hazırlanmasını tapşırmaqla 3 müxtəlif hissənin hazırlanmasını neçə üsulla tapşırmaq olar?

Bu məsələyə də 8 müxtəlif elementli çoxluqda uzunluğu 3 olan və elementləri təkrarlanmayan kortejlərin sayını tapmaq məsələsi kimi baxmaq olar. Belə kortejlərin sayı ${}_8P_3 = \frac{8!}{(8 - 3)!} = 336$

Misal 3. Futbol turnirində iştirak edən 8 komandanın hamısı müxtəlif sayda xallar toplayıb. Komandaları turnir cədvəlində neçə üsulla yerləşdirmək olar?

Komandalar və onların topladığı xallar müxtəlif olduğundan cədvəldə onları $P_8 = 8! = 40320$ sayda usullarla yerləşdirmək olar.

Bütün bu qeyd olunanlar göstərir ki, kortej anlayışının köməyi ilə birləşmələr nəzəriyyəsinin çox çətin mənimsənilən mövzularını kifayət qədər sadə formada tədris etmək olar və bundan sonra kombinezonlar mövzusunun tədrisi də xeyli asanlaşar.

Redaksiyaya daxil oldu: 20.04.2019

Təkrar işləməyə verildi: 01.05.2019

Çapa verildi: 10.05.2019

Rəyçi: dos. M.Vəliyev