Mühazirə 1

Vektor anlayışı. Vektorlar üzərində xətti əməllər

1. Uc nöqtələrinin nizamı nəzərə alınan parçaya *istiqa-mətlənmiş parça* deyilir. Tutaq ki, uc nöqtələri A və B nöqtələ-rində olan parça verilmişdir. A-birinci nöqtə, B isə ikinci nöqtə olduqda A nöqtəsinə bu istiqamətlənmiş parçanın *başlanğıcı*, B nöqtəsinə isə *sonu* deyilir; bu halda $\overline{AB}$ yazılışından istifadə olunur. Başlanğıcı və sonu üst-üstə düşən istiqamətlənmiş parçaya *sıfır istiqamətlənmiş parça* deyilir. Tərifə görə ixtiyari A nöqtəsi üçün $\overline{AA}$ sıfır istiqamətlənmiş parçadır.

AB parçasının uzunluğu $\overline{AB}$ istiqamətlənmiş parçasının *uzunluğu* adlanır və $\left|\overline{AB}\right|$ kimi işarə olunur. Sıfır istiqamətlənmiş parçanın uzunluğunun sıfra bərabər olması nəzərdə tutulur.

Tutaq ki, A və B verilmiş iki nöqtədir. Onda $\overline{AB}$ və $\overline{BA}$ müxtəlif istiqamətlənmiş parçalardır. $\overline{AB}$ və $\overline{BA}$ parçala-rından hər biri digərinə *əks* olan istiqamətlənmiş parça adlanır.

AB və CD şüaları eyni (əks) istiqamətli olduqda deyirlər ki, $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ *eyni* (*əks*) *istiqamətlənmiş* parçalardır. Sıfır istiqa-mətlənmiş parçanın istənilən istiqamətlənmiş parça ilə eyni istiqamətli olması qəbul edilir.

Eyni istiqamətlənmiş və uzunluqları bərabər olan $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ parçalarına *ekvipolent parçalar* deyilir. Bu halda $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$ yazılışından istifadə olunur. Asanlıqla yoxlanılır ki $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ istiqamətlənmiş parçaları yalnız və yalnız AD və BC parçaları-nın orta nöqtələri üst-üstə düşdükdə ekvipolent olurlar.

Qeyd edək ki, ekvipolentlik münasibəti aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1. ixtiyari istiqamətlənmiş $\overline{AB}$ parçası üçün $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.
2. $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.
3. $\left(\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}\text{ və } \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{EF}\right) \Rightarrow \overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{EF}$.

Beləliklə, ekvipolentlik münasibəti fəzanın bütün istiqa-mətlənmiş parçalar çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. Fəzanın bütün istiqamətlənmiş parçalar çoxluğunu W ilə işarə edək. $\overset{\omega}{=}$ ekvipolentlik münasibətinin hər bir ekvivalentlik sinifinə *vektor* (və ya *sərbəst vektor*) deyilir. BTərifə əsasən, vektor-$V = W / \overset{\omega}{=}$ faktor-çoxluğunun elementidir. Vektorlar üstünə ox işarəsi qoyulan hərflərlə işarə olunurlar: $\vec{a}, \vec{b}, \dots$.

Beləliklə, vektor-elə istiqamətlənmiş parçalar çoxluğudur ki, onlardan ixtiyari ikisi ekvipolent parçalardır. Bu çoxluğun ən azı bir parçası sıfır istiqamətlənmiş parça olduqda vektor *sıfır vektor* adlanır və $\vec{0}$ kimi işarə olunur.

Tutaq ki, $\vec{a}$ – verilmiş vektordur, yəni $\overset{\omega}{=}$ münasibətinin ekvivalentlik sinfidir. $\overline{AB} \in \vec{a}$ olduqda $\overline{AB}$ bütün ekvivalentlik sinfini, yəni $\vec{a}$ vektorunu təmsil edir. Bu halda $\vec{a}$ vektoru $\overrightarrow{AB}$ kimi işarə olunur. $\vec{a} = \vec{b}$ yazılışı göstərir ki, $\vec{a}$ çoxluğu $\vec{b}$ çoxluğu ilə üst-üstə düşür, yəni $\vec{a}$ və $\vec{b}$ müxtəlif cür işarələnmiş eyni vektordur.

Fəzanın ixtiyari $\vec{a}$ vektorunu və məyyən O nöqtəsini götürək. İsbat edək ki, $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ şərtini ödəyən bir və yalnız bir M nöqtəsi vardır. Doğrudan da fərz edək ki, $\overline{AB} \in \vec{a}$. OB parçasının C orta nöqtəsinə baxaq və C nöqtəsinə nəzərən A nöqtəsinə simmetrik olan M nöqtəsini götürək. İki istiqamət-lənmiş parçanın ekvipolentlik əlamətinə əsasən $\overline{OM} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$, ona görə də $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. İndi isə göstərək ki, M - $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ şərtini ödəyən yeganə nöqtədir. Tutaq ki,

$\overrightarrow{OM'} = \vec{a}$. Onda $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$. Buradan istiqamətlənmiş parçaların ekvipolentlik əlamətinə əsasənalırıq: $\overline{OO} = \overline{MM'} \Rightarrow \left|\overline{OO}\right| = \left|\overline{MM'}\right| \Rightarrow 0 = \left|\overline{MM'}\right|$, yəni M və M' nöqtələri üst-üstə düşürlər. M nöqtəsinin qurulmasını O nöqtəsindən $\vec{a}$ *vektorunun ayrılması* adlandırırlar.

$\vec{a}$ vektorunu təmsil edən ixtiyari istiqamətlənmiş parça l düz xəttinə paralel olduqda və ya onun üzərində yerləşdikdə deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru l *düz xəttinə paraleldir*. Sıfır vektorun istənilən düz xəttə paralel olması qəbul edilir.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının paralel olduğu düz xətt vardırsa, bu halda deyirlər ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları *kollineardırlar.* Aydındır ki, heç olmasa biri sıfır vektor olan iki vektor kollineardır. $\vec{a}\|\vec{b}$ yazılışı göstərir ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear-dırlar.

Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$-kollinear vektorlardır və $\overline{AB} \in \vec{a}, \overline{CD} \in \vec{b}$. $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ eyni istiqamətlənmiş parçalar olduqda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ eyni istiqamətli, əks istiqamətlənmiş parçalar olduqda isə əks istiqamətli vektorlar adlanır. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ yazılışı $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının eyni istiqamətli olmasını, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ yazılışı isə bu vektorların əks istiqamətli olmasını ifadə edir.

İxtiyari $\vec{a}$ vektoruna baxaq və hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{BA}$ vektoru $\vec{a}$ vektoruna *əks* olan vektor adlanır və $-\vec{a}$ kimi işarə olunur. $\overrightarrow{BA}$ vektoruna əks olan vektor $\overrightarrow{AB}$ vektoru olduğundan, $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Sıfır vektora əks olan vektor sıfır vektorun özüdür.

Vektorun uzunluğu dedikdə onu təmsil edən hər hansı istiqamətlənmiş parçanın uzunluğu başa düşülür. Sıfır vektorun uzunluğu sıfra bərabərdir. $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu $|\vec{a}|$ kimi işarə olunur. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektora *vahid vektor* deyilir.

2. Vektorlar cəbrində vektorların toplanması əməli mü-hüm rol oynayır. İxtiyari $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını götürək. Hər-hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ *və* $\vec{b}$ *vektorları-nın cəmi* adlanır və belə işarə olunur: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Vektorların toplanmasının yuxarıda göstərilən qaydası *üçbucaq qaydası* adlanır. Bu qaydanı belə ifadə etmək olar: *ixtiyari A, B və C nöqtələri üçün*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

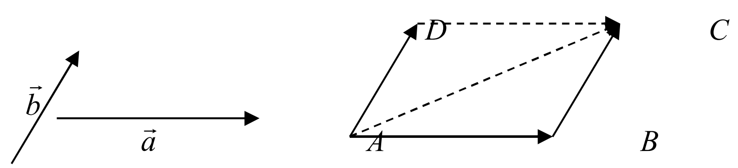
bərabərliyi doğrudur.

Üçbucaq qaydasını A, B, A nöqtələrinə tətbiq etməklə alırıq: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Analoji olaraq müəyyən edirik ki, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. Beləliklə, ixtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \qquad (2)$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \text{ və } \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}. \qquad (3)$$

Kollinear olmayan vektorların toplanması üçün digər qaydadan-*paraleloqram qadasından* istifadə oluna bilər. Şəkil 1-də $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının $\vec{c}$ cəminin bu qayda ilə qurulması göstərilmişdir.



Şəkil 1

Teorem 1. *İxtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

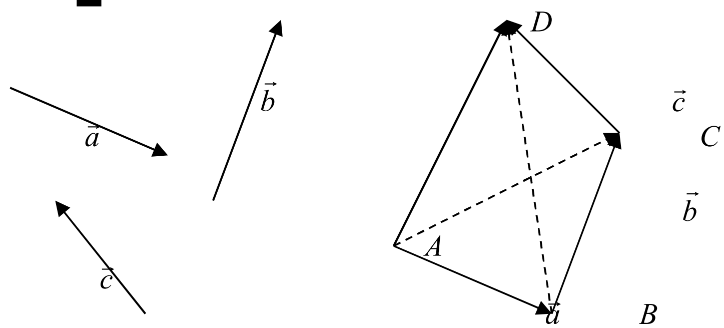
1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (yerdəyişmə xassəsi və ya kommutativ-lik xassəsi).

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ qruplaşdırma xassəsi və ya assosiativlik xassəsi).

İsbatı. 1^0. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ - ixtiyari vektorlardır. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ vektorlarını, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorunu ayıraq (şək.1). Qurmaya əsasən, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, ona görə də $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, yəni $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$. Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ və $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}, \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Beləliklə, $\vec{a}+\vec{b}$ və $\vec{b}+\vec{c}$ eyni vektordur.

2^0. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – ixtiyari vektorlardır. Hər hansı A n.qtəsini götürək və ardıcıl olaraq, $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq (şək.2). Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Bu isə o deməkdir ki, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, ona görə də $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{AD}$. Beləliklə, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ və $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ eyni vektordur.

■



$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Şəkil 2

$\vec{p}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ vektoru $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının cəmi qəbul olunur. Teorem 1-ə əsasən, $\vec{p}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. Analoji qayda ilə ixtiyari $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n\,(n>3)$ vektorlarının cəmi təyin oluna bilər.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ *vektorlarının fərqi*

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

bərabərliyini ödəyən $\vec{x}$ vektoruna deyilir. Göstərmək olur ki, ixtiyari iki vektorun fərqi vardır və birqiymətli təyin olunur.

3. $\vec{a}$ *vektorunun* λ *həqiqi ədədinə hasili* aşağıdakı şərtləri ödəyən $\vec{p}$ vektoruna deyilir:

a) $|\vec{p}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, burada $|\lambda|-\lambda$ ədədinin mütləq qiymətidir.

b) $\lambda\ge 0$ olduqda $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{a}$ və $\lambda<0$ olduqda $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

$\vec{p}$ vektorunu $\lambda\vec{a}$ kimi işarə edirlər.

a) şərtindən alınır ki, yalnız və yalnız $\lambda=0$ və ya $\vec{a}=\vec{0}$ olduqda $\vec{p}=\vec{0}$. Beləliklə, $\lambda\vec{0}=\vec{0}, \quad 0\vec{a}=\vec{0}$.

Teorem 2. *İxtiyari* λ,μ *ədədləri və* $\vec{a},\vec{b}$ *vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

2^0. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$.

3^0. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

4^0. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

İsbatı. 1^0 xassəsinin doğruluğu vektorun ədədə hasilinin tərifindən bilavasitə alınır. λ,μ ədədlərindən heç olmasa biri sıfra bərabər olduqda və ya $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda digər xassələrin də doğruluğu aşkardır. Ona görə də $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ halında $2^0, 3^0$ və 4^0 xassələri-nin doğruluğunu əsaslandırmaq yetərlidir.

2^0. Tutaq ki, $\vec{p} = \lambda(\mu\vec{a}), \vec{q} = (\lambda\mu)\vec{a}$. Vektorun ədədə hasi-linin tərifinə görə, $|\vec{p}| = |\lambda||\mu\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|, \quad |\vec{q}| = |\lambda\mu||\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|.$

Buradan alınır ki, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Göstərək ki, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. $\lambda\mu > 0$ və $\lambda\mu < 0$ mümkün halları vardır. Birinci hala baxaq. $\vec{p} = \lambda(\mu\vec{a})$ olduğundan, həmçinin λ və μ eyni işarəli ədədlər olduqlarından $\vec{p}$ və $\vec{a}$ vektorları eyni istiqamətlidirlər. Lakin $\vec{q} = (\lambda\mu)\vec{a}$ və $\vec{a}$ vektorlarının da istiqamətləri eynidir, beləliklə, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Analoji qada ilə $\lambda\mu < 0$ halında da müəyyən edirik ki, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Buradan $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ bərabərliyinə əsasən, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ olması alınır.

3^0. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorunu ayıraq. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, yəni $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Əmsalı λ ədədi olan və mərkəzi AB, BC və AC düz xəttlərinə oid olmayan müəyyən O nöqtəsində yerləşən homotetiyaya baxaq. Tutaq ki, A', B' və C' - A, B və C nöqtələrinin obrazlarıdır. Onda $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{BC}, \ \overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{AC}$ və ya $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\vec{a}, \ \overrightarrow{B'C'} = \lambda\vec{b}, \ \overrightarrow{A'C'} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$. Digər tərəfdən, üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, yəni $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

4^0. İki mümkün hala baxmaq lazımdır: a) $\lambda\mu > 0$ və b) $\lambda\mu < 0$.

a) $\lambda\mu > 0$. Müəyyən A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{a}$ vektoru-nu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \mu\vec{a}$ vektorunu ayıraq. Onda $AB = |\lambda||\vec{a}|, BC = |\mu||\vec{a}|$. $\lambda\mu > 0$ olduğuna görə, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, yəni B nöqtəsi A və C nöqtələri arasında yerləşir. Beləliklə, $AC = AB + BC$ və ya $AC = |\lambda||\vec{a}| + |\mu||\vec{a}|$. Lakin λ və μ eyni işarəli ədədlərdir, ona görə də $|\lambda| + |\mu| = |\lambda + \mu|$. Bu isə göstərir ki,

$$AC = |\lambda + \mu||\vec{a}|. \tag{4}$$

$\lambda > 0, \mu > 0$ olduqda $\overrightarrow{AC}$ və $\vec{a}$ vektorları eyni istiqamətli, $\lambda < 0, \mu < 0$, yəni $\lambda + \mu < 0$ olduqda isə əks istiqamətli vektor-lardır. Ona görə də (4) bərabərliyinə əsasən alarıq: $\overrightarrow{AC} = (\lambda + \mu)\vec{a}$. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Beləliklə, $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

$\lambda\mu < 0$ halında da 4^0 bərabərliyinin doğruluğu analoji qayda ilə əsaslandırılır.

■

Mühazirə 2

Vektorların xətti asılılığı

1. Əvvəlcə vektorların kollinearlığına dair aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 1. *Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlarsa və $\vec{a} \neq \vec{0}$ şərti ödənilirsə, onda elə yeganə α ədədi vardır ki,*

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}. \tag{1}$$

İsbatı. İlk növbədə (1) bərabərliyini ödəyən α ədədinin varlığını əsaslandıraq. $\vec{a} \| \vec{b}$ olduğundan, ya $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ya da $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Birinci halda $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ikinci halda isə $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ qəbul edək. Vektorun fdədə vurulması əməlinin tərifinə əsasən, hər iki halda (1) bərabərliyini alırıq.

İndii isə isbat edək ki, (1) şərtini ödəyən α ədədi birqiymətli təyin olunur. Fərz edək ki, α_1 elə bir həqiqi ədəddir ki, $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}$. Bu bərabərlikdən və (1) bərabərdiyindən alınır ki, $\alpha\vec{a} = \alpha_1\vec{a}$ və ya $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} = \vec{0}$. $\vec{a} \neq \vec{0}$ olduğundan, $\alpha - \alpha_1 = 0$ və ya $\alpha = \alpha_1$.

$\vec{a}$ vektoru σ müstəvisi üzərində yerləşən müəyyən düz xəttə paralel olduqda deyirlər ki, $\vec{a}$ *vektoru* ■σ *müstəvisinə para-leldir.* Aşkardır ki, σ müstəvisinə paralel olan $\vec{a}$ vektoru σ müstəvisinə paralel olan istənilən müstəviyə də paraleldir.

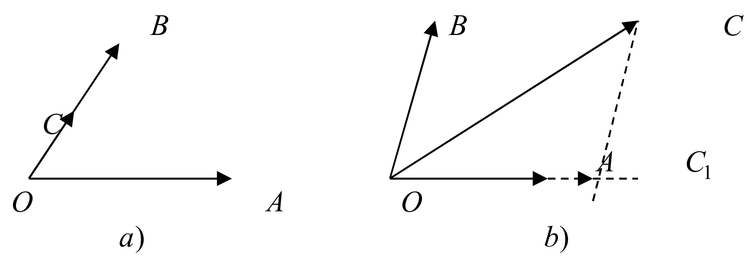
Əgər $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının paralel olduqları müstəvi vardırsa, bu halda deyirlər ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları *komplanardırlar.* Qeyd edək ki, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda bu vektorlar komplanardırlar. Doğrudan da, müəyyənlik üçün, məsələn, $\vec{c} = \vec{0}$ olduğunu fərz edək. Fəzanın hər hansı O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ vektorlarını ayıraq. O, A və B nöqtələrindən $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarına paralel olan müstəvi keçdiyindən bu vektorlar komplanardırlar.

Komplanar vektorlara dair teoremi isbat edək:

Teorem 2. Əgər $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardırsa və $\vec{a}, \vec{b}$ -kollinear olmayan vektorlardırsa, onda elə yeganə α və β ədədləri vardır ki,

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (2)$$

İsbatı. Əvvəlcə (2) bərabərliyini ödəyən α və β əgədlərinin varlığını isbat edək. Müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ vektorlarını ayıraq. Bu vektorlar komp-lanar olduqlarından O, A, B, C nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşirlər, eyni zamanda O, A, B nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmirlər ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ kollinear olmayan vektorlardır).



Şəkil 5

C nöqtəsi OB düz xətti üzərində yerləşdikdə (şək.5, a), $\overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ vektorları kollinear olurlar. Bu halda teorem 1-ə əsasən $\vec{c} = \beta\vec{b}$ və ya $\vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + \beta\vec{b}$ şərtini ödəyən β ədədi vardır, yəni (2) bərabərliyi ödənilir. C nöqtəsinin OB düz xətti üzərində yerləşmədiyi hala baxaq (şək. 5, b). OB düz xəttinə CC_1 paralel düz xəttini keçirək, burada $C_1 - OA$ düz xəttinin nöqtəsidir. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC_1}$. Lakin $\overrightarrow{OC_1} \| \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{C_1C} \| \overrightarrow{OB}$, ona görə də $\overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{a}, \overrightarrow{C_1C} = \beta\vec{b}$ bərabərliklərini ödəyən α və β ədədləri vardır. Beləliklə, $\overrightarrow{OC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, yəni (2) bərabərliyi ödənilir.

İndi isə (2) bərabərliyini ödəyən α və β ədədlərinin birqiymətli təyin olunduğunu isbat edək. Tutaq ki, α_1 və β_1 elə ədədlərdirlər ki, $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Bu bərabərlikdən və (2) bərabərliyindən alarıq: $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}$. Aşkardır ki, $\alpha - \alpha_1 = 0,\ \beta - \beta_1 = 0$. Doğrudan da, məsələn, $\alpha - \alpha_1 = 0$ oldu-ğunu fərz etsək, sonuncu vektor bərabərliyindən alarıq: $\vec{a} = \dfrac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec{b}$, bu isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmadığına görə mümkün deyil.

2. Tutaq ki,

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \qquad (3)$$

vektorlar sistemi və n sayda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ həqiqi ədədləri veril-mişdir. $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n$ vektoru verilmiş $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarının *xətti kombinasiyası* adlanır. Həmçinin deyirlər ki, $\vec{b}$ vektoru $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorları ilə *xətti ifadə olunur*.

Əgər

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0} \tag{4}$$

bərabərliyini ödəyən və heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ədədləri vardırsa, o halda deyirlər ki, (3) vektorlar sistemi *xətti asılıdır*. (4) bərabərliyi yalnız $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ olduqda ödənildiyi halda isə $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ *xətti asılı olmayan* vektorlar sistemi adlanır.

$n=1$ halında bir vektordan ibarət sistem alınır. Aşkardır ki, belə sistem yalnız sistemin vektoru sıfır vektor olduqda xətti asılıdır.

Xətti asılı olan vektorlar sisteminin bəzi xassələrini nəzər-dən keçirək.

1^0. $n>1$ *halında (3) vektorlar sisteminin xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmasa birinin sistemin qalan vektorlarının xətti kombinasiyası olmasıdır.*

Tutaq ki, (3) vektorlar sistemi xətti asılıdır. Bu o deməkdir ki, (4) bərabərliyi ödənilir və $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ədədlərindən heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Müəyyənlik üçün $\alpha_k\neq 0$ ($k-1,2,..,n$ ədədlərindən biridir) olduğunu fərz edək. (4) bəra-bərliyini

$$\vec{a}_k=-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2-\cdots-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1}-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k+1}-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n$$

şəklində yazaq. Buradan görünür ki, $\vec{a}_k$ vektoru (3) sisteminin qalan vektorlarının xətti kombinasiyasıdır.

Tərsinə, tutaq ki, (3) sistemində $\vec{a}_k$ vektoru qalan vektor-ların xətti kombinasiyasıdır:

$$\vec{a}_k=\beta_1\vec{a}_1+\cdots+\beta_{k-1}\vec{a}_{k-1}+\beta_{k+1}\vec{a}_{k+1}+\cdots+\beta_n\vec{a}_n.$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\beta_1\vec{a}_1+\cdots+\beta_{k-1}\vec{a}_{k-1}+(-1)\vec{a}_k+\beta_{k+1}\vec{a}_{k+1}+\cdots+\beta_n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Sonuncu bərabərlik (3) vektorlar sisteminin xətti asılı olduğunu göstərir ($\vec{a}_k$ vektorunun əmsalı sıfırdan fərqlidir). ■

2^0. *Alt sistemi xətti asılı olan vektorlar sistemi xətti asılıdır.*

Tutaq ki, (3) vektorlar sistemi verilmişdir və $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_l$ $(l<n)$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. Deməli, heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_l$ ədədləri vardır ki,

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_l\vec{a}_l=\vec{0}.$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı kimi də yaza bilərik:

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_l\vec{a}_l+0\vec{a}_{l+1}+\cdots 0\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Beləliklə , (3) vektorlar sistemi də xətti asılıdı■

3^0. *Xətti asılı olmayan vektorlar sistemində sıfır vektor yoxdur.*

4^0. *Xətti asılı olmayan vektorlar sisteminin istənilən alt sistemi xətti asılı deyil.*

3^0 xassəsinin doğruluğu 2^0 xassəsindən bilavasitə alınır, 4^0 xassəsinin doğruluğu isə əksini fərz etmə ilə asanlıqla əsaslandırılır.

3. Vektorların xətti asılılığının həndəsi mahiyyətini izah edən teoremləri qeyd edək.

Teorem 3. *$\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi yalnız və yalnız bu vektorlar kollinear olduqda xətti asılıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. 1^0 xassəsinə görə bu vektorlardan heç olmasa biri digəri ilə xətti ifadə olunur. Müəyyənlik üçün $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ olduğunu qəbul edək. Buradan görünür ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar.

Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. $\vec{a}=\vec{0}$ olduqda 3^0 xassəsinə görə $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. $\vec{a}\neq\vec{0}$ olduqda isə teorem 1-ə əsasən, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. Buradan $\alpha\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$ bərabərliyi alınır, yəni $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır.

■

Teorem 4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorlar sistemi yalnız və yalnız bu vektorlar komplanar olduqda xətti asılıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0},$$

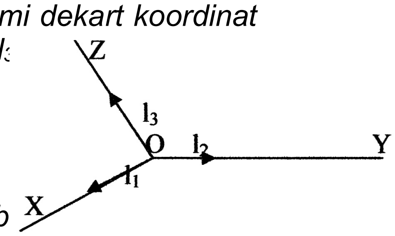
burada α,β,γ əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Göstərək ki, $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardırlar. α, β və ya γ əmsallarından heç olmasa biri sıfra bərabər olduqda hökmün doğruluğu aşkardır. Doğrudan da, məsələn, $\gamma=0$ olursa, onda $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ və teorem 3-ə görə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear-dırlar. Bu isə $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olması deməkdir. $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$ halına baxaq.

Müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{a}$ vektorunu, sonra isə A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\beta\vec{b}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ olduğundan, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\overrightarrow{OB}.$ Digər tərəfdən, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=-\gamma\vec{c}$, ona görə də $\overrightarrow{OB}=-\gamma\vec{c}$. O,A və B nöqtələrindən σ müstəvisi keçir. $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\gamma\neq 0$ olduğundan, $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\beta\vec{b}$ və $\overrightarrow{OB}=-\gamma\vec{c}$ bərabərliklərindən alınır ki, $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları σ müstəvisinə paraleldirlər və ona görə də komplanardırlar.

Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları komplanardırlar. Əgər $\vec{a}\|\vec{b}$ olarsa, onda teorem 3-ə əsasən, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdırlar və 2^0 xassəsinə görə $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmadıqda isə teorem 2-yə əsasən, $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Buradan 1^0 xassəsinə əsasən $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektor-lar sisteminin xətti asılı olması alınır.

■ *III Mühazirə*
Fəzada afin və düzbucaqlı koordinat sistemləri. Parçanın verilən nisbətdə bölünməsi.

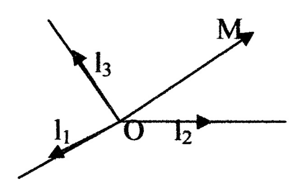
1. Tutaq ki, fəzanın ixtiyari O nöqtəsi və ixtiyari l_1, 1_2,1_3 bazisi verilmişdir. O nöqtəsindən və l_1, 1_2,1_3 bazisindən ibarət olan dördlüyə fəzada ümumi dekart koordinat sistemi və ya afin koordinat sistemi deyilir və $Ol_1l_2l_3$ və ya (O,l_1,l_2,l olunur (şəkil 1).



O nöqtəsi koordinat başlanğıcı, l_1,l_2 və l_3- koordinat vektorları adlanır. Koordinat başlanğıcından keçən, koordinat vektorlarına paralel olan və üzərində müsbət istiqamət təyin olunmuş düz xəttlərə koordinat oxları deyilir. l_1,l_2 və l_3 vektorlarına paralel olan oxlara uyğun olaraq ab ordinat, aplikat oxları deyilir və Ox, Oy, Oz kimi işarə olunur.
Ox və Oy, Ox və Oz, Oy və Ox, Oy və Oz oxları ilə təyin olunan müstəvilərə

şəkil 1.

koordinat müstəviləri deyilir və Oxy, Oxz, Oyz kimi işarə olunur. $Ol_1l_2l_3$ koordinat sistemi bəzən Oxyz kimi də işarə olunur. Fəzanın ixtiyari M nöqtəsini götürək. OM radius-vektorunun l_1, l_2, l_3 bazisindəki x, y, z koordinatları M nöqtəsinin $Ol_1l_2l_3$ koordinat sistemindəki koordinatları adlanır və M(x,y,z) kimi işarə olunur. X ədədi absis, Y ədədi ordinat, Z ədədi aplikat adlanır (şəkil 2).
Beləliklə, OM=xe_1+ye_2+ze_3.



Ümumi dekart koordinat sistemində verilmiş $M_1(x_1,y_1,z_1)$

şəkil 2.

və $M_2(x_2,y_2z_2)$ nöqtələri üçün M_1M_2 vektorunun koordinatları belə hesablanır;
$M_1M_2=OM_2-OM_1= =x_2e_1+y_2e_2+z_2e_3- (x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3) = (x_2-x_1)e_1+(y_2-y_1)e_2+ (z_2-z_1)e_3.$
Deməli, M_1M_2 vektorunun $M_1M_2(x_2-x_1,$ y_2-y_1, $z_2-z_1)$ koordinatları vardır.

Digər tərəfdən, M_1M_2 parçasını λ nisbətində bölək ($\lambda \neq -1$). M nöqtəsinin koordinatlarını hesablamaq

üçün $OM = \frac{OM_1 + \lambda OM_2}{1+\lambda}$ *bərabərliyindən istifadə olunur. Bu bərabərliyə əsasən müəyyən edirik ki,*

M nöqtəsinin x, y, z koordinatları $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ *düsturları ilə hesablanır.*

Xüsusi halda, M_1M_2 parçasının orta noqtəsinin (λ=1) $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ *koordinatları vardır.*

I_1, I_2, I_3 bazisi ortonormal bazis olduqda $OI_1I_2I_3$ düzbucaqlı dekart və ya sadəcə düzbucaqlı koordinat sistemi adlanır. Düzbucaqlı koordinat sistemi adətən Ojik kimi işarə olunur, burada $i^2=j^2=k^2=I$, $ij=ik=jk=0$.

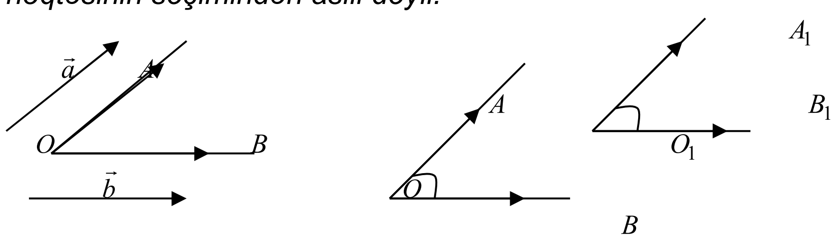
Oijk düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş $M_1(x_1,y_1,z_1)$ və $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nöqtələri

arasındakı məsafə $M_1M_2 = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ *düsturu ilə hesablanır.*

IV Mühazirə

Vektorların skalyar hasili

1. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ sıfırdan fərqli vektorlardır. İxtiyari O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarını ayırıb OA və OB şüalarına baxaq (şək. 8, a). $\vec{a}$ və $\vec{b}$ *vektorları arasındakı bucaq* dedikdə OA və OB şüaları üst-üstə düşmədiyi halda bu şüalar arasındakı bucaq, yəni AOB bucağı başa düşülür. OA və OB şüaları üst-üstə düşdükdə isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağın sıfra bərabər olması qəbul edilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq $(\vec{a}, \vec{b})$ kimi işarə olunur. Tərəfləri eyni istiqamətli olan bucaqlar bərabər olduğundan (şək. 8, b), *verilmiş vektorlar arasındakı bucaq O nöqtəsinin seçimindən asılı deyil.*



a) b)

Şəkil 8

$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ olduqda sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına *qarşılıqlı perpendikulyar vektorlar* deyilir. Bu halda $\vec{a} \perp \vec{b}$ yazılır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa birinin sıfır vektor olması halında $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ olduğunu qəbul edirik. Buradan aydın olur ki, sıfır vektor istənilən vektora perpendikulyardır. Beləliklə, istə-nilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün $0 \le (\vec{a}, \vec{b}) \le \pi$.

İki vektorun uzunluqlarının onlar arasındakı bucağın kosinusuna hasilinə bu vektorların skalyar hasili deyilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili $\vec{a}\cdot\vec{b}$ və ya $\vec{a}\vec{b}$ kimi işarə olunur. Beləliklə, tərifə əsasən,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right). \tag{1}$$

Bu düsturdan görünür ki, *yalnız və yalnız* $\vec{a}\perp\vec{b}$ *olduqda* $\vec{a}\vec{b}=0$. Bu nəticə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda da doğrudur.

(1) düsturundan alınır ki, $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. $\vec{a}\vec{a}$ ədədi $\vec{a}$ vektoru-nun *skalyar kvadratı* adlanır və $\vec{a}^2$ kimi işarə olunur. Beləliklə,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{2}$$

2. İki vektorun skalyar hasilini onları koordinatlarına görə təyin etməyə imkan verən aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilmiş* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ *vektorlarının skalyar hasili*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{3}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

İsbatı. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduğu halda (3) bərabərliyinin doğruluğu aşkardır. Ona görə də $\vec{a}\neq\vec{0}$ və $\vec{b}\neq\vec{0}$ halına baxmaq kifayətdir.

Əvvəlcə fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. Hər hansı O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ və $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlarını ayıraq və OAB üçbucağına baxaq. Kosinuslar teoreminə görə $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cos\alpha$, burada $\alpha = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ olduğundan sonuncu bərabərliyi belə yaza bilərik:

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}^2\right| - \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2\right). \tag{4}$$

$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\left(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3\right)$ olduğundan, $\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 = (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2$. Analoji mühakiməyə görə

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,\ \left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2. \tag{5}$$

Bu qiymətləri (4) düsturunda yerinə yazıb, müvafiq elementar çevirmələri aparsaq, (3) düsturunu alarıq.

İndi isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinear olduğunu qəbul edək. Koolinear vektorlara dair teoremə əsasən elə λ ədədi vardır ki, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Bu isə o deməkdir ki,

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3. \tag{6}$$

Skalyar hasilin tərifinə əsasən $\vec{a}\vec{b} = \left(\lambda\vec{b}\right)\vec{b} = \left|\lambda\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\lambda\vec{b},\vec{b}\right)$. Bura-dan alınır ki, istənilən λ ədədi üçün: $\vec{a}\vec{b} = \lambda\left|\vec{b}\right|^2$. Bilirik ki, $\left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, ona görə də

$$\vec{a}\vec{b} = \lambda\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) = (\lambda b_1)b_1 + (\lambda b_2)b_2 + (\lambda b_3)b_3.$$

Sonuncu bərabərlikdə (6) şərtlərindən istifadə etsək, (3) düsturunu alarıq. ■

Nəticə 1. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilən* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ *vektorları yalnız və yalnız*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

olduqda qarşılıqlı perpendikulyardırlar.

Nəticə 2. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilən sıfırdan fərqli* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ *vektorları arasında qalan bucağın kosinusu*

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (7)$$

düsturu ilə hesablanır.

Doğrudan da, (1) düsturuna görə $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Bu bərabərlikdə $\vec{a}\vec{b}, |\vec{a}|$ və $|\vec{b}|-$nin (3) və (5) düsturlarından olan qiy-mətlərini yerinə yazsaq, (7) düsturunu ■ alarıq.

3. Aşağıdakı teorem vektorların skalyar hasili əməlinin əsas xassələrini ifadə edir.

Teorem 2. *İxtiyari* α *və* β *ədədləri və ixtiyari* $\vec{a},\vec{b}$ *və* $\vec{c}$ *vektorları üəün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

2^0. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$ və $\vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$.

3^0. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

İsbatı. Ortonormallaşdırılmış $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisini seçək və verilmiş vektorların $\vec{a}(a_1,a_2,a_3), \vec{b}(b_1,b_2,b_3), \vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ koordi-natlarını daxil edək. Bərabərliklərdən birini, məsələn 3^0 bərabər-liyini isbat edək, qalanları eyni qayda ilə isbat olunur. $(\vec{a}+\vec{b})(a_1+b_1, a_2+b_2, a+b_3)$ olduğundan, (3) dusturuna əsasən, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_2+b_2)c_2 = (a_1c_1 + a_2c_2 +$
$+ a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$. ■

Nəticə 3. *İxtiyari* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *və* $\vec{c}$ *vektorları üçün*

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}$$

bərabərliyi doğrudur.

4. Skalyar hasildən istifadə edərək, ortonormallaşdırılmış bazisdə vektorun koordinatlarının həndəsi mənasını izah edək. Tutaq ki, $\vec{a}-$ortonormallaşdırılmış $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisində $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ koordinatları ilə verilmiş sıfırdan fərqli vektordur. Bu o demək-dir ki, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini ardıcıl olaraq $\vec{i},\vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorlarına skalyar vuraq və $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$ şərtlərini nəzərə alaq: $a_1 = \vec{a}\vec{i}, a_2 = \vec{a}\vec{j}, a_3 = \vec{a}\vec{k}$. Əgər $\varphi_1 = (\vec{a},\vec{i}), \varphi_2 = (\vec{a},\vec{j}), \varphi_3 = (\vec{a},\vec{k})$ işarə etsək, onda sonuncu düsturları bu şəkildə yaza bilərik:

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi_1,\ a_2 = |\vec{a}|\cos\varphi_2,\ a_3 = |\vec{a}|\cos\varphi_3. \qquad (8)$$

$\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3$ ədədləri $\vec{a}$ vektorunun $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazi-sində *yönəldici kosinusları* adlanır. (8) düsturlarından alınır ki, *vektorun hər bir koordinatı bu vektorun uzunluğunun uyğun yönəldici kosinusa hasilinə bərabərdir.*

a_1, a_2, a_3 koordinatlarının (8) düsturlarından olan qiymət-lərini (5)-in 1-ci düsturunda nəzərə alaq:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3)$$

və ya $|\vec{a}| \neq 0$ şərtinə əsasən,

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

Beləliklə, *istənilən sıfırdan fərqli vektorun yönəldici kosinuslarının kvadratları cəmi vahidə bərabərdir.*

V Mühazirə

Müstəvinin oriyentasiyası

L alt fəzasının bütün bazisləri çoxluğunu **B** ilə işarə edək. $A|B>0$ olduqda deyəcəyik ki, $A,B\in$ **B** bazisləri Δ münasibətindədirlər (eyni oriyentasiyaya malikdirlər). Bu halda $A\Delta B$ yazılışından istifadə edəcəyik. İsbat edək ki, *L alt fəzasının bütün bazislərinin* **B** *çoxluğunda Δ münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.*

1) İstənilən A bazisi üçün: $A\Delta A.$ Bu nəticə 1^0 xassəsindən alınır.

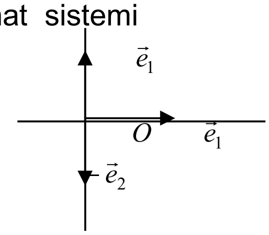
2) Əgər $A\Delta B$ olarsa, onda $B\Delta A.$ Doğrudan da, $A\Delta B\Rightarrow \quad \Rightarrow A|B>0.$ Lakin 3^0 xassəsindən alınır ki, $B|A=\dfrac{1}{A|B}>0$, ona görə də $B\Delta A.$

3) Əgər $A\Delta B$ və $B\Delta C$ olarsa, onda $A\Delta C.$ Doğrudan da, $A\Delta B\Rightarrow A|B>0,\quad B\Delta C\Rightarrow B|C>0.$ 2^0 xassəsinə əsasən, $A|C= \;=\left(A|B\right)\left(B|C\right)>0,$ yəni $A\Delta C.$

İsbat edək ki, **B** $/\Delta$ faktor-çoxluğu yalnız iki elementdən ibarətdir. Bundan ötrü $A=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)$ və $B=\left(\vec{a}_2,\vec{a}_1\right)$ bazislərinə baxaq. $A|B=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$ olduğundan, K_A və K_B ekvivalentlik sinifləri üst-üstə düşmürlər. Yoxlamaq olur ki, ixtiyari $C=\left(\vec{c}_1,\vec{c}_2\right)$ bazisi ya K_A sinfinə, ya da K_B sinfinə daxildir. Doğrudan da, 2^0 xassəsinə görə $A|C=\left(A|B\right)\left(B|C\right).$ Lakin $A|B=-1,$ ona görə də $A|C=-B|C.$ Buradan alınır ki, ya $A|C>0,$ ya da $B|C>0.$ Birinci halda $C\in K_A,$ ikinci halda isə $C\in K_B$ olur.

B $/\Delta$ faktor-çoxluğunun elementlərindən hər birinə L vektor alt fəzasının *oriyentasiyası* deyilir. Bu oriyentasiyalardan birini seçək və onu *müsbət oriyentasiya* (digərini isə-*mənfi oriyentasiya*) adlandıraq. Müsbət oriyentasiyanın seçildiyi L vektor alt fəzasına *oriyentasiya olunmuş* alt fəza deyilir. Müsbət oriyentasiyalı bazislər *sağ* bazislər, mənfi oriyentasiyalı bazislər isə *sol* bazislər adlanır.

Vektorlarının alt fəzası oriyentasiya olunmuş müstəviyə *oriyentasiya olunmuş* müstəvi deyilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisi sağ bazis olduqda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemi *sağ*, sol bazis olduqda isə *sol* koordinat sistemi adlanır. Şəkil 1-də $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ - sağ koordinat sistemi, $O\vec{e}_1(-\vec{e}_2)$ – sol koordinat sistemidir. Ümumiyyətlə, koordinat sistemlərinin təsviri zamanı sağ koordinat sisteminə elə koordinat sistemi aid edilir ki, onun Ox və Oy oxları sağ əlin açılmış ovucuna baxdıqda baş və şəhadət barmaqları kimi yerləşmiş olsunlar.



Şəkil 1

VI Mühazirə
Fəzada afin və düzbucaqlı koordinat sistemlərinin çevrilməsi.

2. Koordinatları ilə verilmiş üc vektorun komplanarlıq əlamətini ifadə edən aşağıdakı teorem doğrudur:

<u>Teorem:</u> İxtiyari $l_1, 1_2, l_3$ bazisində koordinatları ilə verilmiş $a_1(a_1,a_2,a_3)$, $b_1(b_1,b_2,b_3)$, $c_1(c_1,c_2,c_3)$

vektorlarının komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0$$

bərabərliyin ödənilməsidir. (2)

İsbatı. *Tutaq ki,* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *və* $\vec{c}$ *komplanardırlar. Onda bu vektorlar xətti asılıdırlar, yəni eyni vaxtda sıfıra bərabər olmayan elə* α, β, γ *ədədləri vardır ki,* $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$ *(3)*

Bu bərabərliyi koordinatlarala yazaq: $\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0,\quad \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0,\quad \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0$ *(4)*

Beləliklə, (2) bərabərliyinin sol tərəfindəki Δ determinantının sütunları xətti asılıdır. Bu isə $\Delta=0$*, yəni (2) bərabərliyinin ödənilməsi deməkdir.*

Tərsinə, tutaq ki, (2) bərabərliyi ödənilir. Onda Δ determinantının sütunları xətti asıhdır, yəni (4)

bircins tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həlləri vardır. (4) bərabərlikləri uyğun olaraq, $l_1, 1_2, l_3$ *vektorlarına vurub toplasaq, (3) bərabərliyini alarıq. Deməli,* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *və* $\vec{c}$ *vektorları xətti asılıdırlar, ona görə də komplanardırlar. Teorem isbat olundu.*

Müəyyən nizamla götürülmüş komplanar olmayan ixtiyari üç vektor üç-ölçülü V vektor fəzasının bazisi əmələ gətirdiyindən V fəzasında sonsuz sayda bazislər vardır. Bu bazislərdən ikisini göstərək:

$A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ *və* $B(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$*. B bazisinin vektorlarını A bazisinin vektorları üzrə ayıraq:*

$$\vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2 + c_{31}\vec{a}_3,\qquad \vec{b}_2 = c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 + c_{32}\vec{a}_3,\qquad \vec{b}_3 = c_{13}\vec{a}_1 + c_{23}\vec{a}_2 + c_{33}\vec{a}_3$$

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ *və* $\vec{b}_3$ *vektorlarının koordinatlarından düzələn üç tərtibli*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

matrisinə baxaq. (5) matrisi A bazisindən B bazisinə keçid matrisi deyilir. Keçid matrisinin determinantını

A|B kimi işarə edək. Beləliklə, $A \mid B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \mid (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ *vektorları xətti asılı olmadığından isbat etdiyimiz teoremə görə* $A \mid B$ a $\neq 0$

Fəzanın ixtiyari A, B və C bazisləri üçün aşağıdakı bərabərliklər ödənilir:

1. $A|A = 1$;
2. $(A|B)(B|C) = A|C$;
3. $(A|B)(B|A) = 1$

Fəzanın bütün bazisləri çoxluğunu β ilə işarə edək. $A|B > 0$ olduqda deyirki, A, B βbazisləri Δ münasibətindədirlər (və ya eyni oriyentasiyaya malikdirlər). 1-3 xassələrindən bilavasitə alınır ki, Δ münasi-bəti β çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. Göstərək ki, β|Δ faktor- çoxluğu yalnız iki elementdən ibarətdir. Bundan ötrü $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ və $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ bazisləri götürək. $A|B=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = -1$ olduğundan, K_A və K_B ekvivalentlik sinifləri üst-üstə düşmürlər. Digər tərəfdən, ixtiyari $C=(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ bazisi üçün 2 xassəsinə görə,
$A|C=(A|B)(B|C)=-B|C$. Buradan alınır ki, ya $A|C > 0$, ya da $B|C > 0$. Birinci halda $C \in K_A$, ikinci halda isə $C \in K_B$ olur.

$B|\Delta$ fakor-çoxluğunun elementlərindən hər birinə V vektor fəzasının oriyentasiyası deyilir. Bu oriyentasiyalarından birini seçək və onu sağ oriyentasiya (digərini isə sol oriyentasiya) adlandıraq. Müsbət oriyentasiyanın seçildiyi V vektor fəzasına oriyentasiya olmuş vektor deyilir. Müsbət oriyentasiyalı bazislər sağ bazislər, mənfi oriyentasiyalı bazislər isə sol bazislər adlanır.

Tutaq ki, V-E_3 evklit fəzasına uyğun olan vektor fəzadır (yəni onun yönəldici vektor fəzasıdır). V oriyentasiya olunmuş vektor fəza olduqda deyirlər ki, E_3 fəzası oriyentasiya olunmuşdur. Bu halda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sağ (sol) bazis olduqda $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ koordinat sistemi sağ (sol) koordinat sistemi adlanır. Adətən fəzanın oriyentasiyası elə seçilir ki, Oxyz sağ koordinat sisteminin Ox, Oy, Oz oxları sağ əlin baş şahədət və orta barmaqları boyunca yönəlmiş olsunlar.

3. Tutaq ki, fəzada iki $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ və $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ afin koordinat sistemləri verilmişdir. Bu koordinat sistemlərini köhnə və yeni koordinat sistemləri adlandıraq. Tutaq ki, M-fəzanın ixtiyari nöqtəsi olub, köhnə və yeni koordinat sistemlərindən də x,y,z və x', y', z' koordinatlarına malikdir. Yeni koordinat sisteminin başlanğıcının və bazis vektorlarının köhnə koordinat sistemindəki $O'(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{e}'(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{e}'(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{e}'(c_{13}, c_{23}, c_{33})$ koordinatlarını bilərək x, y, z koordinatlarını x', y', z' koordinatları ilə ifadə edək.

Verilənlərə görə,

$$\overline{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 \qquad \vec{e}'_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3, \qquad (6)$$

$$\vec{e}'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3, \qquad \vec{e}' = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3,$$

Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$, ona görə də $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \overline{OO'} + x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$. Bu bərabərliyin sağ tərəfində (6) ayrılışlarını nəzər alıb, hər iki tərəfdəki uyğun əmsalları müqayisə etsək, yaza bilərik:

$$x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + x_0, \quad y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \quad z = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + z_0 \qquad ($$

(7) düsturlarına fəzada afin çevirmə düsturları deyilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorları komplanar olmadığından

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix} \qquad (8)$$

Matrisinin Δ determinantı sıfırdan fərqlidir. Ona görə də (7) sistemi x', y', z' *koordinatlarına nəzərən həll olunandır. (7) düsturlarından xüsusi hal kimi koordinat başlanğıcının köçürülməsi, yeni* $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ *sistemindən* $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *sisteminə keçid zamanı koordinatların çevirmə düsturları alınır.* $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$

Digər tərəfdən yeni $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ *koordinat sistemi köhnə* $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *koordinat sistemindən yalnız koordinat vektorları ilə fərqləndikdə (koordinat vektorlarının əvəz olunması), (7) düsturları belə yazılır:*

$$x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' , \qquad y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' , \qquad z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'$$

.

$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *düzbucaqlı koordinat sistemindən* $O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ *düzbucaqlı koordinat sisteminə keçid zamanı (7) düsturların-dan istifadə oluna bilər. Lakin bu halda (8) keçid matrisinin üzərinə əlavə şərtlər qoyulur. Bu şərtlər aşağıdakılardır: C matrisinin hər bir sətrinin elementlərinin kvadratları cəmi vahidə bərabərdir və iki müxtəlif sətrinin uyğun elementlərinin hasilləri cəmi sıfıra bərabərdir.*

Belə xassələrə malik olan C kvadrat matrisinə ortoqonal matris deyilir. Məsələn:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

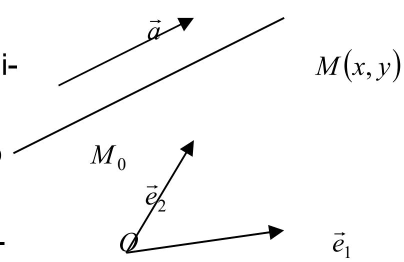
ortoqonal matrislərdir. Qeyd edək ki, ortoqonal C matrisinin Δ determinantı $\Delta^2 = 1$ *şərtini ödəyir, yəni* $\Delta = \pm 1$. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *və* $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ *bazisləri eyni oriyentasiyalı olduqda* $\Delta = 1$, *əks oriyentasiyalı olduqda isə* $\Delta = -1$ *olur.*

VII Mühazirə

Müstəvi üzərində düz xətt tənlikləri. Düz xəttinümumi tənliyi. Düz xəttə nəzərən yarımmüstəvilər

1. Verilmiş düz xəttə paralel olan istənilən vektor onun *yönəldici,* yaxud *istiqamətverici vektoru* adlanır. Düz xəttin vəziyyəti bu düz xəttin yönəldici vektorunun və müəyyən nöqtəsi-nin, yaxud iki nöqtəsinin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur.

Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemi seçilmişdir və bu sistemdə d düz xəttinin müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin və yönəldici $\vec{a}(a_1 a_2)$ d vektorunun koordinatları məlumdur (şək. 19). d düz xəttinin tənliyini yazaq. Aşkardır ki, $M(x,y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorları kollinear olduqda d düz xəttinə aid olar. $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemində $(x - x_0, y - y_0)$ koordinatları olduğundan, $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorlarının kollinearlıq şərtini belə yaza bilərik:



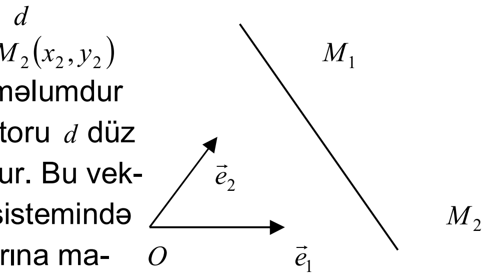
Şəkil 19

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 \\ y - y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

M nöqtəsi d düz xətti üzərində yerləşdikdə onun koordinatları (1) tənliyini ödəyirlər və bu nöqtə d düz xətti üzərində yerləşmədikdə isə onun koordinatları (1) tənliyini ödəmirlər, ona görə də (1) tənliyi d düz xəttinin tənliyidir. (1) tənliyini bu şəkildə də yazmaq olar:

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

2. İki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində d düz xəttinin $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrinin koordinatları məlumdur (şək. 20). Onda $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Bu vektor $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ koordinatlarına malikdir. Ona görə də (1) düsturuna əsasən d düz xəttinin tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:



Şəkil 20

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

$x_2 - x_1 \neq 0$ və $y_2 - y_1 \neq 0$ olduqda (3) tənliyini bu şəkildə də yazmaq olar:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

3. Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemi seçilmiş və *ordinat oxunu kəsən* d düz xətti verilmişdir. Əgər $\vec{a}(a_1, a_2)$- d düz xəttinin yönəldici vektorudursa, onda $\vec{a}$ və $\vec{e}_2$ kollinear olmayan vektorlardır, ona görə də $a_1 \neq 0$. $k = \frac{a_2}{a_1}$ ədədi d *düz xəttinin bucaq əmsalı adlanır.* Göstərək ki, bucaq əmsalı düz xəttin yönəldici vektorunun seçimindən asılı deyil. Doğrudan da, əgər $\vec{b}(b_1, b_2)$ d düz xəttinin digər yönəldici vektorudursa, onda $\vec{a} \| \vec{b}$ və ona görə də $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatları mütənasibdirlər: $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$. Buradan $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ şərtlərinə əsa-sən alarıq: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda b_2}{\lambda b_1} = \frac{b_2}{b_1}$.

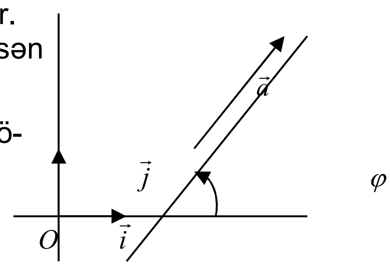
d düz xətti $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemində veril-dikdə k bucaq əmsalı daha sadə həndəsi mənaya malik olur. Doğrudan da, tutaq ki, $\vec{a}(a_1, a_2)$ – bu düz xəttin yönəldici vektorudur. Onda § 6-dakı teorem 1-ə əsasən

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi, a_2 = |\vec{a}|\sin\varphi,$$

burada $\varphi = (\vec{i} \wedge \vec{a})$ (şək. 21). Ona görə də

$$k = \frac{|\vec{a}|\sin\varphi}{|\vec{a}|\cos\varphi} = tg\varphi.$$

Beləliklə, k ədədi $\varphi = (\vec{i} \wedge \vec{a})$ istiqamətlənmiş bucağını təyin etməyə imkan verir.



Şəkil 21

Tutaq ki, k - $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində verilmiş d düz xəttinin bucaq əmsalıdır. Aşkardır ki, koordinatları $k = \frac{p_2}{p_1}$ bərabərliyini ödəyən istənilən sıfırdan fərqli $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Ona görə də k ədədi məlum olduqda d düz xəttinin istiqamətini və bu düz xəttin hər hansı M_0 nöqtəsi verildikdə isə onun vəziyyətini təyin etmək mümkündür.

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və k bucaq əmsalı ilə verilən düz xəttin tənliyini yazaq. Tutaq ki, $\vec{a}(a_1, a_2)-$ düz xəttin yönəldici vektorudur. (2) düsturuna əsasən düz xəttin tənliyi $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$ şəklindədir. Buradan a_1 ədədinə bölməklə alarıq:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (5)$$

Əgər $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi olaraq d düz xəttinin ordinat oxu ilə $B(0, b)$ kəsişmə nöqtəsini götürsək, onda (5) tənliyi belə yazılır:

$$y = kx + b. \qquad (6)$$

(6) tənliyi *düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi* adlanır. Qeyd edək ki, ordinat oxunu kəsən istənilən düz xəttin tənliyini (6) şəklində yazmaq olar.

4. Müstəvi üzərində hər hansı $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini seçək . Tutaq ki, d - yönəldici vektoru $\vec{a}(a_1, a_2)$ vek-toru olan və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xəttdir. $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ olduqda, yəni müəyyən t ədədi üçün $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ bərabərliyi ödənildikdə d düz xəttinə aid olur. Bu münasibəti koordinatlarla $x - x_0 = ta_1, y - y_0 = ta_2$ və ya

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1, \\ y &= y_0 + ta_2. \end{aligned} \qquad (7)$$

şəklində yaza bilərik. Bu bərabərliklər *düz xəttin parametrik tənlikləri,* t isə onun *parametri* adlanır. (7) parametrik tənliklə-rinin mahiyyəti aşağıdakılardan ibarətdir: istənilən t ədədi üçün x, y koordinatları (7) şərtlərini ödəyən nöqtə d düz xəttinin üzərində yerləşir. Tərsinə, əgər $(x, y) - d$ düz xəttinin nöqtəsidir-sə, onda (7) bərabərliklərini ödəyən t ədədi vardır.

5. Yuxarıdakı mühakimələr göstərir ki (bax (2) tənliyi), istənilən düz xəttin afin koordinat sistemində tənliyi bir dərəcəli tənlikdir, yəni

$$Ax + By + C = 0 \qquad (9)$$

şəklində yazıla bilər, burada A və B eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ədədlərdir.

Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək.

Teorem 1. *Afin koordinat sistemində* (9) *bir dərəcəli tənliyi ilə verilən xətt düz xəttdir.* $(-B, A)$ *vektoru bu düz xəttin yönəldici vektorudur.*

İsbatı. Tutaq ki, $\gamma -$(9) tənliyi ilə verilən düz xəttdir, $M_0(x_0, y_0)$ isə onun müəyyən nöqtəsidir. Bu o deməkdir ki, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (9) tənliyini ödəyirlər:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (10)$$

C əmsalını (10) bərabərliyindən təyin edib, (9) tənliyində yerinə yazmaqla, γ xəttinin $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ və ya $A(x - x_0) - \; -(-B)(y - y_0) = 0$ şəklində tənliyini alırıq. Bu tənlik (2) şəklində olan tənlikdər, ona görə də $M_0(x_0, y_0)$ keçən və yönəldici vektoru $\vec{a}(-B, A)$ olan düz xətti təyin e[redacted]r.

Beləliklə afin koordinat sistemində istənilən bir dərəcəli (9) tənliyi düz xətt təyin edir. (9) tənliyinə *düz xəttin ümumi tənliyi* deyilir. Düz xəttin ümumi tənliyinin xüsusi hallarını qeyd edək.

1) $C = 0$ olduqda $O(0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (9) tənliyini ödəyirlər, ona görə də düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. Tərsinə, düz xətt koordinat başlanğıcından keçdiyi halda $C = 0$ olur. Beləliklə, *(9) düz xətti yalnız və yalnız* $C = 0$ *olduqda koordinat başlanğıcından keçir.* Bu halda düz xəttin tənliyi $Ax + By = 0$ şəklində olur.

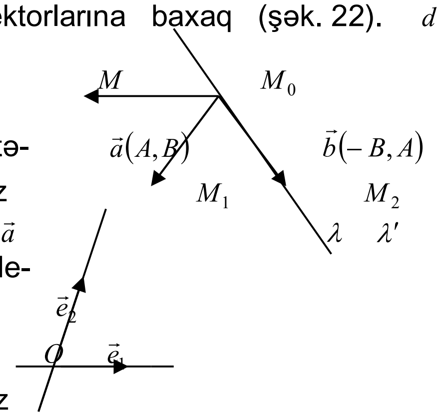
2) $A = 0$ olduqda düz xəttin yönəldici $\vec{a}(-B, 0)$ vektoru $\vec{e}_1$ koordinat vektoruna kollinear olur, bu isə $\vec{e}_1$ vektorunun düz xəttə paralel olması deməkdir. Tərsinə, əgər

$\vec{a} \| \vec{e}_1$ olarsa, onda $\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A = 0.$ Beləliklə, $\vec{e}_1$ *vektoru yalnız və yalnız* $A = 0$ *olduqda (9) düz xəttinə paralel olur.* Bu halda düz xəttin tənliyi $By + C = 0$ və ya $y = b$ şəklində olur, burada $b = -\dfrac{C}{B}$.

$A = 0, B \neq 0$ olduqda, (9) düz xətti koordinat başlanğıcın-dan keçmir və ona görə də Ox oxuna paralel olur; $A = C = 0$ olduqda isə düz xətt Ox oxuna paralel olur və tənliyi $y = 0$ şəklində yazılır.

3) Analoji olaraq $\vec{e}_2$ vektoru yalnız və yalnız $B = 0$ olduqda (9) tənliyinə paralel olur. $B = 0, C \neq 0$ olduqda düz xətt Oy oxuna paraleldir və $B = C = 0$ olduqda isə Oy oxu ilə üst-üstə düşür və tənliyi $x = 0$ şəklində yazılır.

6. Müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini daxil edək və bu sistemdə (9) tənliyi ilə verilən d düz xəttinə baxaq. d düz xətti müstəvinin həin düz xəttə aid olmayan nöqtələr çoxluğunu iki yarımmüstəviyə ayırır. Bu yarımmüstəviləri təyin edən şərtləri müəyyənləşdirək. d düz xətti üzərində müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsini qeyd edərək $\vec{a}(A, B)$ və $\vec{b}(-B, A)$ vektorlarına baxaq (şək. 22). $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0$ olduğundan, bu vektorlar sağ bazis təyin edirlər. $\vec{b}$ vektoru d düz xəttinə paralel olduğundan $\vec{a}$ vektoru bu düz xəttə paralel deyil. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını M_0 nöqtəsindən ayıraq: $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{M_0M_2} = \vec{b}$. Sərhəddi d düz xətti olan və M_1 nöqtəsini özündə saxlayan yarımmüstəvini λ ilə işarə edək (şək. 22).



Şəkil 22

Aşkardır ki, $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\vec{a}, \vec{b}$ və $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$ bazislərinin oriyentasiyaları eyni olduqda, yəni $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$ bazisi sağ oriyentasiyaya malik olduqda λ yarımmüstəvisi üzərində yerləşir. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ və $\vec{b}(-B, A)$ oldu-ğundan $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$ bazisi yalnız və yalnız $\begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} > 0$ və ya $Ax + By - (Ax_0 + By_0) > 0$ bərabərsizliyi ödənildikdə sağ oriyentasiyaya malik olur. $M_0 \in d$ olduğundan, $Ax_0 + By_0 + C = 0$ və ya $C = -(Ax_0 + By_0)$. Ona görə də yuxarıdakı bərabərsizlik bu şəkildə yazılır:

$$Ax + By + C > 0. \qquad (11)$$

(11) - λ yarımmüstəvisini təyin edən bərabərsizlikdir. Sər-həddi d düz xətti olan digər λ' yarımmüstəvisi isə

$$Ax + By + C < 0 \qquad (12)$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur.

Beləklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. *Əgər afin koordinat sistemində d düz xətti (9) tənliyi ilə verilmişdirsə, onda sərhəddi d düz xətti olan yarımmüstəvilər (11) və (12) bərabərsizlikləri ilə təyin olunurlar.*

VIII Mühazirə

İki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti. Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə. İki düz xətt arasında qalan bucaq

1. Hansı şərtlər daxilində

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

tənliklərinin eyni bir düz xətti təyin etdiyini aydınlaşdıraq. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. (1) *və* (2) *tənliklərinin afin koordinat sistemində eyni bir düz xətti təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt bu tənliklərdəki əmsalların mütənasib olmasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, (1) və (2) tənlikləri $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində eyni bir d düz xəttini təyin edirlər. § 7-dəki teorem 1-ə əsasən $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ və $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektorları d düz xəttinin yönəldici vektorlarıdır, ona görə də kollineardırlar. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ və $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektorlarının koordinatları mütənasibdir:

$$-B_2 = \lambda(-B_1), A_2 = \lambda A_1, \text{ və ya } A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1.$$

Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0) - d$ düz xəttinin nöqtəsidir. Onda

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Buradan $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$ şərtləri daxilində alırıq:

$$C_2 = \lambda(-A_1x_0 - B_1y_0) = \lambda C_1.$$

Beləliklə,

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1. \qquad (3)$$

Tərsinə, tutaq ki, (1) və (2) tənliklərində əmsallar (3) bəra-bərliklərini ödəyirlər. Aşkardır ki, A_2 və B_2 əmsalları eyni vaxtda sıfra bərabər olmadığından, bu halda $\lambda \neq 0.$ Ona görə də (2) tənliyini

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1 = 0 \qquad (4)$$

şəklində yazmaq olar. Əgər nöqtənin (x, y) koordinatları (1) tən-liyini ödəyirlərsə, onda bu koordinatlar (4) tənliyini də ödəyirlər. Bu isə o deməkdir ki, (1) və (4) tənlikləri ilə eyni bir düz xətt təyi[redacted] olunur.

Müəyyən $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş d_1 və d_2 düz xəttlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı məsələyə baxaq. Qeyd etdiyimiz kimi, $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ vektoru d_1 düz xəttinə, $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektoru isə d_2 düz xəttinə paraleldir. İki mümkündür.

1) $\vec{a}_1$ *və* $\vec{a}_2$ *kollinear olmayan vektorlardır.* Bu halda d_1 və d_2 düz xəttləri kəsişirlər. Tərsinə, əgər d_1 və d_2 düz xəttləri kəsişirlərsə, onda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear olmayan vektorlardır. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorlarının kollinear olmaması şərti $\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$, və ya $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ şəklində yazmaq olar. Bu düz xəttlərin kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını təyin etmək üçün (1) , (2) tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

2) $\vec{a}_1$ *və* $\vec{a}_2$ *vektorları kollineardırlar.* Bu halda verilmiş düz xəttlər paralel olur (bu düz xəttlərin üst-üstə düşməməsi fərz edilir). Tərsinə, əgər d_1 və d_2 düz xəttləri paraleldirlərsə, onda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear vektorlardır. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorlarının kollinearlıq şərti belə yazılır:

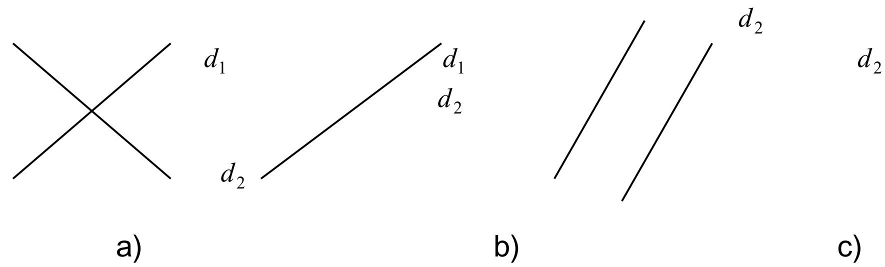
$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ və ya } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Beləliklə, (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş d_1 və d_2 düz xəttlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı aşağıdakı nəticəni qeyd edə bilərik:

a) d_1 və d_2 düz xəttləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklə-rində x və y dəyişənlərinin əmsalları mütənasib olduqda kəsişirlər (şək. 24, a).

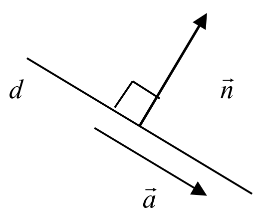
b) d_1 və d_2 düz xəttləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklə-rinin bütün əmsalları mütənasib olduqda, yəni müəyyən λ ədədi üçün $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ şərtləri ödənildikdə üst-üstə düşürlər (şək. 24, b).

c) d_1 və d_2 düz xəttləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklə-rində x və y dəyişənlərinin əmsalları mütənasib olduqda, lakin sərbəst əmsallar onlara mütənasib olmadıqda, yəni müəyyən λ ədədi üçün $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 \neq \lambda C_1$ şərtləri ödənildikdə paralel olurlar (şək. 24, c).

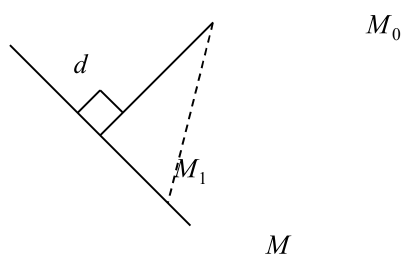


Şəkil 24

2. Düz xəttin istənilən yönəldici vektoruna perpendikul-yar olan sıfırdan fərqli $\vec{n}$ vektoru bu düz xəttə *perpendikulyar olan vektor* adlanır (şək. 25). Verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan sonsuz sayda vektorlar vardır. Aşağıdakı lemma doğrudur.



Şəkil 25



Şəkil 26

Lemma. *Əgər d düz xətti düzbucaqlı koordinat siste-mində*

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

tənliyi ilə verilmişdirsə, onda $\vec{n}(A,B)$ vektoru d düz xəttinə perpendikulyardır.

İsbatı. $\vec{a}(-B, A)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vek toru-dur. Lakin $\vec{a}\vec{n} = (-B)A + A \cdot B = 0$ olduğuna görə $\vec{n}$ və $\vec{a}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardırlar. Buradan $\vec{n}$ vektorunun d düz xəttinə perpendikulyar ol[redacted]ası alınır.

Tutaq ki, $M_0 - d$ düz xəttinə aid olmayan nöqtədir. M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə çəkilən M_0M_1 perpendikulyarının uzunluğu *M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə* adlanır (şək. 26). $M_0 \in d$ olduqda M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə sıfır qəbul edilir. Müstəvinin ixtiyari M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə $\rho(M_0, d)$ kimi işarə olunur. Aşkardır ki, d düz xəttinin istənilən M nöqtəsi üçün $\rho(M_0, d) \leq M_0M$ münasibəti doğrudur (şək. 26).

Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və (5) tənliyi ilə d düz xətti verilmişdir. $\rho(M_0, d)$ məsafəsini hesablayaq.

IX Mühazirə
Müstəvi üzərində düz xətlər dəstəsi, onun tənliyi

Tutaq ki, müstəvi üzərində $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ və $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ümumi tənlikləri ilə d_1 və d_2 düz xətləri verilmişdir. d_1 və d_2 düz xətlərinin tənliklərinin sol tərəflərindən istifadə etməklə aşağıdakı tənliyi tərtib edək:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \ , \qquad (1)$$

burada λ, μ eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ixtiyari həqiqi ədədlərdir. (1) tənliyi ilə müəyyən d düz xətti təyin olunur. d_1 və d_2 düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı aşağıdakı mümkün hallara baxaq.

1) Tutaq ki, d_1 və d_2 düz xətləri müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsində kəsişirlər. Aşkardır ki, d düz xətti də $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsindən keçər. λ, μ dəyişənlərinə ixtiyari qiymətlər verməklə $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsindən keçən sonsuz sayda düz xətlər çoxluğunu alarıq. Bu çoxluğa müstəvi üzərində düz xətlərin məxsusi dəstəsi deyilir. $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsi isə bu düz xətlər dəstəsinin mərkəzi adlanır.

2) Tutaq ki, $d_1 // d_2$, yəni d_1 və d_2 düz xətləri paraleldirlər. Asanlıqla yoxlanılır ki, bu halda (1) tənliyi ilə təyin olunan d düz xətti d_1 və d_2 düz xətlərinin hər birinə parallel olur. Ona görə də λ, μ dəyişənlərinə ixtiyari qiymətlər verməklə d_1 və d_2 düz xətlərinin hər birinə parallel olan sonsuz sayda düz xətlər çoxluğunu alarıq. Bu çoxluğa müstəvi üzərində düz xətlərin qeyri-məxsusi dəstəsi deyilir.

(1) tənliyi düz xətlər dəstəsinin tənliyi adlanır. Müəyyənlik üçün, $\lambda \neq 0$ olduğunu qəbul edək. Onda (1) tənliyi

$$A_1x + B_1y + C_1 \quad + \lambda_1(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (2)$$

şəklində yazılar, burada $\lambda_1 = \dfrac{\mu}{\lambda}$ işarə olunmuşdur.

(2) tənliyindən müəyyən edirik ki, düz xətlər dəstəsi birparametrli çoxluqdur.

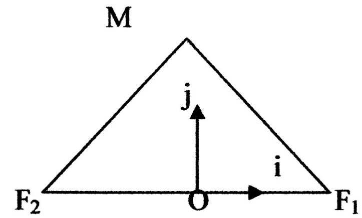
X Mühazirə
Ellips və hiperbola

Müstəvi üzərində verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri cəmi verilmiş PQ parçasının uzunluğuna bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna $PQ > F_1F_2$ şərti daxilində ellips deyilir.

F_1 və F_2 nöqtələri ellipsin fokusları, onlar arasındakı məsafə isə fokal məsafə adlanır. M verilmiş ellipsin nöqtəsi olduqda F_1M və F_2M parçalarına M nöqtəsinin fokal radiusları deyilir. Onların uzunluqları da M nöqtəsinin fokal radiusları adlanır. Tutaqki, $F_1F_2=2c$, $PQ=2a$. $PQ> F_1F_2$ olduğundan, $a>c$.

Tərifdən alınır ki, F_1vəF_2 nöqtələri üst-üstə düşdükləri halda ellips **a** radiuslu çevrə olur. Beləliklə, çevrə ellipsin xüsusi halıdır.

Müstəvi üzərində elə Oij düzbucaqlı koordinat sisteminə baxaq burada O- F_1F_2 parçasının orta nöqtəsidir və i OF_1 (şək. 1). γ ellipsin Oij koordinat sistemində tənliyini çıxaraq. Seçilmiş koordinat sistemin ellipsin F_1 və F_2 fokuslarının $F_1(c, o)$, $F_2(-c, o)$ koordinatları vardır.Ona də ellipsin ixtiyari M(x,y) nöqtəsinin fokal radiusları aşağıdakı kimi yazıl



şək. 1.

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (1)$$

Ellipsin tərifinə görə , $F_1M+ F_2M=2a$, ona görə də

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Bu tənliyi

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

şəklində yazaq və kvadrata yüksəltməklə oxşar hədləri islah edək. Nəticədə alarıq:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

Bir daha kvadrata yüksəltsək və zəruri çevirmələri aparsaq, yaza bilərik:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2) \qquad \text{burada } b^2=a^2-c^2 . \qquad (3)$$

Beləliklə, göstərdik ki, γ ellipsinin ixtiyari nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyirlər. İsbat edək ki, koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ ellipsinə aiddir, yəni $F_1M+F_2M=2a$. (1) düsturlarında y^2 kəmiyyətinin (2) tənliyindən olan ifadəsini yerinə yazıb (3) bərabərliyini nəzərə alsaq, aşağıdakı nəticəyə gəlmiş olarıq.

$$F_1M=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|, \qquad F_2M=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right| .$$

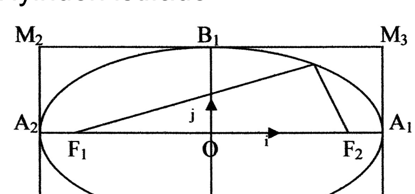
(2) tənliyindən alınır ki, $|x| \le a$. Digər tərəfdən, $0<\frac{c}{a}<1$ olduğundan $a-\frac{c}{a}x>0$, $a+\frac{c}{a}x>0$, ona görə də

$$F_1M=a-\frac{c}{a}x, \qquad F_2M=a+\frac{c}{a}x . \qquad (4)$$

Beləliklə, $F_1M + F_2M =2a$, yəni $M \in \gamma$. Buradan aydın olur ki, (2) ellipsin tənliyidir. Bu tənlik ellipsin kanonik tənliyi adlanır.

<u>Qeyd.</u> F_1 və F_2 fokusları üst-üstə düşdükdə c=0 olur və (3)-dən göründüyü kimi a=b. Bu halda (2) tənliyi $x^2 + y^2 = a^2$ şəklində yazılır, yəni *a* radiuslu və mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrəni təyin edir.

γ ellipsinin həndəsi xassələrini öyrənmək üçün (2) kanonik tənliyindən istifadə edək.



$M(x, y) \in \gamma$ olduqda x, y koordinatları (2) tənliyini ödəyirlər, ona görə də $x^2 \leq a^2$, $y^2 \leq b^2$. Buradan müəyyən edirik ki, $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, yəni ellipsin bütün nöqtələri şəkil 2. göstərilən $M_1 M_2 M_3 M_4$ düzbucaqlısına daxil olar. Əgər $M(x, y) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(-x, -y) \in \gamma$, yəni O nöqtəsi ellipsin simmetriya mərkəzidir.

şəkil 2.

Digər tərəfdən, əgər $M(x, y) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(-x, y) \in \gamma$ və $M''(x, -y) \in \gamma$.
Buradan alınır ki, Ox və Oy düz xəttləri ellipsin simmetriya oxlarıdır. Asanlıqla göstərilir ki, çevrədən fərqli olan ellipsin başqa simmetriya oxları yoxdur. Bu halda fokuslardan keçən düz xətt birinci və ya ikinci simmetriya oxu adlanır. Hər bir simmetriya oxu ellipsi iki nöqtədə kəsir: $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0,-b)$. Bu nöqtələrə ellipsin təpələri deyilir (şəkil 2). A_1A_2 və B_1B_2 parçaları ellipsin uyğun olaraq böyük və kiçik oxları adlanır. Akardır ki, $OA_1=OA_2=a$, $OB_1=OB_2=b$. Bu ədədlərə uyğun olaraq ellipsin böyük və kiçik yarımoxları deyilir.

Birinci rübdən ($x \geq 0$, $y \geq 0$) olan M(x, y) nöqtəsi üçün alarıq: $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. x o-dan a-ya qədər artdıqda M nöqtəsini

y ordinatı b-dən o-ya qədər azalır. Buradan simmetriya oxlarını da nəzərə almaqla ellipsin qrafikini şəkil 2-dəki kimi qururuq. $e=\frac{c}{a}$ ədədinə ellipsin eksentisiteti deyilir, burada c-fokal məsafə, a-isə yarımoxdur. Tərifdən alınır ki, $0 \leq e < 1$.

Eksentisitet yalnız və yalnız c=0 olduqda, yəni ellips çevrə olduqda 0-a bərabərdir.

Müstəvi üzərində verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri fərqinin mütləq qiyməti verilmiş PQ parçasının uzunluğuna bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna $PQ < F_1F_2$ şərti daxilində hiperbola deyilir.
F_1 və F_2 nöqtələri hiperbolanın fokusları, onlar arasındakı məsafə isə fokal məsafə adlanır. $F_1F_2 > PQ > 0$ olduğundan, hiperbolanın fokusları müxtəlif nöqtələrdir. Əgər M-verilmiş hiperbolanın nöqtəsidirsə, onda F_1M və F_2M parçalarına M nöqtəsini fokal radiusları deyilir. Bu parçaların uzunluqları da M nöqtəsinin fokal radiusları adlanır.
Tutaq ki, $F_1F_2=2c$, $PQ=2a$. $PQ < F_1F_2$ olduğundan $a < c$.
γ hiperbolasının Oij düzbucaqlı koordinat sistemində tənliyini çıxaraq. Bu koordinat sistemində $F_1(c, 0)$, $F_2(-c,0)$ olduğundan F_1M və F_2M fokal radiusları üçün (1) düsturları doğrudur.

Hiperbolanın tərifinə görə $|F_1M - F_2M| = 2a$, ona görə də $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$.

Bu tənliyi $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$ şəkildə yazaq
(5)
(5) tənliyini kvadrata yüksəldib oxşar hədləri islah etsək, alarıq: $\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$

Bir daha kvadrata yüksəltsək, zəruri çevirmələrdən sonra yaza bilərik:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6) \qquad \text{burada} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

(7)

Beləliklə, göstərdik ki, γ hiperbolasının ixtiyari noqtəsinin koordinatları (6) tənliyini ödəyirlər. İsbat edək ki, koordinatları (6) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ hiperbolası üzərində yerləşir, yəni $|F_1M - F_2M| = 2a$ şərtini ödəyir.

(6) tənliyindən y^2 kəniyyətinin ifadəsini (1) düsturlarında əvəz edək və (7) bərabərliyini nəzərə alaq.

Nəticədə yaza bilərik: $F_1M = \left|\frac{c}{a}x - a\right|$, $F_2M = \left|\frac{c}{a}x + a\right|$.

(6) tənliyindən alınır ki, $|x| \geq a$, digər tərəfdən, $\frac{c}{a} > 1$, ona görə də

$F_1M = \frac{c}{a}x - a$, $F_2M = \frac{c}{a}x + a$, $x > 0$ olduqda və $F_1M = -\frac{c}{a}x + a$, $F_2M = -\frac{c}{a}x - a$,

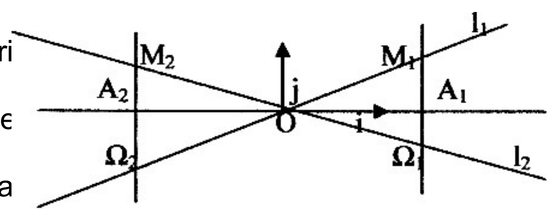
$x < 0$ olduqda (8)

Beləliklə, $|F_1M - F_2M| = 2a$, yəni $M \in \gamma$. Bununla da müəyyən olundu ki, (6) γ hiperbolasının tənliyidir. Bu tənliyə hipperbolanın kanonik tənliyi deyilir.

(6) kanonik tənliyindən hiperbolanın həndəsi xassələrini öyrənmək üçün istifadə edək.

Əgər $M(x, y) \in \gamma$ olarsa, onda $x^2 \geq a^2$. Deməli $x \geq \alpha$ yaxud $-x \leq a$. Bu isə göstərir ki, şəkil 3-də təsvir olunan A_1M_1 və A_2M_2 düz xəttlərinin əmələ gətirdiyi zolağın daxilində hiperbolanın nöqtələri yoxdur ($OA_1=OA_2=a$)

Ellips halında olduğu kimi göstərilir ki, O nöqtəsi hiperbolanın simmetriya mərkəzidir, Ox və Oy düz xəttləri isə simmetriya oxlarıdır.
Simmetriya mərkəzi hiperbolanın mərkəzi, fokuslardan ke simmetriya oxu birinci və ya fokal simmetriya oxu, ona perpendikulyar olan oxu isə ikinci və ya xəyali simmetriya oxu adlanır. Fokal simmetriya oxu hiperbolanı $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ nöqtələrində kəsir. Xəyali simmetriya oxu hiperbolanı kəsmir. A_1 və A_2 nöqtələri hiperbolanın təpələri, A_1A_2 parçası isə həqiqi oxu adlanır. a və b ədələrinə hiperbolanın uyğun olaraq böyük və kiçik yarım oxları deyilir.



şəkil 3.

γ hiperbolasının O mərkəzindən keçən 1 düzxəttinin bu hiperbola ilə qarşılıqlı vəziyyətini nəzərdən keçirək. Oij koordinat sistemində 1 düz xəttinin bucaq əmsallı tənliyini yazaq; y=kx. Y-in qiymətini (6) tənliyində yerinə yazıb müvafiq elementar çevirmələr aparsaq, alanq:

$x^2 (b^2 - k^2a^2) = a^2b^2$.

(9)

Bu tənliyin kökləri 1 düz xəttinin γ hiperbolası ilə kəsişmə nöqtələrinin absisidir.

1) $b^2 - k^2a^2 > 0$, bu halda 1 düz xəttinin γ hiperbolası ilə iki kəsişmə nöqtəsi vardır:

$$M_1 = \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right), \quad M_2 = \left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \frac{-kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right).$$

2) əgər $b^2 - k^2a^2 < 0$ olarsa, onda (9) tənliyinin xəyali kökləri vardır, ona görə də 1 düz xətti hiperbolanı kəsmir.

3) $b^2 - k^2a^2 = 0$ olduqda da (9) tənliyini həlləri yoxdur, yəni 1 düz xəttinin hiperbola ilə ortaq nöqtələri yoxdur.

Beləliklə, y=kx düz xətti (6) hiperbolasını yalnız və yalnız $b^2 - k^2a^2$ 0 , yəni $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ olduqda kəsir.

$k=tg\alpha$ olduğundan, $-\frac{b}{a} < tg\alpha < \frac{b}{a}$, buradan α - 1 düz xəttinin Ox oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Deməli,

hiperbolanın bütün nöqtələri şəkil 3-də təsvir olanan qarşılıqlı bucaqların daxili oblastlarında yerləşirlər. Ona görə də, hiperbolanın iki qanadı vardır, onlardan biri Ω_1 oblastında (sağ qanad), digəri isə Ω_2 oblastında yerləşir.

$b^2 - k^2a^2 =0$ halına bir daha nəzər yetirək. Bu hala bucaq əmsalları $k_1 = \frac{b}{a}$, $k_2 = -\frac{b}{a}$ olan l_1 və l_2 düz

xəttləri uyğundurlar. Hiperbolanı kəsməyən l_1 və l_2 düz xəttləri onun asimtotları adlanır (şəkil 3). Tutaq ki, $M(x_1,y_1)$ - hiperbolanın I rübdə yerləşən(x 0, $y \geq 0$) ixtiyari nöqtəsidir, $N(x_1, y_2)$- $y = \frac{b}{a} x$ tənliyi ilə verilən l_1 asimtotunun nöqtəsidir. MN parçasının uzunluğunu hesablayaq:

$$MN = |y_2 - y_1| = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

M nöqtəsinin x absisinin qeyri-məhdud artması zamanı MN parçasının uzunluğu monoton azalaraq, sıfıra yaxınlaşır.
Bu xassə hiperbolanın asimtotlar nəzərən vəziyyətini müəyyən etməyə imkan verir (şəkil 4).

$e = \frac{c}{a}$ ədədi hiperbolanın eksentrisiteti adlanır. $c > a$ olduğundan hiperbolanın eksentrisiteti 1-dən böyükdür.

$a=b$ olduqda hiperbolaya bərabərtərəfli hiperbola deyilir.Bərabərtərəfli hiperbolanın tənliyi $x^2 - y^2 = a^2$ şəklindədir.

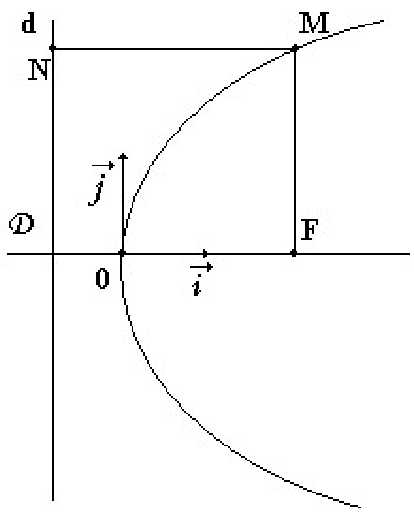
(7) düsturundan alırıq ki, $\frac{b}{a} = \sqrt{c^2 - l}$
(10)

(10) bərabərliyində $a = b$ olduğunu nəzərə alsaq, $c^2 = 2$, və ya $e = \sqrt{2}$ nəticəsinə gəlmiş olarıq. Beləliklə, bərabərtərəfli hiperbolanın eksentrisiteti $\sqrt{2}$ ədədinə bərabərdir və asimtotlarının y = x, y = -x tənlikləri vardır.

XI Mühazirə

Parabola. Ellips, hiperbola və parabolanın polyar koordinatlarla tənliyi

1. Müstəvi üzərində hər birinin verilmiş F nöqtəsindən məsafəsi F nöqtəsindən keçməyəm verilmiş d düz xəttinə qədər məsafəsinə bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna parabola deyilir.
F parabolanın fokusu, d isə direktrisi adlanır. Fokusdan direktrisə qədər olan məsafəyə parabolanın fokal parametri deyilir və p ilə işarə olunur. Aydındır ki, $p = FD$, burada $D - F$ nöqtəsinin d düz xətti üzərində proyeksiyasıdır (şəkil 1).



Şəkil 1.

Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində γ parabolasının tənliyini çıxaraq, burada $O - DF$ parçasının orta nöqtəsidir və $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF}$. Bu koordinat sistemində F fokusunun $(\frac{p}{2}, 0)$ koordinatları, d direktrisinin isə $x + \frac{p}{2} = 0$ tənliyi vardır. Tutaq ki, $M(x, y)$ – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. MF və $\rho(M, d)$ məsafələrini hesablayaq:

$$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}, \quad \rho(M, d) = \left| x + \frac{p}{2} \right|.$$

(1)

Əgər $M \in \gamma$ olarsa, onda $MF = \rho(M, d)$. Ona görə də $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right|$.

Hər iki tərəfi kvadrata yüksəltsək , alarıq

$$y^2 = 2px \qquad (2)$$

Beləliklə, isbat olundu ki, γ parabolasının ixtiyari nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyirlər. Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək: Koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ parabolasına aiddir, yəni $FM = \rho(M,d)$. y^2 kəmiyyətinin (2)-dən olan qiymətini (1) düsturlarından birincisində yerinə qoysaq, alarıq:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Beləliklə, $FM = \rho(M,d)$, yəni $M \in \gamma$.

(2) tənliyinə parabolanın kanonik tənliyi deyilir. γ parabolasının həndəsi xassələrini öyrənmək üçün (2) kanonik tənliyindən istifadə edək. (2) tənliyindən görünür ki, γ parabolasının bütün nöqtələri $x \geq 0$ yarımmüstəvisində yerləşirlər. Əgər $M(x,y) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(x,-y) \in \gamma$, yəni OF düz xətti parabolanın simmetriya oxudur. Bu oxun parabola ilə O kəsişmə nöqtəsinə onun təpəsi deyilir.

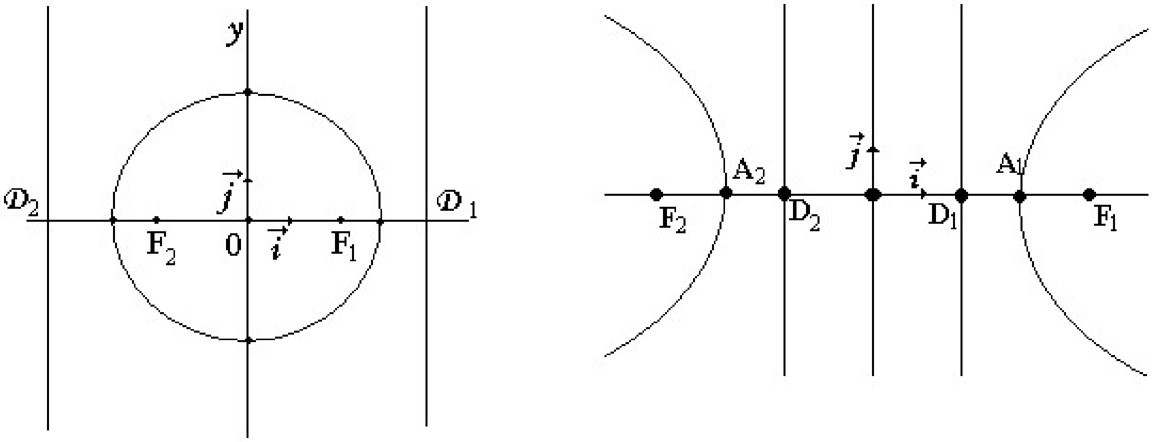
Seçilmiş koordinat sistemin oxları parabola ilə bu nöqtədə-onun O təpə nöqtəsində kəsişirlər. Göstərək ki, O nöqtəsindən keçən istənilən digər l düz xətti parabolanı iki nöqtədə kəsir. Bundan ötrü l düz xəttinin $y = kx$ bucaq əmsallı tənliyini yazaq. y dəyişəninin qiymətini (2) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq: $k^2x^2 = 2px$, və ya $(k^2x - 2p)x = 0.$ $k \neq 0$ olduqda l düz xəttinin parabola ilə iki kəsişmə nöqtəsi vardır: $O(0,0)$ və $M\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right).$

Əgər $M(x,y)$ nöqtəsi parabola üzərində x absisinin qeyri-məhdud artması şərti ilə yerinə dəyişərsə, onda $|y|$ qeyri-məhdud artar. Bu mülahizələrə əsasən , parabolanı şəkil 1-dəki kimi təsvir edə bilərik.

2.Ellipsin (hiperbolanın) direktisləri dedikdə ikinci oxa paralel olan və ondan $\frac{a}{e}$ məsafəsində olan iki düz xətt başa düşülür, burada a-böyük (həqiqi) yarımoxdur, e isə eksentristetdir. Çevrə halında $e = 0$ olduğundan çevrənin direktrisləri yoxdur.

Ellipsin (hiperbolanın) direktislərini d_1 və d_2 ilə işarə edirik və indeksləri elə seçirik ki, $F_1(c,0)$ fokusu və ona uyğun olan d_1 direktrisi ikinci koordinat oxundan bir tərəfdə, $F_2(-c,0)$ fokusu və uyğun d_2 direktrisi isə digər tərəfdə yerləşmiş olsunlar.

Göstərək ki, ellipsin direktrislərinin A_1A_2 oxu ilə ortaq nöqtələri yoxdur və ona görə də ellipsi kəsmirlər (şək. 2,a). Doğrudan da tutaq ki, D_1 və D_2- d_1 və d_2 direktrislərinin ellipsin fokal oxu ilə kəsişmə nöqtələridir. Onda $OA_1 = OA_2 = a$, $OD_1 = OD_2 = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}, c < 0$ olduğundan, $OA_1 < OD_1$ və $OA_2 < OD_2$. Buradan alınır ki, A_1, A_2 nöqtələri D_1D_2 parçasına daxildir, ona görə də d_1 və d_2 direktrislərinin A_1A_2 parçası ilə ortaq nöqtələri yoxdur.



a) b)

Şəkil 2

Teorem. *Ellips (hiperbola) müstəvinin elə γ' nöqtələri çoxluğudur ki, bu nöqtələrdən hər birinin fokusa qədər olan məsafəsinin həmin nöqtənin uyğun direktrisə qədər olan məsafəyə nisbəti eksentrisitetə bərabərdir*.

İsbatı. Teoremin isbatını ellips halı üçün aparaq. Tutaq ki, $\gamma -$ verilmiş ellipsdir, $F_1 -$birinci fokusdur, d_1 - birinci direktrisdir. Kanonik koordinat sistemində F_1 nöqtəsinin $(c,0)$ koordinatları, d_1 düz xəttinin $x-\frac{a}{e}=0$ tənliyi vardır, ona görə də əgər $M(x,y)-$müstəvinin nöqtəsidirsə, o halda

$$\rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{e}\right|,\ \ MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Əgər $M\in\gamma$ olarsa, onda $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e\left|x-\frac{a}{e}\right|.$

Bu tənliyi kvadrata yüksəltməklə alarıq:

$$(x-c)^2+y^2=(ex-a)^2\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Buradan aydın olur ki, $M\in\gamma$.

Tərsinə, tutaq ki, $M(x,y)\in\gamma$. Onda $MF_1=a-ex$. Digər tərəfdən ,

$$\rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\frac{a-ex}{e},$$

Ona görə də

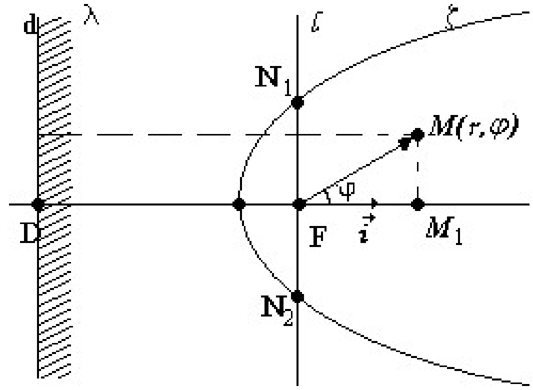
$$MF_1=e\rho(M,d_1),$$

yəni, $M\in\gamma'$. Beləliklə, γ'çoxluğu γ ellipsi ilə üst-üstə düşür. Hiperbola halı üçün teoremin isbatı analoji qaydada aparılır.

Bu teorem ellipsin və ya hiperbolanın eksentrisitetinin həndəsi mahiyyətini aydınlaşdırır: ellips və ya hiperbolanın eksentrisiteti elə bir sabit ədəddir ki, hər bir nöqtədən fokusa qədər olan məsafənin həmin nöqtədən uyğun direktrisə qədər olan məsafəyə nisbəti bu ədədə bərabərdir. Parabolanın tərifindən çıxır ki, onun nöqtələri oxşar xassəyə malikdirlər, yəni parabolanın hər bir nöqtəsindən fokusa qədər olan məsafənin direktrisə qədər olan məsafəyə nisbəti sabit olub vahidə bərabərdir. Ona görə də “vahid” ədədi istənilən parabolanın eksentrisiteti qəbul olunur.

Tutaq ki, γ xətti ya çevrədən fərqli ellipsdir, ya hiperbolanın bir qanadıdır, ya da paraboladır. Fərz edək ki, F və d bu xəttin fokusu və direktrisidir, həmçinin əgər γ

ellipsdirsə, F - onun fokuslarından biridir, d uyğun direktrisdir, əgər γ hiperbolanın qanadlarından biridirsə, onda F və d hiperbolanın baxılan qanadının ikinci simmetriya oxuna nəzərən yerləşdiyi tərəfdə yerləşən fokus və direktrisdir. İsbat etdiyimiz teoremi və parabolanın tərifini nəzərə alsaq, aşağıdaki nəticəyə gəlmiş olarıq: γ xətti sərhəddi d düz xətti olan λ yarımmüstəvisinin elə M nöqtələri çoxluğudur ki, $FM = e\rho(M,d)$, burada $e - \gamma$ xəttinin eksentrisitetidir.



Şəkil 3.

γ xəttinin $F\vec{i}$ polyar koordinat sistemində tənliyini yazaq, burada polyus F fokusudur, $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{DF}}{DF}$ və $D - F$ nöqtəsinin d düz xətti üzərində proyeksiyasıdır (şəkil 3). Əvvəlcə $\rho(M,d)$ məsafəsini hesablayaq, burada $M(r,\varphi)$- müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. Əgər $M_1 - M$ nöqtəsinin FD düz xətti üzərində proyeksiyasıdır, onda şəkil 3-dən göründüyü kimi,

$$\rho(M,d) = DM_1 = DM\cos M\hat{DF} = \overrightarrow{DM}\cdot\vec{i}$$

Lakin $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}$, ona görə də

$$\rho(M,d) = (\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM})\cdot\vec{i} = DF + r\cos\varphi.$$

$M(r,\varphi)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $FM = e\rho(M,d)$ və ya $r = e(DF + r\cos\varphi)$ olduqda γ xəttinə aid olur. Əgər $p = eDF$ qəbul etsək, yaza bilərik:

$$r(1 - e\cos\varphi) = p. \tag{3}$$

(3) tənliyi γ xəttinin (yəni ellipsin, hiperbolanın bir qanadının və ya parabolanın) tənliyidir. p ədədi fokal parametr adlanır.

φ bucağının hansı qiymətlərində (30 tənliyinin γ xəttinin bütün nöqtələrini təyin etdiyini araşdıraq: $e < 1$ olduqda γ xətti ellips olur. Bu halda φ-nin istənilən qiymətində $1 - e\cos\varphi \neq 0$ olur. Ona görə də (3) tənliyi

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \tag{4}$$

şəklinə gətirilir.

φ bucağı $[0,\ 2\pi]$ parçasında dəyişdikdə, yəni $0 \le \varphi \le 2\pi$ olduqda, (4) tənliyi ellipsin bütün nöqtələrini təyin edir. $e > 1$ olduqda γ hiperbolanın bir qanadı olur. (3) tənliyi yalnız polyar bucaqları $1 - e\cos\varphi > 0$ və ya $\cos\varphi < \dfrac{1}{e}$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr üçün məna kəsb edir.

Tutaq ki, φ_0 elə bucaqdır ki, $\cos\varphi_0 = \frac{1}{e}$. Onda yuxarıdakı bərabərsizlik $\cos\varphi_0 > \cos\varphi$ şəklində yazırlar. φ bucağı $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$ qiymətlərini aldıqda (4) tənliyi γ xəttinin, yəni hiperbolanın bir qanadının bütün nöqtələrini təyin edir. $\cos\varphi_0 = \frac{1}{e}$ bərabərliyindən alınır ki, $tg\varphi_0 = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{b}{a}$. Ona görə də φ_0 $y = \frac{b}{a}x$ asimptotunun hiperbolanın həqiqi oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır.

$e = 1$ olduqda γ xətti paraboladır və əgər $\varphi \neq 0$ olarsa, onda $1 - e\cos\varphi \neq 0$. Lakin parabola üzərində polyar bucağı sıfıra bərabər olan ($\varphi = 0$) nöqtələr yoxdur. Beləliklə, əgər φ $-\pi < \varphi \leq \pi$ qiymətlərini alırsa, onda (3) tənliyini

$$r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənlik parabolanın bütün nöqtələrini təyin edir.

XII Mühazirə

Ikitərtibli xəttin ümumi tənliyi. Ikitərtibli xəttin düz xətlə kəsişməsi. Asimptotik istiqamətlər

1. Əvvəlcə müstəvi üzərində nöqtə anlayışını genişləndirək, yəni müstəvini xəyali nöqtələr adlandırılan nöqtələrlə tamamlayaq. Belə bir razılaşma daxil edək: seçilmiş $O\vec{e_1},\vec{e_2}$ koordinat sisteminə nəzərən müəyyən nizamla götürülmüş ixtiyari (x,y) ədədlər cütünü nöqtə adlandıraq, burada $(x,y)\in C^2$, C- bütün kompleks ədədlər çoxluğudur. x və y həqiqi ədədlər olduqda nöqtə həqiqi, onlardan heç olmasa biri həqiqi ədəd olmadıqda isə xəyali nöqtə adlanır. Məsələn, $A(2,-5)$, $B(\sqrt{2},i)$, $C(0.3+\sqrt{2}i)$, $D(-\sqrt{5},4)$ nöqtələrindən B və C xəyali nöqtələrdir. Bütün həqiqi və xəyali nöqtələr çoxluğuna kompleks müstəvi deyilir.

Uyğun koordinatları kompleks-qoşma ədədlər olan iki $M_1(x_1,y_1)$ və $M_2(x_2,y_2)$ nöqtələr adlanır. Məsələn, $A_1(2+i,3-2i)$ və $A_2(2-i,3+2i)$ və ya $B_1(0,i)$ və $B_2(0,-i)$ – kompleks –qoşma nöqtələr cütləridir.

$O\vec{e_1},\vec{e_2}$ afin koordinat sistemində

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \tag{1}$$

tənliyi ilə verilən xəttə ikitərtibli xətt deyilir. (1) tənliyi ikitərtibli xəttin ümumi tənliyi adlanır. Ümumi tənliyin əmsalları ixtiyari həqiqi ədədlərdir və $a_{11},\ a_{12},a_{22}$ eyni vaxtda sıfıra bərabər deyil.

a_{12},a_{10} və a_{20} əmsallarını lazım olduqda $a_{21},a_{01},$ və a_{02} kimi də işarə edəcəyik Aşağıdaki işarələmələri daxil edək:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00},$$

$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{22}y+a_{20},$$

$$F_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{20},$$

$$F_0(x,y)=a_{01}x+a_{02}y+a_{00}.$$

Bu işarələmələri tətbiq etməklə (1) tənliyini

$$F(x,y)=0 \qquad \text{və ya}$$

$$F_1(x,y)\cdot x+F_2(x,y)\cdot y+F_0(x,y)=0 \tag{2}$$

şəklində yazmaq olar.

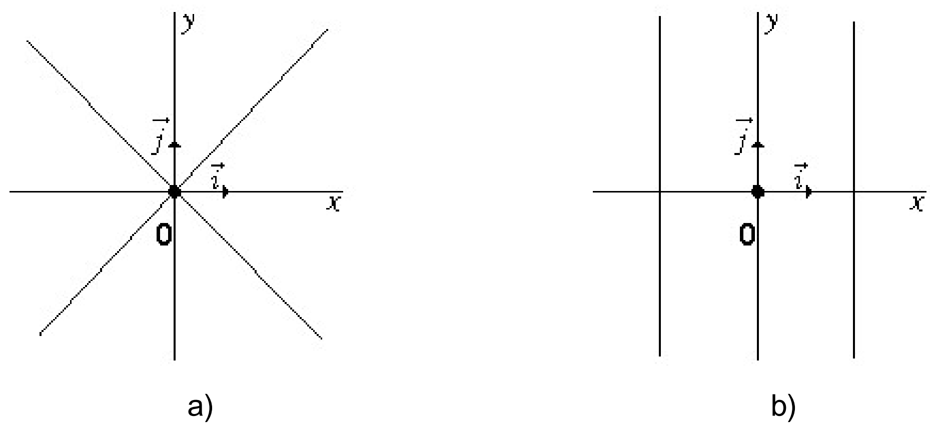
İkitərtibli xətlərə misal olaraq $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tənliyi ilə verilən ellipsi, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tənliyi ilə verilən hiperbolanı, $y^2=2px$ tənliyi ilə verilən parabolanı göstərmək olar. İkitərtibli xətlərə dair digər nümunələrə baxaq: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ tənliyi ilə verilən γ xətti ikitərtibli xətdir. Bu tənliyi

$$(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=0$$

şəklində yazmaq olar. Bu halda deyirlər ki, γ xətti kəsişən

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ və } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

düz xətlər cütünə ayrılır (parçalanır). Analoji olaraq, $x^2-a^2=0,\ a\neq 0$ xətti $x-a=0$ və $x+a=0$ paralel düz xətlər cütünə ayrılır (bax şəkil 1, a), b)).



şəkil 1

Baxılan xətlər sonsuz sayda həqiqi və xəyali nöqtələri olan ikitərtibli xətlərə nümunələrdir. Lakin bu xassəyə malik olmayan ikitərtibli xətlər də vardır. Məsələn, $x^2+y^2=0$ tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətt bir həqiqi $O(0,0)$ nöqtəsinə və sonsuz sayda xəyali nöqtələrə malikdir, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ xəttinin isə həqiqi nöqtələri yoxdur, yəni onun bütün nöqtələri xəyalidirlər.

2. Tutaq ki, afin koordinat sistemində

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (3)$$

tənliyi ilə ikitərtibli γ xətti və

$$x=x_0+p_1t,\ y=y_0+p_2t \qquad (4)$$

parametrik tənlikləri ilə l düz xətti verilmişdir.

l düz xəttinin γ xətti ilə kəsişmə nöqtələrini təyin edək. x və y dəyişənlərinin (4) tənliklərindən olan qiymətlərini (3) tənliyində nəzərə alıb müvafiq çevirmələr aparsaq,

$$Pt^2+2Qt+R=0 \qquad (5)$$

nəticəsinə gəlmiş olarıq, burada

$$\begin{aligned} P&=a_{11}{p_1}^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}{p_2}^2,\\ Q&=F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2,\\ R&=F(x_0,y_0)\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

(5) tənliyini tədqiq edək. İki hal mümkündür:

1) $P\neq 0$. (5) tənliyinin iki kökü vardır:

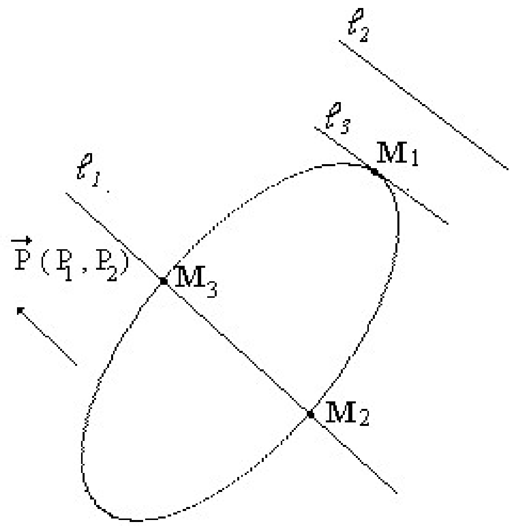
$$t_1=\frac{-Q+\sqrt{\delta}}{P},\qquad t_2=\frac{-Q-\sqrt{\delta}}{P},$$

burada $\delta = Q^2 - PR$ - (5) tənliyinin diskriminantıdır . l düz xətti γ ikitərtibli xəttini: $\delta > 0$ olduqda həqiqi və müxtəlif, $\delta < 0$ olduqda kompleks-qoşma , $\delta = 0$ olduqda isə üst-üstə düşən M_1 və M_2 nöqtələrində kəsir.

Şəkil 2 –də $l_1 - \delta > 0$ halına, $l_2 - \delta < 0$ halına, $l_3 - \delta = 0$ halına uyğun olan düz xətlərdir.

2) $P = 0.$ (5) tənliyi belə yazılır: $Qt + R = 0.$ $Q \neq 0$ olduqda l düz xətti γ xəttini bir nöqtədə kəsir. $Q = 0, R \neq 0$ olduqda l düz xəttinin γ xətti ilə ortaq nöqtələri yoxdur. $Q = R = 0$ olduqda isə ixtiyari t (5) tənliyinin həlli olur, ona görə də $l \subset \gamma$ şərti ödənilir.

Beləliklə, l düz xəttinin və ikitərtibli γ xəttinin qarşılıqlı vəziyyətinin altı halı mümkündür:



Şəkil 2.

$P \neq 0$, $\delta > 0$ – iki həqiqi kəsişmə nöqtələri vardır;

$\delta < 0$ – xəyali kompleks-qoşma kəsişmə nöqtələri vardır;

$\delta < 0$ – üst-üstə düşən kəsişmə nöqtələri vardır;

$P = 0$, $Q \neq 0$ – bir kəsişmə nöqtəsi vardır;

$Q = 0$, $R \neq 0$ – kəsişmə nöqtələri yoxdur;

$Q = 0$, $R = 0$ – düz xətt γ xətti üzərində yerləşir.

3. (5) tənliyindəki P əmsalı yalnız l düz xəttinin $\vec{p}$ istiqamətverici vektorundan asılıdır və M_0 nöqtəsinin (x_0, y_0) koordinatlarından asılı deyil. Deməli $P \neq 0$ halında istiqamətverici vektoru $\vec{p}\ (p_1, p_2)$ olan bütün düz xətlər γ xəttini iki nöqtədə (həqiqi-müxtəlif, üst-üstə düşən və ya kompleks-qoşma) kəsirlər. $P = 0$ halında isə ya $l \subset \gamma$ olur, ya da l düz xətti γ xəttini birdən çox olmayan nöqtədə kəsir.

Sıfırdan fərqli $\vec{p}$ vektoruna paralel olan düz xətt γ xətti ilə birdən çox olmayan ortaq nöqtəyə malikdirsə və ya γ xəttinə aiddirsə, bu halda $\vec{p}$ vektoru ilə təyin olunan istiqamət γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamət adlanır. Yuxarıdakı nəticədən qeyd edə bilərik : sıfırdan fərqli $\vec{p}\ (p_1, p_2)$ vektoru ilə təyin olunan istiqamət yalnız və yalnız

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \tag{7}$$

şərti ödənildikdə (3) tənliyi ilə verilən γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamət olur.
(7) düsturu ikitərtibli xətlərə nəzərən asimptotik istiqamətləri təyin etməyə imkan verir.

$a_{22} \neq 0$ olduqda (7)-dən $p_1 \neq 0$ ($\vec{p}$- sıfırdan fərqli vektor olduğundan) olması alınır, ona görə də (7) bərabərliyindən

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0 \tag{8}$$

nəticəsinə gəlirik, burada $k = \dfrac{p_2}{p_1}$.

(8) tənliyini həll etməklə alırıq:

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\Delta}}{a_{22}}, \qquad (9)$$

burada $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}{}^2$.

$a_{22} = 0$ olduqda (7) tənliyi

$$a_{11} p_1{}^2 + 2a_{12} p_1 p_2 = 0$$

şəklində yazılır. Bu tənliyi

$$\overrightarrow{e_2}(0,1) \quad \text{və} \quad \vec{p}(-2a_{12}, a_{11}) \qquad (10)$$

vektorlarının koordinatları ödəyirlər.

İkitərtibli γ xəttinə nəzərən neçə asimptotik istiqamətin olduğunu aydınlaşdıraq. Üç hala baxaq.

1) $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$ və deməli, $a_{22} \neq 0$. (9) düsturundan müəyyən edirik ki, γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur.

2) $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}{}^2 < 0$. Bu halda γ xəttinə nəzərən iki asimptotik istiqamət vardır. Doğrudan da, $a_{22} \neq 0$. olduqda bu nəticə (9) düsturundan alınır, $a_{22} = 0$. olduqda isə $a_{12} = 0$ şərti ödənildiyindən $\overrightarrow{e_2}(0,1)$ və $\vec{p}(0, a_{11})$ vektorları kollineardırlar və eyni bir asimptotik istiqaməti təyin edirlər.

Beləliklə aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. *Tutaq ki, (3) tənliyi ilə γ ikitərtibli xətti verilmişdir və $\Delta = a_{11}a_{12} - a_{12}{}^2$. $\Delta > 0$ olduqda γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur, $\Delta < 0$ olduqda iki asimptotik istiqamət vardır, $\Delta = 0$ olduqda isə iki asimptotik istiqamət vardır.*

Qeyd edək ki, asimptotik istiqamət həndəsi anlayışdır (yəni həndəsi fiqurların qarşılıqlı vəziyyəti ilə təyin olunmuşdur) və ona görə də koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil.

Ellipsə, hiperbolaya və parabolaya nəzərən neçə asimptotik istiqamət olduğunu aydınlaşdıraq. Tutaq ki, ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tənliyi ilə verilmişdir. $\Delta = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$ olduğundan ellipsə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur. Analoji qaydada $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tənliyi ilə verilmiş hiperbola üçün $\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2}$ olur və (7) tənliyi

$$\frac{p_1{}^2}{a^2} - \frac{p_2{}^2}{b^2} = 0$$

şəklində yazılır. Buradan görünür ki, hiperbolaya nəzərən iki asimptotik istiqamət vardır. Eyni qayda ilə göstərilir ki, parabola üçün $\Delta = 0$, ona görə də parabolaya nəzərən yalnız bir asimptotik istiqamət vardır.

Yuxarıdakı nəticəyə uyğun olaraq ikitərtibli xətt $\Delta > 0$ olduqda elliptik tip, $\Delta < 0$ hiperbolik tip, $\Delta = 0$ olduqda isə parabolik tip xətt adlandırılır.

XIII Mühazirə

İkitərtibli xəttin mərkəzi. İkitərtibli xəttə toxunan düz xətt

1. Tutaq ki,

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

ümumi tənliyi ilə γ ikitərtibli xətti verilmişdir. Uc nöqtələri γ xətti üzərində yerləşən parçaya bu xəttin vətəri deyilir. γ xəttinin vətərinin orta nöqtəsinə dair aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. *γ ikitərtibli xəttinə asimptotik olmayan $\vec{p}(p_1,p_2)$ vektoru verilmişdir . $M(x_0,y_0)$ nöqtəsinin p vektoruna paralel olan hər-hansı orta nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$F_1(x_0,y_0)\cdot p_1+F_2(x_0,y_0)\cdot p_2=0$$

(2)

münasibətinin ödənilməsidir.

İsbatı. $M(x_0,y_0)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{p}(p_1,p_2)$ vektoruna paralel olan *l* duz xəttinin $x=p_1t+x_0,\ y=p_2t+y_0$ parametrik tənliklərini yazaq. Tutaq ki, M_1 və M_2 l-düz xəttinin verilmiş xətlə kəsişmə nöqtələridir, t_1 və t_2- bu nöqtələrin parametrləridir. Onda $M_1(p_1t_1+x_0,\ p_2t_1+y_0),\ M_2(p_1t_2+x_0,\ p_2t_2+y_0)$ yaza bilərik. Aşkardır ki, $M(x_0,y_0)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $t_1+t_2=0$ şərti ödənildikdə M_1M_2 parçasının orta nöqtəsi olur. Digər tərəfdən t_1 və t_2

$$Pt^2+2Qt+R=0 \tag{3}$$

kvadrat tənliyinin kökləridir. Viyet teoreminə görə (3) tənliyinin köklərinin cəminin sıfıra bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt $Q=F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2=0$ münasibətinin ödənilməsidir. Teorem isbat olundu.

γ ikitərtibli xəttinin simmetriya mərkəzi olan C nöqtəsinə bu xəttin mərkəzi deyilir.

Teorem 2. *$C(x_0,y_0)$ nöqtəsinin (1)tənliyi ilə verilən ikitərtibli xəttin mərkəzi olması üçün zəruri və kafi şərt x_0,y_0 ədədlər cütünün*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases},$$

(4) *sisteminin həlli olmasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $C(x_0, y_0\ )$ ikitərtibli γ xəttinin mərkəzidir. Göstərək ki, x_0, y_0 cütü (4) sistemini ödəyir. C nöqtəsindən $\vec{p}\ (p_1, p_2)$ və $\vec{q}\ (q_1, q_2)$ vektorlarına paralel olan asimptotik olmayan istiqamətli iki vətər keçirək. C γ xəttinin mərkəzi olduğundan, bu nöqtə çəkilən hər iki vətərin orta nöqtəsidir. Teorem 1-ə görə

$$F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0,$$
$$F_1(x_0, y_0)q_1 + F_2(x_0, y_0)q_2 = 0$$

$\vec{p}$ və $\vec{q}$ kollinear olmayan vektorlardır, ona görə də $\begin{vmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Deməli, $F(x_0, y_0) = 0, F(x_0, y_0) = 0$, yəni C nöqtəsinin koordinatları (4) tənliklər sistemini ödəyirlər.

Tərsinə, tutaq ki, $C(x_0, y_0\ )$ nöqtəsinin koordinatları (4) tənliklər sistemini ödəyirlər. Göstərək ki, C γ xəttinin mərkəzidir. Koordinat başlanğıcını $C(x_0, y_0\ )$ nöqtəsinə köçürək və yeni koordinat sistemində xəttin tənliyini yazaq. Bu halda koordinatların çevirmə düsturları $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ şəklindədir, ona görə də x və y-in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə qoymaqla γ xəttinin yeni koordinat sistemindəki tənliyini alarıq:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a'_{10}\ X + 2a'_{20}Y + a'_{00} = 0, \tag{5}$$

burada $a'_{10} = F_1(x_0, y_0)$, $a'_{20} = F_2(x_0, y_0)$, $a'_{00} = F(x_0, y_0)$.

$C(x_0, y_0\ )$ nöqtəsinin koordinatları (4) sistemini ödədiklərindən $a'_{10} = 0$, $a'_{20} = 0$, ona görə də (5) tənliyi belə yazılır:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + +a'_{00} = 0.$$

Bu tənlikdən görünür ki, C γ xəttinin simmetriya mərkəzidir. Doğrudan da, əgər $M(x\ , y\ ) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(-x, -y) \in \gamma$, burada M' C nöqtəsinə nəzərən M nöqtəsinə simmetrik olan nöqtədir. Beləliklə, C γ xəttinin mərkəzidir. Teorem isbat olundu.

Nəticə. *Koordinat başlanğıcının (1) tənliyi ilə verilmiş xəttin mərkəzi olması üçün zəruri və kafi şərt* $a_{10} = a_{20} = 0$ *münasibətinin ödənilməsidir.*

Doğrudan da, $(0,0)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $a_{10} = a_{20} = 0$ olduqda (4) sistemini ödəyir.

Teorem 2 verilmiş xəttin mərkəzlərinin varlığı ilə bağlı məsələni tədqiq etməyə imkan verir. Məsələ (4) tənliklər sisteminin tədqiqinə gətirilir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \tag{6}$$

matrislərinə baxaq və bu matrislərin ranqlarını uyğun olaraq r və R ilə işarə edək. Aşkardır ki, $r \leq R$. Mümkün halları qeyd edək:

1) $r = R = 2$. Bu halda (4) sisteminin yeganə həlli vardır və ona görə də γ xətti bir və yalnız bir mərkəzə malikdir. Belə xassəyə malik olan xətlərə mərkəzi xətlər deyilir.

2) $r = R = 1.$ Bu halda (3) sisteminin sonsuz həllər çoxluğu vardır: (4) sisteminin tənliklərindən biri digərinin nəticəsidir. Xəttini mərkəzlər düz xətti vardır.Bu düz xətt (4) sisteminin tənliklərindən biri ilə təyin olunur.

3) $r = 1, R = 2.$ (4) sisteminin həlli yoxdur və buna uyğun olaraq, xəttin heç bir mərkəzi yoxdur.

Mərkəzləri olmayan və ya birdən çox mərkəzi olan xətlərə qeyri-mərkəzi xətlər deyilir. Yuxarıdakı mühakimələr göstərir ki, xətt yalnız və yalnız $\Delta \neq 0$ olduqda mərkəzi xətt olur. Beləliklə, elliptik tip və hiperbolik tip xətlər mərkəzi, parabolik tip xətlər isə qeyri-mərkəzi xətlərdir.

Ellips və hiperbola mərkəzi xətlərdir ($\Delta \neq 0$), ona görə də bu xətlərin bir və yalnız bir mərkəzi vardır (koordinat başlanğıcı). $y^2 = 2px$ kanonik tənliyi ilə verilən parabola halında (6) matrislərinin $r = 1,\ R = 2$ ranqları vardır, ona görə də parabolanın mərkəzi yoxdur.

2. Əgər $M_0 \in \gamma$ nöqtəsi bu xəttin mərkəzidirsə, ona xəttin məxsusi nöqtəsi, əks halda isə adi nöqtəsi deyilir.

İkitərtibli xəttin adi M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt, xətti üst –üstə düşən iki nöqtədə kəsdikdə və ya bütünlüklə bu xətt üzərində yerləşdikdə, M_0 nöqtəsində ikitərtibli xəttə toxunan düz xətt adlanır.

Teorem 3. *İkitərtibli xəttin hər bir adi nöqtəsində bir və yalnız bir toxunanı vardır. Əgər xətt (1) ümumi tənliyi ilə verilmişdirsə, onda bu xəttin $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində toxunanının*

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{01}x_0 + a_{02}y_0 + a_{00}) = 0,$$

və ya

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0$$

(7)

tənliyi vardır.

İsbatı. Tutaq ki, M_0 nöqtəsindən keçən l düz xətti $x = x_0 + p_1 t,\ y = y_0 + p_2 t$ parametrik tənlikləri ilə verilmişdir. Ona görə də l düz xəttinin γ xətti ilə kəsişmə nöqtələrinin parametrləri

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \tag{8}$$

tənliyi ilə təyin olunacaq. Göstərək ki, l düz xətti yalnız və yalnız $Q = 0$ olduqda toxunan olur. Doğrudan da, əgər l toxunandırsa, onda (8) tənliyinin ya üst-üstə düşən iki həlli, ya da sonsuz həllər çoxluğu vardır. Hər iki halda $Q = 0$ olur. Tərsinə, əgər $Q = 0$ olarsa, onda (8) tənliyinin ya üst-üstə düşən iki kökü vardır ($P \neq 0$ olduqda), ya da sonsuz həllər çoxluğu vardır ($P = 0$ olduqda). $Q = 0$ şərti o deməkdir ki,

$$F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0\,. \tag{9}$$

$M_0(x_0, y_0)$-adi nöqtə olduğundan, $F_1(x_0, y_0),\ \mathrm{F}_2(x_0, y_0)$ eyni vaxtda sıfıra bərabər deyil. Ona görə də (9) bərabərliyi yeganə $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru istiqamətini təyin edir. Belə bir vektor olaraq, məsələn, $\vec{t}\,(F_2(x_0, y_0), -F_1(x_0, y_0))$ vektorunu göstərmək olar. M_0 nöqtəsindən $\vec{t}$ vektoru istiqamətində bir düz xətt keçdiyindən M_0 nöqtəsində yeganə toxunan vardır.

Toxunan M_0 nöqtəsindən $\vec{t}$ vektoru istiqamətində keçdiyindən,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & F_2(x_0, y_0) \\ y - y_0 & -F_1(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

(10)

tənliyi vardır.

$M_0 \in \gamma$ olduğundan,

$$F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0 + F_0(x_0, y_0) = 0.$$

Bu bərabərliyi (10) bərabərliyində nəzərə alaq:

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0.$$

Alınan tənlik (7) tənliyidir. Teorem isbat olundu.

Ellips, hiperbola və parabolanın bütün nöqtələri adi nöqtələr olduqlarından bu xətlərin hər bir nöqtəsində bir yalnız bir toxunan vardır. Bu xətlərin toxunanlarının tənliklərini yazaq.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsi halında $a_{11} = \frac{1}{a^2},\ a_{22} = \frac{1}{b^2},\ a_{00} = -1,\ a_{12} = a_{10} = a_{20} = 0$ olduğundan (x_0, y_0) nöqtəsində toxunanın tənliyi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

şəklindədir.

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolası halında $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = -\frac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1,\ a_{12} = a_{10} =$ $= a_{20} = 0$ olduğuna görə (x_0, y_0) nöqtəsində toxunanın tənliyi

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

şəklindədir.

3) $y^2 = 2px$ parabolası halında $a_{22} = 1,\ a_{10} = -p,\quad a_{11} = a_{12} = a_{20} = a_{00} = 0$ olduğundan (x_0, y_0) nöqtəsində toxunanın tənliyi

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

şəklindədir.

XIV Mühazirə

Vektorial hasil, xassələri. Vektorial hasil vektorunun koordinatları. Vektorial hasilin tətbiqləri.

1. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b}$ kollinear olmayan vektorlardır. Fəzanın müəyyən M nöqtəsindən $\overrightarrow{MA}=\vec{a},\overrightarrow{MB}=\vec{b}$ vektorlarım ayıraq və MACB paraleloqramını elə quraq ki, MA və MB parçaları bu paraleloqramın qonşu tərəfləri olsun. MACB paraleloqramı $\vec{a},\vec{b}$ vektorları üzərində qurulan paraleloqram adlanır. Fəzada sonsuz sayda belə paraleloqramlar qurmaq olar. Onların hamısı bir-birinə bərabər olacaqlar. Bu isə onların sahələrinin eyni olmasına gətirib çıxarır.

Tutaq ki, fəza oriyentasiya olunmuşdur.

Verilmiş nizamla götürülən kollinear olmayan $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasili, uzunluğu bu vektorlar üzərində qurulan paraleloqramın sahəsinə bərabər olan elə $\vec{p}$ vektoruna deyilir, bu vektor $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarına perpendikulyardır və elə istiqamətlənmişdir ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{p}$ bazisi sağ oriyentasiyalı bazisdir. Kollinear vektorlann vektorial hasili sıfır-vektora bərabər hesab olunur.

$\vec{a},\vec{b}$ vektorlarmm vektorial hasili $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ və ya $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ kimi işarə olunur.

<u>Teorem .</u> Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarmın ortononnallaşmış sağ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

koordinatları vardırsa, onda $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ vektorunun $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left\{\begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 b_3 \\ a_1 b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}\right\}$ koordinatları vardır.

Vektorların vektorial hasilinin aşağıdakı əsas xassələrini qeyd edə bilərik:

1. $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$=-$\left[\vec{b}\vec{a}\right]$.
2. $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a}\vec{b}\right]$.
3. $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\vec{c}\right]$.

Vektorial hasil əməlinin aşağıdakı tətbiqələri vardır:

1) Paraleloqramın sahəsinin hesablanmasına vektorial hasilin tətbiqi.

Tutaq ki, hər hansı $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. Bu vektorlar üzərində qurulan paraleloqramın sahəsi

$$S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

2) Üçbucağın sahəsinin hesablanmasına vektorial hasilin tətbiqi.

Tutaq ki, təpələri A,B,C nöqtələri olan üçbucaq verilmişdir. A,B,C üçbucağının sahəsi

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

XV Mühazirə

Qarışıq hasil, xassələri, koordinatlarla ifadəsi. Qarışıq hasilin tetraedrin həcminin hesablanmasına tətbiqi

I. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ komplanar olmayan vektorlardır. Fəzanın müəyyən M nöqtəsindən $\overrightarrow{MA}=\vec{a},\overrightarrow{MB}=\vec{b},\overrightarrow{MC}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq və MADBCAıDıBı paralelepipedini elə quraq ki, MA, MB və MC parçaları bu paralelepipedin tilləri olsun. Quralan paralelepipedə $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları üzərində qurulan paralelepiped deyilir. Tutaq ki, oriyentasiya olunmuşdur. Komplanar olmayan, verilmiş nizamla götürülən $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlannın qarışıq hasili dedikdə bu vektorlar üzərində qurulan paralelepipedin, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sağ bazisi olduqda "+" işarəsi ilə, sol bazis olduqda isə "-" işarəsi ilə götürülən həcmi başa düşülür.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlannın qarışıq hasili $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ və ya $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ kimi işarə olunur.

Teorem. İxtiyari $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bazisi və ortonormallaşmış sağ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisi üçün $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ =(i,j,k)/(a,b ,c) bərabərliyi doğrudur.

Teorem. Əgər $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorlarmın ixtiyari* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ *bazisində* $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ *koordinatlan vardırsa, onda* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Nəticə. Əgər $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarının ortonormallaşmış $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sağ bazisində $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ koordinatlan vardırsa, onda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$.

Qarışıq hasilin əsas xasssələrini qeyd edək:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$;
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c},\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a},\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c}=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
4. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}$

,
burada α- ixtiyari həqiqi ədəddir.

Qarışıq hasilin bəzi tətbiqlərini qeyd edək.

1. Təpələri A,B,C,D nöqtələrində olan tetraedrin həcmi

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

2. A,B,C,D nöqtələri yalnız və yalnız $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$ bərabərliyi ödənildikdə bir müstəvi üzərində yerləşirlər.

3. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları yalnız və yalnız $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$=0 münasibəti ödənildikdə komplanar olurlar.

XVI Mühazirə

. Fəzada müstəvinin verilmə üsulları

Tutaq ki, fəzada σ müstəvisi verilmişdir. σ müstəvisinə paralel olan bütün vektorlarin L çoxluğu üçölçülü V vektor fəzasının ikiölçülü alt vektor fəzasıdır. L alt fəzası V-nin yönəldici alt fəzası adlanır. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ -L-dən olan xətti asılı olmayan vektorlar cütüdür. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları L alt fəzasımn bazisini əmələ gətirirlər. σ müstəvisi üzərində müəyyən M_0 nöqtəsini götürək. M_0 nöqtəsinin σ müstəvisinə aid olması üçün zəruri və kafi şərt $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ vektorlarmm komplanarlığı, yəni onlarm qarışıq hasilinin sifira bərabərliyidir: $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0.$ (1)

Bu bərabərlikdən istifadə edərək, müxtəlif üsullarla verilən σ müstəvisinin tənliyini yazaq: 1. Afin koordinat sistemində koordinatlan ilə $M_0(x_0, y_0, z_0)$nöqtəsi və iki kollinear olmayan $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorları verilmişdir. M_0 nöqtəsindən keçən və yönəldici alt fəzası *L(a, b*) olan σ müstəvisinin tənliyini yazaq. (1) bərabərliyinə görə M(x, ys z) nöqtəsi yalnız və yalnız

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1 \\ y-y_0 & a_2 & b_2 \\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənildikdə σ müstəvisinə aid olur.

$M \in \sigma$ olduqda (1) bərabərliyi ödənüir və deməli, M nöqtəsinin x, y, z koordinatları (2) tənliyini ödəyirlər. $M \notin \sigma$ olduqda isə $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ vektorları komplanar olmurlar, ona görə də (1) bərabərliyi ödənilmir və deməli, x, y, z koordinatlan (2) tənliyini ödəmirlər. Beləliklə, (2) tənliyi σ müstəvisinin tənliyidir.

2. Afm koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş və bir düz xəttə aid olmayan üç Mı(xı,yı,zı), $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazaq. Verilmiş nöqtələr bir düz xəttə aid olmadıqlarından $\overrightarrow{M_1M_2}$ və $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorları kollinear deyil və baxılan müstəvinin yönəldici alt fəzası L($\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_1M_3}$) alt fəzası olan müstəvi kimi təyin etmək olar. Ona görə də M_1, M_2, M_3 nöqtələrindən keçən müstəvinin (2)-yə analoji olan aşağıdakı tənliyi yaza bilərik:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. σ müstəvisinin yönəldici alt fəzasının ixtiyari vektoruna perpendikulyar olan $\vec{n}$ vektoruna baxaq. Bu halda deyirlər ki, $\vec{n}$ vektoru σ müstəvisinə perpendikulyardır. Tutaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatlan ilə $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi və sıfırdan fərqli $\vec{n}$ (A, B, C) vektoru verilmişdir. Mo nöqtəsindən $\vec{n}$ vektoruna perpendikulyar keçən σ müstəvisinin tənliyini yazaq. M(x, y, z) nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{n}$ vektorlan ortoqonal olduqda, yəni $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$ şərti ödəndikdə σ müstəvisinə aid olur. $\overrightarrow{M_0M}$ vektorunun $\overrightarrow{M_0M}$ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) koordinatlannı nəzərə alsaq,
sonuncu bərabərliyi

$$A(x-xo)+B(y-yo)+C(z-z_0)=0 \qquad (4)$$

şəklində yamaq olar. (4) tənliyi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{n}$ vektoruna perpendikulyar olan müstəvinin tənliyidir.

4. Tutaq ki, fəzada afın koordinat sistemi daxil edilmişdir. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici alt fəzası $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ bazisli L fəzası olan σ müstəvisinə baxaq. M(x, y, z) nöqtəsi yalnız və yalnız (1) bərabərliyi ödəndikdə σ müstəvisinə aid olur. $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ vektorlarının komplanarhğına əsasən elə u, v ədədləri vardır ki,

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}. \quad (5)$$

Beləliklə, M nöqtəsi yalnız və yalnız (5) bərabərliyi ödəndikdə σ müstəvisinə aid olur. $\overrightarrow{M_0M}$ vektorumm $\overrightarrow{M_0M}$ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) koordinatları olduğundan (5) şərti

$$\begin{cases} x - x_0 = ua_1 + vb_1, \\ y - y_0 = ua_2 + vb_2, \\ z - z_0 = ua_3 + vb_3 \end{cases}$$

bərabərliklər sistemi şəklində yazıla bilər. Bu bərabərliklərə σ müstəvisinin parametrik tənlikləri deyilir.

XVIII Mühazirə

İki müstəvi arasında qalan bucaq. Müstəvinin normal tənliyi. Nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə

2. Tutaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində Ax+By+Cz+D=0 tənliyi ilə σ müstəvisi və bu müstəviyə aid olmayan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi verilmişdir. M_0 nöqtəsindən σ müstəvisinə qədər olan p(Mo, σ) məsafəsi

$$\rho(M_0, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(3)

düsturu ilə hesablanır. (4) düsturundan astifadə edərək, düzbucaqh koordinat sistemində $Ax+By+Cz+D_1=0$, $Ax+By+Cz+D_2=0$ tənlikləri ilə verilmiş və bir-birinə paralel olan σ_1 və σ_2 müstəviləri arasmdakı $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ məsafəsini tapaq, burada $D_1 \neq D_2$. Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - σ_1 müstəvisinin ixtiyari nöqtəsidir. Onda aşkardır ki, $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \rho(M_0, \sigma_2)$, ona görə də (4) düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Tırtaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində (1) və (2) tənlikləri ilə kəsişən σ ı və σ2 müstəviləri verilmişdir. Bu müstəvilər arasındakı bucağı tapaq. İki kəsişən müstəvi dörd ikiüzlü bucaq əmələ gətirirlər və bu bucaqlardan ixtiyari biri verilmiş müstəvilər arasındakı bucaq adlanır . $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ və $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ vektorları uyğun olaraq, σ ι və σ2 müstəvilərinə perpendikulyarГ olduqlanndan $\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ bucağı σ ı və σ2 müstəvilərinin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucaqlardan birinin xətti bucağıdır. Ona görə də ϕ bucağmı təyin etmək yetərlidir:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (4)$$

(4) düsturundan görünür ki, σ ı və σ2 müstəviləri yalnız və yalnız $\vec{n}\vec{n}_2 = 0$, yəni $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ olduqda perpendikulyardırlar.

Müstəvinin normal tənliyi

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

şəklindədir, burada $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ və $p \geq 0$.

XIX Mühazirə

Fəzada düz xəttin verilmə üsulları

1. Fəzada verilmiş düz xəttə paralel olan istənilən sıfırdan fərqli vektor onun *yönəldici,* yaxud *istiqamətverici vektoru* adlanır. Düz xəttin vəziyyəti bu düz xəttin yönəldici vektorunun və müəyyən nöqtəsinin, yaxud iki nöqtəsinin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur. Fəzada düz xətt üç üsulla verilə bilər:

1) bir nöqtəsi və bir yünəldici vektoru ilə;
2) iki müxtəlif nöqtəsi ilə;
3) iki müstəvinin kəsişməsi kimi.

Tutaq ki, fəzada $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ afin koordinat sistemi seçilmişdir və bu sistemdə d düz xəttinin müəyyən $M_0(x_0, y_0, z_3)$ nöqtəsinin və yönəldici $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ vektorunun koordinatları məlumdur d düz xəttinin tənliyini yazaq. Aşkardır ki, $M(x, y, z)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorları kollinear olduqda d düz xəttinə aid olar. Kollinearlıq şərtini

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a} \qquad (1)$$

və ya

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar. (1) tənliyi düz xəttin fəzada vektorial tənliyi, (2) tənlikləri isə kanonik tənlikləri adlanır.

Fəzada iki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ afin koordinat sistemində d düz xəttinin $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrinin koordinatları məlumdur Onda $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Bu vektor $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ afin koordinat sistemində $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ koordinatlarına malikdir. Ona görə də (2) düsturuna əsasən d düz xəttinin tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{3}$$

(3) tənliklərinə fəzada iki nöqtədən keçən və ya iki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənlikləri deyilir.

Mühazirə 20

Fəzada iki düz xəttin, düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti. Fəzada iki düz xətt arasında qalan bucaq

Tutaq ki, fəzada $d_1 = (M_1, \vec{p}_1)$ və $d_2 = (M_2, \vec{p}_2)$ düz xətləri verilmişdir. Bu düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətinin aşağıdakı 4 halı vardır:

1) $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}, \vec{p}_2\right) \neq 0$ şərti ödənildikdə $d_1 = (M_1, \vec{p}_1)$ və $d_2 = (M_2, \vec{p}_2)$ düz xətləri çarpaz olurlar;

2) $d_1 = (M_1, \vec{p}_1)$ və $d_2 = (M_2, \vec{p}_2)$ düz xətləri yalnız və yalnız $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}, \vec{p}_2\right) = 0$ şərti ödənildikdə və $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ vektorları kollinear olmadıqda bir nöqtədə kəsişirlər;

3) $d_1 = (M_1, \vec{p}_1)$ və $d_2 = (M_2, \vec{p}_2)$ düz xətləri yalnız və yalnız $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}, \vec{p}_2\right) = 0$ şərti ödənildikdə, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ vektorları kollinear olduqda, lakin $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1$ vektorları kollinear olmadıqda bir-birinə paralel olurlar;

4) $d_1 = (M_1, \vec{p}_1)$ və $d_2 = (M_2, \vec{p}_2)$ düz xətləri yalnız və yalnız $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ və $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorları cüt-cüt kollinear olduqda üst-üstə düşürlər.

Tutaq ki, fəzada $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən, yönəldici vektoru $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektoru olan d düz xətti və ümumi tənliyi $Ax + By + Cz + D = 0$ şəklində olan σ müstəvisi verilmişdir. d düz xəttinin və σ müstəvisinin qarşılıqlı vəziyyətinin aşağıdakı 3 halı vardır:

1) d düz xətti yalnız və yalnız

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$$

şərti ödənildikdə σ müstəvisini bir nöqtədə kəsir. Kəsişmə nöqtəsinin tapılması üçün d düz xəttinin və σ müstəvisinin tənlikləri birlikdə həll olunur.

2) d düz xətti yalnız və yalnız $\vec{a} // \sigma, M_0 \notin \sigma$ və ya

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

şərtləri ödənildikdə σ müstəvisinə paralel olur;

3) d düz xətti yalnız və yalnız $\vec{a} // \sigma, M_0 \in \sigma$ və ya

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

şərtləri ödənildikdə σ müstəvisinin üzərində yerləşir.

Tutaq ki, fəzada yönəldici vektorları $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ və $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ olan d_1 və d_2 düz xətləri verilmişdir. Bu düz xətlər arasındakı φ bucaqı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \quad (1)$$

(1) düsturundan görünür ki, d_1 və d_2 düz xətləri yalnız və yalnız $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, yaxud $p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = 0$ şərti ödənildikdə perpendikulyar olurlar.

XXI Mühazirə

İkitərtibli səth anlayışı. Fırlanma səthləri. Silindrik səthlər

Fəzada ixtiyari afin koordinat sistemindəki koordinatları iki tərtibli

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + \\ + 2a_{20} + 2a_{30} + a_{00} = 0 \tag{1}$$

tənliyini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğuna iki tərtibli səth deyilir, burada $a_{11}, a_{22}, ..., a_{00}$ – həqiqi ədədlərdir, belə ki, iki tərtibli hədd əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir.

Kəsiklər metodu yalnız iki tərtibli səthlərə deyil, ixtiyari səthlərə tətbiq oluna bilər. Bu metodun mahiyyətini izah edək. Tutaq ki, S səthi düzbucaqlı koordinat sistemində (1) tənliyi ilə verilmişdir. S səthini koordinat müstəvilərinə paralel olan müstəvilərlə (və ya koordinat müstəviləri ilə) kəsirik və səthin bu müstəvilərlə kəsişmə xətlərini təyin edirik. Bu xətlərin tiplərinə əsasən səthin forması haqqında fikir yürüdürük. Kəsiklər metodunun tətbiqi aşağıdakı teoremə əsaslanır:

Teorem 1. Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində (1) tənliyi ilə S səthi və $z = h$ tənliyi ilə Oxy müstəvisinə paralel olan, və ya onunla üst-üstə düşən σ müstəvisi verilmişdir. Əgər S səthi σ müstəvisi ilə γ xətti boyunca kəsişirsə, onda γ xəttinin Oxy müstəvisi üzərindəki proyeksiyasının $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində

$$F(x, y, h) = 0$$

tənliyi vardır.

Hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtənin müəyyən qeyd olunmuş d düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan çevrəni də özündə saxlayan səthə fırlanma səthi deyilir. Ətrafında fırlanmanın aparıldığı d düz xətti fırlanma oxu adlanır. Fırlanma səthinin fırlanma oxuna perpendikulyar olan müstəvilərlə kəsişməsindən alınan çevrələrə paralellər deyilir. Fırlanma oxundan keçən müstəvilər isə fırlanma səthini meridianlar adlandırılan xətlər boyunca kəsirlər.

Fırlanma səthi aşağıdakı kimi təyin oluna bilər. Tutaq ki, σ müstəvisində d vüz xətti və γ xətti verilmişdir. γ xəttinin d düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan səth oxu d düz xətti olan fırlanma səthidir. γ

xəttinin hər bir nöqtəsi d düz xətti ətrafında fırlanaraq, bu səthin paralelini əmələ gətirir.

Aşağıdakı teorem γ xəttinin σ müstəvisindəki tənliyinə əsasən, fırlanma səthinin tənliyini müəyyən etməyə imkan verir.

Teorem 2. Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *koordinat sistemində*

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

tənliyi

$$x = f(z), y = 0$$

tənlikləri ilə verilmiş xəttin Oz *oxu ətrafında fırlanmasından alınan fırlanma səthinin tənliyidir.*

Hər bir M nöqtəsi ilə bərabər, M nöqtəsindən keçən və verilmiş sıfırdan fərqli $\vec{p}$ vektoruna paralel olan düz xətti də özündə saxlayan səthə silindrik səth, və ya silindr deyilir. $\vec{p}$ vektoruna paralel olan və silindrik səth üzərində yerləşən düz xətlər bu səthin doğuranları adlanır.

Silindrik səth bu şəkildə qurula bilər. Tutaq ki, $\gamma -$müəyyən xətdir, $\vec{p}$ isə sıfırdan fərqli vektordur. Hər biri γ xəttinin müəyyən nöqtəsindən keçən və

$\vec{p}$ vektoruna paralel olan bütün düz xətlərin əmələ gətirdiyi səth silindrik səthdir. Bu halda γ xətti bu silindrik səthin yönəldicisi adlanır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Tutaq ki, fəzada düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *koordinat sistemi və müstəvi üzərində* $O\vec{i}\vec{j}$ *koordinat sistemində*

$$F(x, y) = 0 \qquad (2)$$

tənliyi ilə γ *xətti verilmişdir.*

Onda (2) tənliyi fəzada yönəldicisi γ *xətti olan və doğuranları* $\vec{k}$ *vektoruna paralel olan silindrik* S *səthini təyin edir.*

Əgər (2) tənliyi x və y dəyişənlərinə nəzərən iki dərəcəli tənlikdirsə, onda yönəldicisi γ xətti olan və doğuranları $\vec{k}$ vektoruna paralel olan silindrik səthə iki tərtibli silindrik səth (və ya qısa şəkildə iki tərtibli silindr) deyilir. (2) yönəldicisinin ellips, hiperbola, və ya parabola olmasından asılı olaraq, bu silindri elliptik, hiperbolik, və ya parabolik silindr adlandırırlar.

Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi elə seçilmişdir ki, iki tərtibli silindrik səthin doğuranları $\vec{k}$ vektoruna paraleldirlər, γ yönəldicisinin isə $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində kanonik tənlikləri vardır. Bu halda mümkün silindrik səthlərin aşağıdakı tənlikləri olacaqdır:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – elliptik silindr;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ – hiperbolik silindr;

$y^2=2px$ - parabolik silindr;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – Oz oxu boyunca kəsişən iki müstəviyə parçalanan silindr;

$x^2-a^2=0,$ $a\neq 0$ - paralel müstəvilər cütünə parçalanan silindr;

$x^2=0$ - üst-üstə düşən müstəvilər cütünü ifadə edən silindr.

Bu tənliklərə uyğun iki tərtibli silindrik səthin kanonik tənlikləri deyilir.

XXII Mühazirə

Ellipsoidlər və hiperboloidlər

Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilən səthə ellipsoid deyilir. (1) tənliyi ellipsoidin kanonik tənliyi adlanır. Müsbət a,b,c ədədlərinə ellipsoidin yarımoxları deyilir. Əgər $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ olarsa, onda deyirlər ki, ellipsoid üçoxludur. (1) kanonik tənliyindən görünür ki, ellipsoid koordinat müstəvilərinə, koordinat başlanğıcına və koordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. Ellipsoidin simmetriya mərkəzinə onun mərkəzi, simmetriya oxlarına isə onun oxları deyilir. Oxlardan hər biri ellipsoidi iki nöqtədə kəsir. Bu nöqtələr ellipsoidin təpələri adlanır. Üçoxlu ellipsoidin altı təpəsi vardır: $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0), C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$. Asanlıqla müəyyən olunur ki,

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c.$$

Ellipsoidin $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyinin Oxy müstəvisində $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \qquad (2)$$

tənliyi vardır.

Üç mümkün halı qeyd edə bilərik.

1) $|h| < c.$ Bu halda kəsikdə yarımoxları $a^{\bullet} = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b^{\bullet} = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ ədədləri olan ellips alınır. Xüsusi halda Oxy müstəvisi ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsi üzrə kəsir.

2) $|h| = c.$ (2) tənliyi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ şəklində yazılır. $z = h$ müstəvisi ellipsoidlə yalnız bir ortaq nöqtəyə-ellipsoidin təpələrindən birinə malik olur.

3) $|h| > c.$ (2) tənliyi xəyali ellipsin tənliyi olur. $z = h$ müstəvisinin ellipsoidlə ortaq nöqtələri olmur.

Əgər ellipsoidin iki yarım oxu bərabərdirsə, məsələn, $a = b$ olarsa, onda ona fırlanma ellipsoidi deyilir və tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

şəklində yazılır. Qeyd edək ki, (3) səthi Oxz müstəvisində yerləşən

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipsinin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.

Hər üç oxu bir-birinə bərabər olduqda, yəni $a=b=c$ şərtləri ödənildikdə ellipsoid sfera olur: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Deməli, sfera ellipsoidin xüsusi halıdır.

Biroyuqlu və ikioyuqlu hiperboloidləri fərqləndirirlər.

1) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

tənliyi ilə təyin olunan səthə biroyuqlu hiperboloid deyilir. (4) tənliyi biroyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyi adlanır. Kanonik tənlikdən görünür ki, biroyuqlu hiperboloid koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına (səthin oxları) və koordinat başlanğıcına (səthin mərkəzi) nəzərən simmetrikdir. Ox və Oy oxları biroyuqlu hiperboloidi $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0)$ və $B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0)$ nöqtələrində kəsirlər. Bu oxlar biroyuqlu hiperboloidin həqiqi oxları, göstərilən nöqtələr isə onun təpələri adlanır. Oz oxunun isə biroyuqlu hiperboloidlə ortaq nöqtələri yoxdur. Ona görə də Oz oxuna biroyuqlu hiperboloidin xəyali oxu deyilir.

(4) səthinin $z=h$ müstəvisi ilə kəsişməsindən yarımoxları $a^{\bullet}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$, $b^{\bullet}=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ ədədləri olan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

ellipsi alınır. $h=0$ olduqda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsi alınır. Bu ellipsə biroyuqlu hiperboloidin boğaz ellipsi deyilir. Eyni qayda ilə biroyuqlu hiperboloidin $x=h$ və $y=h$ müstəviləri ilə kəsiklərini təyin etmək olur.

Əgər (4) tənliyində $a=b$ olarsa, onda fırlanma biroyuqlu hiperboloidi adlandırılan səthin

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

tənliyini alarıq. Bu səth $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ hiperbolasının Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.

2) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{5}$$

tənliyi ilə verilən səthə ikioyuqlu hiperboloid deyilir. (5) tənliyi ikioyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyi adlanır. (5) tənliyindən görünür ki, ikioyuqlu hiperboloid koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına (simmetriya oxları) və koordinat başlanğıcına (simmetriya mərkəzi) nəzərən simmetrikdir. Oz oxu (5) səthini onun təpələri adlandırılan $C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$ nöqtələrində kəsir. Oz oxuna ikioyuqlu hiperboloidin həqiqi oxu deyilir. Ox və Oy simmetriya oxlarının ikioyuqlu hiperboloidlə ortaq nöqtələri olmadığından, bu oxlar xəyali oxlar adlanır.

(5) səthinin $z=h$ müstəvisi ilə kəsiyinin

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

tənliyi vardır. $|h|>c$ olduqda bu tənliklə ellips təyin olunur. Göstərmək olur ki, (5) səthinin $x=h$ və $y=h$ müstəviləri ilə kəsikləri hiperbolalardır.

Əgər (5) tənliyində $a=b$ olarsa, onda fırlanma ikioyuqlu hiperboloidi adlandırılan səthin

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

tənliyini alarıq. Qeyd edək ki, bu səth $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ hiperbolasının Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.

XXIII Mühazirə

Paraboloidlər

Elliptik və hiperbolik paraboloidləri fərqləndirirlər.

1) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (1)$$

tənliyi ilə təyin olunan səthə elliptik paraboloid deyilir. (1) tənliyi elliptik paraboloidin kanonik tənliyi adlanır. (1) tənliyindən görünür ki, elliptik paraboloid Oxz və Oyz koordinat müustəvilərinə və Oz koordinat oxuna (simmetriya oxu) nəzərən simmetrikdir. Bu səth Oxy koordinat müstəvisinə, Ox, Oy koordinat oxlarına və keoordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Elliptik paraboloidin öz oxu ilə kəsişmə nöqtəsiniə onun təpəsi deyilir. Səth (1) kanonik tənliyi ilə verildiyi halda koordinat başlanğıcı səthin təpəsində seçilmiş olur.

(1) kanonik tənliyi ilə verilmiş elliptik paraboloidin $z=h$ müstəvisi ilə kəsiyinin

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad (2)$$

tənliyi vardır.

(2) tənliyi $h>0$ olduqda ellips, $h=0$ olduqda koordinat başlanğıcında kəsişən xəyali düz xətlər cütünü, $h<0$ olduqda isə xəyali ellips təyin edir.

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, (1) səthinin $y=h$ və $x=h$ müstəviləri ilə kəsikləri parabolalardır.

Əgər (1) tənliyində $a=b$ qəbul etsək, fırlanma paraboloidi adlanan səthin

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z$$

tənliyini alarıq. Bu səth $x^2 = 2a^2 z$ parabolasının Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.

2) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{3}$$

tənliyi ilə təyin olunan səthə hiperbolik paraboloid deyilir. (3) tənliyi hiperbolik paraboloidin kanonik tənliyi adlanır. Elliptik paraboloiddə olduğu kimi, hiperbolik paraboloid Oxz və Oyz koordinat müustəvilərinə və Oz koordinat oxuna (simmetriya oxu) nəzərən simmetrikdir. Bu səth Oxy koordinat müstəvisinə, Ox, Oy koordinat oxlarına və keoordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Hiperbolik paraboloidin öz oxu ilə kəsişmə nöqtəsiniə onun təpəsi deyilir. Səth (3) kanonik tənliyi ilə verildiyi halda koordinat başlanğıcı səthin təpəsində seçilmiş olur.

(3) kanonik tənliyi ilə verilmiş hiperbolik paraboloidin $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyinin

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \tag{4}$$

tənliyi vardır.

$h > 0$ olduqda (4) tənliyi hiperbola, $h = 0$ olduqda səthin təpəsində kəsişən həqiqi düz xətlər cütünü, $h < 0$ olduqda isə hiperbola təyin edir.

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, (3) səthinin $y = h$ və $x = h$ müstəviləri ilə kəsikləri parabolalardır.