МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико – математический факультет

Кафедра теории функций и функционального анализа

П Р О Г Р А М М А

по функциональному анализу

Утверждено приказом Министра Образования Азербайджанской Республики №1164 от 21.10.2008 г.

БАКУ – 2008

Программа была составлена на кафедре Теории функций и функционального анализа Бакинского Государственного Университета

Составители: проф. А.М.Ахмедов
проф.С.С.Мирзоев
проф.Дж.И.Мамедханов
проф.Н.М.Сулейманов
проф.М.Б.Рагимов
доц. Р.М.Бабаев
доц. Ф.М.Джавадова
к.ф.м.н. Х.С.Масимова

Научный редактор: Зав. кафедрой Теории функций и функционального анализа Бакинского Государственного Университета д.ф.м.н.,проф.А.М. Ахмедов

Рецензенты: д.ф.м.н., проф.С.К.Абдуллаев,
к.ф.м.н., доц.В.А.Касимов

П Р О Г Р А М М А

по курсу «Функциональный анализ»

Среди математических дисциплин, исследующих те или иные математические структуры функциональный анализ наряду с абстрактной алгеброй и топологией играет важную роль. Его методы с успехом используются во многих разделах современной теоретической и прикладной математики. Более того, развитие таких дисциплин, как дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), теория управления, методы вычислений и др.,вряд ли было бы в последние годы столь успешным, если бы при этом не использовались идеи и методы функционального анализа. Поэтому функциональный анализ стал необходимым элементом серьезного математического образования и преподавание его основ включено в учебные планы математических специальностей университетов. При составлении этой программы широко использовались книги «Элементы теории функций и функционального анализа» А.Н.Колмогорова и С.В.Фомина, «Функциональный анализ» Л.В.Канторовича и Г.П. Акилова, «Краткий курс функционального анализа» Л.А.Люстерник и В.И. Соболева,а также вышедшие под тем же названием книги других известных зарубежных математиков.

1. Функциональное пространство. Метрическое пространство.

В этом разделе дается понятие функционального пространства. После введения понятия метрики вводится понятие метрического пространства, как пара множества и метрики. Даются опеределения сходящейся и фундаментальной последовательностей и доказываются свойства сходящейся последовательности. В этом же разделе вводятся понятия сепарабельного пространства, отображения метрического пространства, изоморфности, изометричности метрических пространств, предела и непрерывности отображения, гомеоморфности метрических пространств.

2. Полное метрическое пространство.

В этом разделе дается понятие полного метрического пространства и доказываются теоремы (о вложенных шарах, теорема Бера и т.д.), верные в полном метрическом пространстве. Вводится понятие пополнения метрического пространства и доказывается теорема о пополнений метрического пространства.

3. Принцип сжимающего отображения.

В этом разделе даются понятия сжимающего отображения неподвижной точки. Доказывается теорема, называемая принципом сжимающего отображения о существовании и единственности неподвижной точки для сжимающего отображения. В этой же теореме строятся последовательные приближения, сходящиеся к неподвижной точке и оценивается погрешность этого приближения. Далее, даются применения этой теоремы к вопросам существования и единственности решений некоторых уравнений.

4. Компактность в метрическом пространстве.

В этом разделе вводится понятие компактного и компактного в себе множества в метрическом пространстве. Доказываются теорема Хаусдорва и её следствия,с помощью этой теоремы даются критерии компактности множеств в конкретных метрических пространствах ($l_p, C[a,b], L_p[a,b]$ и т.д.). Доказываются свойства непрерывного отображения на компактном в себе множестве и теоремы, связанные с системами открытых и центрированной системой замкнутых множеств.

5. Топологическое пространство**.**

В этом разделе дается понятие топологического пространства (множество и система множеств, удовлетворяющая некоторым аксиомам), также определяется понятие базы,аксиомы счетности,счетной базы и дается классификация топологических пространств с помощью аксиом отделимости.

6. Линейное пространство.

В этом разделе даются понятия линейного пространства и его подпространства, конечномерного и бесконечномерного пространств, линейной и выпуклой оболочки множества и т.д. Так же определяются понятия изоморфизма линейных пространств, фактор-пространства, прямой суммы подпространств и даются примеры линейных пространств.

7. Линейное нормированное пространство. Банахово пространство.

В этом разделе даются определения нормы,нормированного пространства, подпространства (замкнутого) и линейного многообразия пространства,банахова пространства. Изучаются особенности фактор-пространства в нормированном и банаховом пространствах.Доказывается теорема Рисса, дается понятие эквивалентности норм заданных в одном линейном пространстве и доказывается эквивалентность норм, заданных в конечномерном пространстве. Вводится понятие изоморфности нормированных пространств. Даются примеры нормированных и банаховых пространств.

8. Линейный оператор.

В этом разделе даются определения линейного оператора и ядра линейного оператора, и доказывается, что ядро и область значения линейного оператора являются подпространствами соответствующих пространств. Даются понятия линейной комбинации линейных операторов и линейного пространства линейных операторов. Вводится понятие обратного оператора и доказывается линейность оператора, обратного линейному оператору.

9. Линейно-ограниченный и линейно-непрерывный операторы.

В этом разделе даются определения линейно-ограниченного и линейно-непрерывного операторов и доказывается эквивалентность этих понятий, если области определения этих операторов есть все пространство. Определяется норма ограниченного оператора и отмечается нормированность линейного пространства $L(E,E_1)(E,E_1$ - линейные нормированные пространства). Доказываются теоремы для полноты пространства $L(E,E_1)$ и для непрерывного продолжения линейного оператора, удовлетворяющего некоторым условиям. В этом же разделе доказывается необходимое и достаточное условие для ограниченности обратного линейного оператора, также доказываются теорема Банаха и теорема об ограниченности $(I-A)^{-1}$. Строятся примеры линейных ограниченных операторов.

10. Последовательность линейных ограниченных операторов.

В этом разделе дается понятие сходимости в $L(E,E_1)(E,E_1$- линейно нормированные пространства). Сравниваются понятия равномерной и сильной сходимостей последовательности ограниченных операторов. Доказываются теоремы о принципе равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штеунгауза.

11.Линейный функционал. Ограниченный и непрерывный функционал.

В этом разделе даётся понятие линейного функционала, являющееся частным случаем линейного оператора и доказываются его свойства. Даётся геометрический смысл линейного функционала. Остаются в силе данные понятия ограниченности и непрерывности для линейного оператора и для линейного функционала и доказываются свойства этих функционалов. Вводится понятие сопряженного пространства и определяется сходимость в этом пространстве. Отметим, что понятие равномерной сходимости последовательности операторов соответствует понятию сильной сходимости функциональной последовательности в сопряженном пространстве.

12.Теорема Хана-Банаха и ее следствия в линейном нормированном пространстве.

В этом разделе доказывается теорема о линейном продолжении с сохранением нормы линейного функционала в действительном и в комплексном нормированном пространствах. Доказываются следствия этой теоремы.Отмечается, что теорема Хана-Банаха в комплексном случае действительно для комплексных линейных многообразий этого пространства.

13. О вложении $E \subset E^{**}$. Рефлексивное пространство.

В этом разделе ставя каждому элементу пространтсва E некоторый элемент E^{**}, определяем некоторое линейное инъективное отображение .При этом норма элемента E равна норме образа (из E^{**}). Отметим,что образ пространства E вообще-то не совпадает с E^{**}. Именно в этом смысле понимается вложение $E \subset E^{**}$, т.е пространство E изоморфно и изометрично некоторому линейному многообразию в E^{**}. В случае, когда образ пространства E совпадает с E^{**}, т.е. если $E = E^{**}$,то пространство E назовём рефлексивным.

14. Слабая сходимость в линейном нормированном пространстве.

В этом разделе даётся понятие слабой сходимости последовательности элементов и даётся сравнение этой сходимости со сходимостью по норме. Доказываются свойства слабо сходящей последовательности,в частности доказываются принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штейгауза. Отметим, что при доказательстве используется вложение $E \subset E^{**}$ и соответствующие теоремы для функциональной последовательности.

15. Слабая и *-слабая сходимость в сопряженном пространстве.

В этом разделе даются понятия слабой и *-слабой сходимостей последовательности линейных ограниченных функционалов. Отметим,что понятию *-слабой сходимости соответствует понятие сильной сходимости последовательности операторов,а слабая сходимость понятию слабой сходимости в линейной нормированном пространстве E^* (сопряженное пространство). В случае рефлексивного пространства понятия слабой и *- слабой сходимостей совпадают. Отметим, что сильно сходящая функциональная последовательность сходится также слабо и*- слабо, обратное вообще-то не верно.

16.Общий вид линейного непрерывного функционала в конкретных линейных нормированных пространствах.

В этом разделе доказывается теорема в общем виде линейных непрерывных функционалов в банаховых пространствах $C_0, l_p (p \geq 1)$, $C[a,b]$ $L_p[a,b]$.

Отметим, что во многих случаях под E^* подразумевается линейно-нормированное пространство, изоморфное, изометрическое пространству линейных ограниченных функционалов

17.Гильбертово пространство. Ряды Фурье. Теорема об ортогональном разложении. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве**.**

В этом разделе даётся понятие гильбертова пространства. Рассматриваются действительное и комплексное гильбертовы пространства. Под действительным гильбертовым пространством подразумевается действительное, бесконечномерное, сеперабельное банахово пространство с действительнозначным скалярным произведением, В этом случае норма определяется скалярным произведением. Под комплексным гильбертовым пространством подразумевается комплексное пространство с комплекснозначным скалярным произведением (сохраняя условия бесконечномерности,полноты и сеперабельности). Отметим, что без условий полноты или бесконечномерности пространство называется Эвклидовым. В гильбертовом пространстве даются понятия ортогональной системы, ортонормированного базиса, коэффициентов Фурье ,ряды Фурье и т.д. и доказываются их свойства, изоморфизм гильбертовых пространств. Доказывается теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и вводится понятие ортогональной суммы под пространств гильбертова пространства.. Доказывается теорема об общем в виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Отметим, что как в случае конечномерного Эвклидового пространства линейный непрерывный функционал имеет вид скалярного произведения.

18.Сопряженный оператор в линейном нормированном пространстве.Самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве**.**

В этом разделе даётся понятие сопряженного оператора линейного ограниченного оператора в линейном нормированном пространстве и доказываются свойства этого оператора. В гильбертовом пространстве сопряженный оператор определен в самом пространстве H изоморфным,изометрическим пространству H^*. Так как пространства H и H^* равны в изоморфно-изометрическом смысле,то определение самосопряженного оператора является коррекным. Доказываются свойства самосопряженного оператора. Наконец, даётся понятие сопряженного, самосопряженного оператора для неограниченного оператора и симметрического оператора.

19.Компактный оператор в линейном нормированном пространстве.

В этом разделе даётся определение компактному оператору и доказываются его свойства. Отмечается некомпактность единичного оператора в бесконечмерном нормированном пространстве (так как единичный шар в бесконечномерном нормируемом пространстве не компактен). Доказываются теоремы,связанные с обратным и сопряженным оператором компактного оператора.

20. Теоремы Фредгольма.

В этом разделе исследуются вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнения, связанного с оператором вида $I+K$, здесь I – единичный K-компактный оператор, в банаховом пространстве. Отмечается, что существование и единственность решений таких уравнений тесно связанно со свойствами соответствующего сопряженного оператора.

21. Спектр линейного и линейно-ограниченного оператора в линейном нормированном пространстве.

В этом разделе даются определения собственного числа, собственного элемента, спектра, регулярного множества и резольвенты линейного оператора. В случае, когда оператор является ограниченным доказываются свойства спектра, регулярного множества и резольвенты.

22. О спектре компактного, самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмитда.

В этом разделе определяется структура спектра компактного оператора (с помощью теоремы Фредгольма) и доказываются свойства спектра. Также доказывается принадлежность спектра самосопряженного оператора действительной оси и его другие свойства. И наконец, доказывается теорема Гильберта-Шмидта для компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1.А.Н.Колмогоров, С.М.Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1988 г

2.Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа. М., 1965г.

3.Л.В.Канторович, Г.П.Акилов.Функциональный анализ в нормированных пространствах.М., 1959 г.

4.М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики, т.1.Функциональный анализ, 1977 г.

5.В.А.Треногин.Задачи и упражнения по функциональному анализу.М., 1984 г.

6.Ə.Ş.Həbib-zadə.Funksional analiz. Bakı, 198

7.Ə.M.Əhmədov.Xətti analizin üç prinsipi.Bakı, 1998.

8.C.C.Mirzəyev,R.M.Babayev. Lebeq inteqrali., Baki.