ПРОГРАММА
дисциплины «Приближенные методы решения алгебраических уравнений»
(лекция-30 часов)

IV семестр

Предисловие

Целью предмета является обучение студентов вычислительным методам, используемые в линейной алгебре и сравнение их с классическими методами, обучение студентов самостоятельного выбора вычислительного метода для решения заданной проблемы, а также построение алгоритмов на основе выбранного метода (студенты должны хорошо ознакомлены с классическим курсом - алгебры, математического анализа).

Введение

Линейная алгебра как область математики известна давно. Можно сказать, что люди начали заниматься линейной алгеброй с момента осознания самого себя. После появления ЭВМ специалисты все чаще обращались к методам линейной алгебры. В конструкции ЭВМ наряду с арифметическими операциями использовали логические операции. Первоначально программы составляли на машинном языке. Составление программ на машинном языке сопровождались некоторыми трудностями. Поэтому группы специалистов начали составлять алгоритмические языки, которые успешно

применялись в решении прикладных задач на ЭВМ. Использование алгоритмических языков расширили применение и возможности ЭВМ. С их помощью начали решать объемные задачи, в которых требовалось решать сложные системы. С этой целью разработали разные алгоритмы решения задачи алгебры и выяснилось, что наряду с классической линейной алгеброй существует и успешно развивается совсем другая линейная алгебра, о которой почти ничего не говорилось ни в основных, ни, даже, в специальных курсах. Эта линейная алгебра была тесно связана со многими областями математики, уходя своими корнями в самые разнообразные приложения, заставила учитывать особенности ЭВМ и языков программирования. Называлась она вычислительной линейной алгеброй.

Вычислительная алгебра сделала за последние годы громадные скачок вперед и является одним из самых развитых направлений численного анализа. Это связано с тем, что при решении многих прикладных задач методы классической алгебры были неустойчивыми. Поэтому численные методы алгебры стали естественной частью общего курса.

Для линейной алгебры характерна исключительная широта ее приложений. Учет конкретных особенностей задачи приводит к появлению новых модификаций численных методов, а желание решить данную задачу как можно лучше значительно увеличивает их число.

Что значит решать задачу лучше? Если задача решается на компьютерах, то типичной ситуацией для линейной алгебры является использование стандартных программ. По крайней мере, так должно быть. Но для пользования компьютеров безразлично, какой из численных методов заложен в основу той или иной стандартной программы. Его интересует, как правило, лишь три ее характеристики: время счета, объем требуемой памяти компьютеров и точность.

Легко сравнить методы по первым двум характеристикам. Что же касается точности, то это уже исследовать значительно сложнее. Например, итерационные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Существенный прогресс произошел в области исследования устойчивости численных методов, который связан с возникновением обратного анализа ошибок. Основная идея этого анализа заключается в том, что реально вычисленное решение рассматривается как точное для той же задачи, но с возмущенными входными данными. При этом само возмущение выбирается так, чтобы его действие оказалось эквивалентным совокупному влиянию всех ошибок округления.

Целью вычислительных методов линейной алгебры является обучение студентов современным методам линейной алгебры и ознакомлением способов, составление алгоритмов и их применений.

Теория возмущений в линейной алгебре.

При исследовании численных решений линейно алгебраических задач один из вопросов заключается в определении влияний малого возмущения входных данных на решение алгебраических задач. Поэтому в этом разделе рассмотрим малое возмущение, которое

вызвано тем, что суммарный эффект влияния ошибок округления в алгебраических процессах сводится в основном к малым возмущениям. К ним же сводятся и многие численные методы уточнения решений.

Используя нормы векторов и матриц, оценить погрешности округлений при выполнении матричных операций на компьютерах.

Устойчивые многочлены

Постановка задачи. Многочлены малых степеней и теорема Стодолы. Об истории задачи. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Многочлены g и h. Амплитудно-фазовая характеристика. Многочлены без чисто мнимых корней. Многочлены с вещественными коэффициентами. Амплитудно-фазовая характеристика многочленов третьей степени. Фазовая функция и фазовая характеристика. Фазовые характеристики многочленов третьей степени. Фазовая функция произведения. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Критерий Вышнеградского.

Теорема Эрмита-Билера

Амплитудно-фазовая характеристика устойчивого многочлена. Многочлены с перемежающимися корнями. Теорема Эрмита-Билера.

Индекс рациональной функции

Полюсы рациональной функции и ее главные коэффициенты. Индекс рациональной функции. Простейшие свойства индекса. Индекс инверсной функции.

Индекс и условие устойчивости

Устойчивые многочлены и индекс функций h/g и g/h. Многочлены с вещественными положительными коэффициентами.

Вычисление индекса

Алгорифм вычисления индекса. ряд Штурма. Число переменного знака. Теорема Штурма об индексе. Теорема Штурма и числе Корней.

Теорема Рауса.

Индекс на всей оси. Регулярный случай. Формулы деления с остатком. Алгорифм вычисления индекса в регулярном случае. Критерий того, что индекс рациональной функции равен степени знаменателя. Критерий Рауса.

Симметричные спектральные задачи

Постановка задач. Элементы теории возмущений. Теория последовательности Штурма для трехдиагональных матриц. Исчерпывание симметричных трехдиагональных матриц. Решение симметричных спектральных задач на компьютерах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.Н.Малышев. Введение в вычислительную линейную алгебру. Наука. 1991.
2. Д.Н.Фадеев, В.Н.Фадеев. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Наука, 1963.
3. В.В.Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 1-е изд. М.: Гостехиздат, 1953; 2-е изд. М.: Наука, 1966; 3-у изд.-М.: Наука, 1967.
5. Крейн М.Г., Наймарк М.А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. – Харьков, 1936.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – 1-е-5-е изд.-М.: Гостехизд, 1946, 1950, 1953, 1955, 1956.
7. Мейман Н.Н., Чеботарев Н.Г.Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. – Труды МИАН, 1949, т.26.
8. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем. –Л.: 1949.
9. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. – ИАН СССР, сер. Матем., 1942, т.6, с. 115-134.

Количество часов по темам

№	Темы	Кол. лек. часов
1	Введение.	2
2	Проведение вычислений на ЭВМ с учетом погрешности округлений.	2
3	Оценка погрешности округлений при выполнении матричных операций на компьютерах.	2
4	Дифференцирование и интегрирование матричных функций.	2
5	Переобразовании Хаусхолдера.	2
6	Постановка задачи. Многочлены малых степеней и теорема Стодолы.	2
7	Об истории задачи. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Многочлены g и h. Амплитудно-фазовая характеристика.	2
8	Многочлены без чисто мнимых корней. Многочлены с вещественными коэффициентами. Амплитудно-фазовая характеристика многочленов третьей степени. Фазовая функция и фазовая характеристика.	2
9	Фазовые характеристики многочленов третьей степени. Фазовая функция произведения. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Критерий Вышнеградского.	2

10	Теорема Эрмита-Билера.	2
11	Индекс рациональной функции.	2
12	Индекс и условие устойчивости.	2
13	Вычисление индекса.	2
14	Теорема Рауса.	2
15	Симметричные спектральные задачи.	2