МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАН-СКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИ-ТЕТ

Механико – математический факультет

Кафедра теории функций и функционального анализа

П Р О Г Р А М М А

по теории функций комплексного переменного

Направление ТЕ 01.00.00- математика
Специальность ТЕ 01.01.00- математика

Утверждено приказом Министра Образования Азербайджанской Республики №1164 от 21.10.2008 г.

Б А К У – 2008

Программа была составлена на кафедре Теории функций и функционального анализа Бакинского Государственного Университета

Составители: проф. А.М.Ахмедов
проф.Дж.И.Мамедханов
проф.Н.М.Сулейманов
доц. Р.М.Бабаев
доц.А.Т.Таги-заде
доц. М.А.Тагиева
дос. Ф.М.Джавадова
к.ф.м.н. Х.С.Масимова

Научный редактор: Зав. кафедрой Теории функций и функционального анализа Бакинского Государственного Университета д.ф.м.н.,проф.А.М. Ахмедов

Рецензенты: к.ф.м.н.,доц.А.Г.Гейдаров,
к.ф.м.н., доц.Ф.А.Абдуллаев

ПРОГРАММА

курса «Теория функций комплексного переменного»

1. Введение в теорию функций комплексного переменного.

В этой части отмечается история развития и известные факты теории функций комплексного переменного.

2. Поле комплексных чисел. Выражение комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

В этой части дается определение комплексным числам, и определяются вычислительные действия над ними. Вводятся понятия модуля и аргумента комплексного числа. Даются выражения комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и в показательной форме. Даются геометрический смысл суммы и разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, и произведения и частного комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Упрощается степень комплексного числа с помощью тригонометрического её выражения и доказывается теорема Муавра.

3. Корни комплексных чисел.

В этой части посредством тригонометрической записи комплексных чисел определяются их корни n-ой степени и

доказывается, что эти корни находятся на окружности определенного радиуса, причем только n из них различны.

4. Последовательности и ряды комплексных чисел.

В этой части определяются последовательности и ряды комплексных чисел и вводятся понятия их сходимости. Доказывается необходимое и достаточное условие сходимости последовательностей и рядов комплексных чисел с помощью образованных из их вещественных и мнимых частей вещественных последовательностей и рядов. Определяются фундаментальные последовательности и ряды, и доказывается необходимое и достаточное условие сходимости последовательностей и рядов. Вводится понятие сходимости последовательности к бесконечности и дается определение расширенной комплексной плоскости. Даются понятия абсолютной и условной сходимости ряда. Даются преобразования Абеля для сумм и теоремы Абеля и Дирихле для рядов. Доказываются свойства сходящихся последовательностей и рядов, а именно доказываются соответствующие теоремы о сходимости суммы, произведения на число, произведения и частного сходящихся последовательностей и теоремы о сходимости суммы, произведения на число и произведения сходящихся рядов.

5. Стереографическая проекция комплексных чисел.

В этой части для комплексного числа находящегося на комплексной плоскости определяются проекция на окружности с центром на оси Oz (дополнительная ось) радиуса равной $\frac{1}{2}$-ой касающегося плоскость в точке O и трехмерные координаты.

6. Множества на комплексной плоскости.

В этой части даются определения открытого круга, замкнутого круга и окружности. Вводятся понятия точки касания, предельной, изолированной и внутренней точки, определяется замыкание множества, и доказываются её свойства. Даются понятия открытого и замкнутого множества, и доказываются их свойства.

7. Функция комплексного переменного.

В этой части дается определение функции комплексного переменного и определяются её вещественные и мнимые части, две вещественнозначные функции вещественного переменного. Даются понятия образа и прообраза точки. Дается определение обратной функции, и доказываются её свойства.

8. Предел и непрерывность функции.

В этой части даются определения и свойства предела функции. Доказывается необходимое и достаточное условие существования и нахождения предела. Вводится понятие непрерывности функции в точке и на множестве, и доказываются ее свойства.

9. Комплекснозначные функции вещественного переменного. Непрерывная кривая.

В этой части дается определение комплекснозначной функции вещественного переменного и вводится понятие ее предела, непрерывности, производной и интеграла. Вводится понятия непрерывной кривой, открытой кривой, замкнутой кривой, простой кривой, спрямляемой кривой с ее длиной, гладкой кривой с ее касательной и понятие равенства кривых. Дается без доказательства теорема Жордана и вводится понятие обобщенной непрерывной кривой.

10. Производная и дифференциал. Правила дифференцирования. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.

В этой части даются определение производной и понятие дифференцируемой функции. Доказывается, что необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции является существование ее конечной производной. Доказываются свойства производной и формулы производной сложной функции, функции обратной заданной. Наконец, в конце раздела доказывается необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции, следствием которого доказывается выражение производной функции с помощью соответствующих производных ее вещественной и мнимой части.

11. Аналитичность функции в точке и на области.

В этой части в отличие от дифференцируемости функции дается понятие аналитической функции в точке, и это понятие вводится для области.

12. О вещественной и мнимой части аналитической функции. Построение аналитической функции по заданной ее гармонической вещественной части.

В этой части с помощью условия Коши-Римана доказывается гармоничность вещественной и мнимой части на области аналитичности функции. Строится аналитическая функция по заданной гармоничной (в односвязной области) ее вещественной части. Для этого используются свойства II рода криволинейного интеграла.

13. Геометрический смысл производной в точке. Конформное отображение в точке и на области.

В этой части дается геометрический смысл аргумента и модуля производной в точке и понятие конформного отображения I и II – го рода. Доказывается, что функция с отличной производной в точке является конформным отображением I рода.

14. Линейное отображение. Дробно-линейное отображение. Свойства дробно-линейного отображения: групповое свойство, свойство сохранения окружности, свойство построения отображения с помощью образов трех точек, свойство отображения круговых областей друг в друга, свойство сохранения симметрии.

В этой части доказываются свойства линейного отображения. Доказывается конформность дробно-линейного отображения в дифференцируемых точках расширенной плоскости, и в оставшихся двух точках свойство сохранения угла. Доказывается, что суперпозиция дробно-линейных отображений, отображение обратное дробно-линейному являются дробно-линейными отображениями. Доказывается, что дробно-линейное отображение отображает обобщенную окружность на обобщенную окружность с сохранением отношения. Дается определение круговым областям и доказывается свойство сохранения круговой области при дробно-линейном отображении. Дается определение симметричности точек относительно окружности и доказывается симметричность их образов при дробно-линейном отображении относительно соответствующего образа окружности.

15. Степенная функция.

В этой части изучаются свойства степенной функции с натуральным показателем. посредством этой функции строятся образы окружности и луча выходящего с нулевой точки и определяются области ее однолистности.

16. Функция $w=\sqrt[n]{z}$. Выделение однозначных непрерывных ветвей.

В этой части определяется многозначная функция $w=\sqrt[n]{z}$ и выделяется ее однозначная непрерывная ветвь, отображающая соответствующую часть плоскости в угол со значением $2\pi/n$. Как обратимая функция для этой ветви находится обратная функция. Для многозначной функции $w=\sqrt[n]{z}$ строятся поверхности Римана.

17. Фцнкция $w=\exp z$ и ее свойства.

В этой части определяется функция $w=\exp z$ и изучаются ее свойства. Посредством этой функции определяются образы прямых параллельных и перпендикулярных к вещественной оси и определяется область ее однолистности.

18 Логарифмическая функция $w=Lnz$.

В этой части как обратная функции $w=\exp z$ определяется многозначная логарифмическая функция $w=Lnz$ и строятся ее однозначные непрерывные ветви. Как производная

обратной функции находятся производные этих ветвей. Для функции $w=Lnz$ строится поверхность Римана.

19. Тригонометрические и гиперболические функции.

В этой части как продолжение в комплексную плоскость тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ и гиперболических функций shx и chx (вещественной переменной) определяются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ и гиперболических функций shx и chx посредством функции $\exp z$ и изучаются их свойства. Строятся вещественные и мнимые части функций $\sin x$ и $\cos x$ доказываются некоторые оценки для $|\sin z|$ и $|\cos z|$. Вычисляются производные для этих функций.

20. Обратные тригонометрические функции.

В этой части определяются многозначные функции $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctgz$ и $Arcctgz$ и выделяются однозначные непрерывные ветви функций $Arc\cos z$ и $Arctgz$.

21. Степени с комплексным показателем.

В этой части определяется с комплексным показателем и приводятся примеры.

22. Общие показательные и степенные функции.

В этой части определяются степенные функции с комплексным показателем и показательные функции, для которых строятся обратные (многозначные) функции.

23. Интеграл функции комплексного переменного ,ее свойства и формулы нахождения интеграла.

В этой части дается определение интеграла вдоль спрямляемых кривых и доказываются их выражения посредством вещественных криволинейных интегралов. Посредством определения вычисляются интегралы простых функций. Доказываются некоторые простейшие свойства интегралов, интегралы вдоль гладких кривых сводятся к интегралам Римана.

24. Интегральная теорема Коши. Теорема для сложных контуров.

В этой части доказывается теорема для аналитических функций в односвязной области. Доказательство этой теоремы сначала проводится вдоль треугольника, потом для n-угольника и в наконец для произвольной замкнутой спрямляемой кривой. Далее, теорема Коши доказывается для многосвязных областей и как следствие теоремы Коши получается равенство для сложных контуров.

25. Интеграл и первообразная.

В этой части для функций изучаются интегралы, значения которых не зависят от вида кривой, как функция с верхней границей ведется исследование интегралов зависящих только от конечных точек кривой и доказывается теорема аналитичности этих функций в соответствующих областях, а также находятся их производные. Определив первообразную функции доказывается, что функция аналитическая в односвязной области обладает первообразной. Доказываются формулы Ньютона-Лейбница и интегрирования по частям.

26. Интегральная формула Коши.

В этой части доказывается формула выражающая значения аналитической в области и на ее границе (в случае когда граница является спрямляемой кривой) функции во внутренних точках области посредством ее значений на границе. Как следствие получается свойство среднего значения гармонических функций.

27. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара.

В этой части изучаются степенные ряды являющиеся частым случаем функциональных рядов и даются понятия радиуса и круга сходимости. Доказывается формула вычисления радиуса сходимости. Даются примеры исследования сходимости степенного ряда на окружности круга сходимости.

28. Равномерная сходимость. О равномерной сходимости степенных рядов.

В этой части исследуется равномерная сходимость функциональных рядов в областях их сходимости и доказывается равномерная сходимость степенных рядов в любом круге, взятом изнутри круга сходимости. В следствии которого доказывается непрерывность суммы функциональных рядов и возможность их почленного интегрирования.

29. Аналитичность суммы степенных рядов.

В этой части доказывается аналитичность суммы степенного ряда в круге сходимости, следствием которого дается ее разложение в ряд Тейлора. С помощью этого разложения доказывается факт единственности степенного ряда.

30. Теорема разложения аналитической на области функции в степенной ряд. Теорема Лиувилля.

В этой части доказывается разложение аналитической на области функции в некоторой окрестности каждой точки области в степенной ряд. В теореме определяются указанная окрестность и коэффиценты степенного ряда, для которых как следствие доказывается неравенство Коши. С помощью этого неравенства доказывается теорема Лиувилля.

Как применение теоремы Лиувилля доказывается основная теорема алгебры. В этой части доказывается бесконечная дифференцируемость аналитической и гармонической на области функций.

31. Выражение производной аналитической функции через интеграл.

В этой части аналогично интегральной формуле Коши доказывается формула интегрального представления производной n-го порядка функции во внутренней точке области посредством граничных ее значений.

32. Интеграл типа Коши и ее производная.

В этой части дается определение интеграла типа Коши и доказывается формула ее интегрального представления производной n-го порядка.

33. Нули аналитической функции.

В этой части дается определение нуля и ее порядка аналитической функции, и доказывается необходимое и достаточное условие нуля p-го порядка.

34. Теорема Морера.

В этой части доказывается теорема, являющееся в некотором смысле обратной теореме Коши.

35. Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости ряда аналитических функций.

В этой части дается понятие равномерной сходимости функционального ряда внутри области и доказываются теорема аналитичности суммы и теорема вычисления производной (p -го порядка) по правилу почленного дифференцирования ряда аналитических функций.

36. Теорема единственности аналитических функций. Аналитическое продолжение.

В этой части доказывается достаточное условие тождественного равенства аналитической функции на области и отмечаются необходимые условия теоремы. Дается понятие аналитического продолжения, корректность которого доказывается с помощью теоремы единственности. Определяются аналитические продолжения некоторых функций с вещественной оси на комплексную плоскость. Для построения аналитического продолжения доказаны теоремы.

37. Ряд Лорана.

В этой части как обобщение степенных рядов определяется ряд Лорана и дается определение ее сходимости. Для определения области сходимости доказаны теоремы. Доказывается аналитичность ряда Лорана в кольце ее сходимости и доказывается теорема тождественности рядов Лорана.

38. Теорема Лорана.

В этой части доказывается теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана, коэффиценты которого определяются посредством функции. Как следствие для этих коэффицентов доказывается неравенство.

39. Классификация изолированных особых точек (однозначного характера).

В этой части дается понятие особой точки и изолированной особой точки аналитической функции и их классификация, относительно которых доказаны теоремы. Дается эквивалентное определение изолированным особым точкам посредством ряда Лорана.

40. Особенность в бесконечно удаленной точке и ее классификация.

В этой части дается классификация особенности в бесконечно удаленной точке и доказаны теоремы.

41. Целые и мероморфные функции.

В этой части дается определение и классификация целых функций. Дается определение мероморфной функции и в качестве примера, которых исследуются рациональные функции. Доказывается теорема о разложении мероморфных функций.

42. Вычет. Основная теорема о вычетах.

В этой части дается определение вычетам и доказывается корректность определения. доказывается основная теорема о вычетах. Доказывается теорема для вычисления вычета с помощью коэффицента c_{-1} в лорановском разложении. В случае полюса для вычисления вычета доказаны формулы.

43. Вычет в бесконечно удаленной точке.

В этой части дается определение вычета в бесконечно удаленной точке и для ее вычисления доказывается формула. Доказывается теорема о связи вычета в бесконечно удаленной точке с вычетом остальных изолированных особых точек. Изучаются вычисления вычета в бесконечно удаленной точке в различных случаях. Теория вычетов применяется к вычислениям интегралов функций комплексного переменного и с помощью определенных теорем вычисляются несобственные интегралы.

44. Логарифмический вычет. Принцип аргумента и ее следствие. Теорема Руше.

В этой части доказываются свойства частного производной функции к функции и дается понятие логарифмического вычета. С помощью определенного выражения логарифмического вычета доказывается принцип аргумента и как ее следствие теорема Руше.

45. Отображение области аналитической функцией.

В этой части доказывается, что образ области при аналитической функции, тождественно не равной постоянной, является областью. Отмечается, что свойство сохраняет силу и в том случае, когда область в расширенной плоскости содержит в себе ∞ и функция $f(z)$ обладает полюсами. По поводу темы доказаны теоремы.

46. Принцип максимума модуля аналитической функции.

В этой части доказываются свойства модуля аналитической функции. Применяя принцип максимума доказываются свойства аналитических и гармонических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1.Лаврентьев М.А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного , М., 1988 г.

2.Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М., 1967 г.

3.Привалов И.И. Введение в теорию функции комплексного переменного.М., 1977 г.

4.Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функции комплексного переменного. М., 1976 г.

5.Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М., 1959 г.

6.Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций. М.,1972 г.

7.Həbibzadə Ə.Ş. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi. I-II hissə., Bakı, 1962, 1964.

8.Mirzəyev Q.H., Cavadova F.M. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi.Bakı, 1999.

9.Babayev R.M., Cavadova F.M. Kompleks müstəvidə kəsr-xətti funksiyalar., Dərs vəsaiti, Bakı, 2002.