ПРОГРАММА
дисциплины «Дискретная математика»
(лекция-30 часов, семинар-15 часов)

IV семестр

1) Функции алгебры логики. Существенные и фиктивные переменные. Эквивалентные и симметричные функции. Элементарные функции алгебры логики.

Функции $f(u_{i_1},..,u_{i_n})\big((u_{i_\nu} \neq u_{i_\mu}, \nu \neq \mu), u_i \in U(U = \{u_1,..,u_m,...\})\big)$ аргументы которой определены в множестве $E_2 = \{0,1\}$, и которые удовлетворяют условиям $f(\alpha_1,..,\alpha_n) \in E_2$ при $\alpha_i \in E_2 (i = \overline{1,n})$ называют функциями алгебры логики или булевыми функциями. К элементарным функциям алгебры логики относятся: постоянные «0», «1», тождественная функция, функция логического отрицания, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, сложение по mod 2, функция Шеффера.

2) Формулы. Реализация функции формулами. Формулы одинакового строения. Тавталогия и однозначно ложные формулы. Эквивалентность формул. Свойства элементарных функций.

Пусть B -некоторое подмножество функций из P_2.

а) Каждая функция $f(x_1,..,x_m)$ из B называется формулой над B.

б) Пусть $f_0(x_1,..,x_m)$ функция из B и $A_1...,A_m$ - выражения являющиеся формулами над B. Тогда выражение $f_0(A_1,..,A_m)$ называется формулой над B.

3) Принцип двойственности. Двойственные функции.

Функция $[f(x_1,..,x_n)]^*$, равная $\overline{f}(\overline{x}_1,..,\overline{x}_n)$, называется двойственной функцией к функции $f(x_1,..,x_n)$. Принцип двойственности: Если формула $L = C[f_1,..,f_s]$ реализует функцию $f(x_1,..,x_n)$, то формула $C[f_1^*,..,f_s^*]$, т.е. формула полученная из L заменой функций $f_1,..,f_s$ соответственно на $f_1^*,..,f_s^*$ реализует функцию $f^*(x_1..,x_n)$.

4) Разложение функций алгебры логики по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Любую функцию алгебры логики $f(x_1,..,x_n)$ для некоторого $m(1 \le m \le n)$ можно разложить следующим образом:

$$f(x_1,..,x_m,x_{m+1},..,x_n) =$$
$$= \bigvee_{(\alpha_1,..,\alpha_m)} x_1^{\alpha_1} \& \cdots \& x_m^{\alpha_m} \& f(\alpha_1,..,\alpha_m,x_{m+1},..,x_n)$$

С.Д.Н.Ф. выражается следующим образом:

$$f(x_1,..,x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1,..,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,..,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \& \cdots \& x_n^{\alpha_n}$$

С.К.Н.Ф. выражается следующим образом:

$$f(x_1,..,x_n) = \underset{\substack{(\alpha_1,..,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,..,\alpha_n)=0}}{\&} (x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee ......\vee x_n^{\overline{\alpha}_n}).$$

5) Полнота и замкнутость. Важнейшие замкнутые классы. Линейные и нелинейные функции. Многочлен Жегалкина. Теорема о полноте системы. Максимальный класс.

Система функций $\{f_1,..,f_s...\}$ из P_2 называется функционально полной, если любая функция алгебры логики может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Пусть Ω -некоторое подмножество функций из P_2. Замыканием Ω называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул через функции множества Ω. Важнейшие замкнутые классы: $T_0, T_{1,} S, M, L$. Теорема . Для того чтобы система функций Ω была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одной из пяти замкнутых классов $T_0, T_{1,} S, M, L$.

6) Понятие графа. Путь, цикл, петля. Связный граф.

Множество $A = \{a_1 a_2, ...\}$ и набор B неупорядоченных пар объектов (a_{i_k}, a_{j_k}) из A называется графом Γ. Система ребер графа Γ $A_{a_i a_j} = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}), ..., (a_{i_{s-1}}, a_{i_s})\}$ где $a_{i_1} = a_i, a_{i_s} = a_j$, называется путем, соединяющим вершины a_i и a_j. Путь $A_{a_i a_j}$ не проходящий дважды через одно ребро, называется циклом, если $a_i = a_j$. В частности цикл $\{(a_i, a_i)\}$ будем называть петлей.

Граф Γ называется связным, если для любых двух различных вершин a_i и a_j графа Γ существует путь соединяющий эти вершины.

7) Геометрическая реализация графа. Подграф. Полный граф. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.

Граф Γ_1 называется подграфом Γ_2, если его вершины и ребра принадлежать графу Γ_2. Граф, содержащий все ребра вида $(a_i, a_j)(1 \le i, j \le m)$ называется полным графом. Графы Γ_1 и Γ_2 называются

изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами и ребрами и такое, что соответствующие ребра соединяют соответствующие вершины. Графы Γ_1 и Γ_2 называются гомеоморфными, если существуют такие их подразделения, которые изоморфны.

8) Направленные, ненаправленные и смешанные графы. Плоские и однородные графы.

Графы у которых не все ребра направлены называются ненаправленными графами. Графы у которых все ребра направлены называются направленными графами. Графы которые имеют и направленные и ненаправленные ребра называются смешанными графами. Если все точки пересечений ребер графа являются вершинами этого графа, то такой граф называется плоским.

9) Сети и деревья.

Множество $A = \{a_1, a_2, ...\}$ и набор $B = \{E_0, E_1, E_2, ...\}$ в котором каждое E_i есть набор элементов из A, т.е. $E_i = \{a_{V_1(i)}, a_{V_2(i)}, ...\}$ называется сетью. Деревом называется конечный связный граф с выделенной вершиной, именуемой корнем, не содержащий циклов.

10) Кодирование. Декодирование. Алфавитное и равномерное кодирование.

Пусть задано отображение F, которое каждому слову A, $A \in S'(\bigcup)$, ставит в соответствие слово $B = F(A), B \in S(L)$. Слово B будем называть кодом слова A, а переход от слова A к его коду-кодированием. Здесь $L = \{b_1, .., b_q\}$ некоторый алфавит, B слово в алфавите L, $S(L)$ - множество всех непустых слов из алфавита L.

11) Выбор кода. Источник помех. Декодирование. Критерий однозначности декодирования. Свойства префикса.

Выбор кодов связан с следующими обстоятельствами: с удобством передачи кодов, с обеспечением удобства восприятия, с обеспечением максимальной пропускной способности канала, с обеспечением помехо-устойчивости, и с достижением определенных свойств алгоритма кодирования. Для описания источника помех используются два способа: логико-комбинаторное описание и статистическое описание.

Пусть слово B имеет вид $B = B'B''$. Тогда слово B' называют началом или префиксом слова B, а B'' - концом слова B. Схема Σ обладает свойством префикса, если для любых i и j $(1 \le i, j \le r, i \ne j)$ слово B_i не является префиксом слова B. Если схема Σ обладает свойством префикса, то алфавитное кодирование будет взаимно однозначным.

12) Взаимно однозначное декодирование. Критерий взаимной однозначности алфавитного кодирования. Разложение на элементарные коды. Алгоритм определения однозначности декодирования.

Для всякого алфавитного кодирования со схемой Σ существует такое N_0, $N_0 \le \left[\frac{(w+1)(p-r+2)}{2}\right]$, что проблема взаимной однозначности алфавитного кодирования сводится к аналогичной проблеме для кодирования конечного множества $S^{N_0}(\bigcup)$. Здесь

W максимум чисел ω, взятый по всем разложениям B_i и по всем i, т.е. $W = \max\omega$. Алфавитное кодирование со схемой Σ не обладает свойством взаимной однозначности тогда и только тогда, когда $\Gamma(\Sigma)$ содержит ориентированный цикл, проходящий через вершину Λ.

13) Элементарная конъюнкция. Дизъюнктивная нормальная форма. Индекс простоты $L(D)$. Аксиомы индекса простоты и примеры.

Выражение $K = x_{i_1}^{\alpha_1} \& \cdots \& x_{i_r}^{\alpha_r} (i_\nu \ne i_\mu, \nu \ne \mu)$ называется элементарной конъюнкцией. Число r называется рангом элементарной конъюнкции. Выражение $D = \mathop{V}\limits_{i=1}^{s} k_i (k_i \ne k_j, i \ne j)$, где $k_i (i = \overline{1,s})$ - элементарные конъюнкции ранга r_i называется дизъюнктивной нормальной формой. Для индекса простоты $L(D)$ потребуем выполнения следующих аксиом:

I Аксиома неотрицательности. $L(D) \ge 0$.

II Аксиома монотонности (относительно умножения): $L(D) \ge L(D'VK')$, где $D = D' \vee x_i^{\alpha_i} \cdot K'$.

III. Аксиома выпуклости (относительно умножения): $L(D) \ge L(D_1) + L(D_2)$, где $D = D_1 \vee D_2$.

IV Аксиома инвариантности (относительно изоморфизма): $L(D') = L(D)$, где D' получена из D путем замены имен переменных.

14) Минимальная дизъюнктивная нормальная форма. Примеры. Тупиковые дизъюнктивная нормальная форма.

Дизъюнктивная нормальная форма D реализующая функцию $f(x_1,...,x_n)$ и имеющая минимальный индекс $L(D)$, называется минимальной относительно L. Дизъюнктивная нормальная форма D, которую нельзя упростить при помощи операции удаления элементарной конъюнкции и операции удаления множителя называется тупиковой дизъюнктивной нормальной формой.

15) Алгоритм упрощения Д.Н.Ф. Получение минимальной дизъюнктивной нормальной формы путем применения алгоритма упрощения.

Д.Н.Ф. полученная в результате применения алгоритма упрощения, является тупиковой д.н.ф.

Пусть $f(x_1,...,x_n)$-произвольная функция алгебры логики $(f \neq 0)$ и $D = \overset{S}{\underset{i=1}{V}} k_i$-ее произвольная тупиковая д.н.ф., тогда существует такое упорядочение совершенной д.н.ф., из которого при помощи алгоритма упрощения получается тупиковая д.н.ф.

Литература

1. Яблонский С.Б. Введение в дискретную математику. Учеб. Пособие М., Наука, 1986, 384 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.Н. Сборник задач по дискретной математике М., Наука, 1977, 367 с.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С.В.Яблонского и О.Б. Лупанова. М., Наука, 1974, 312 с.

4. Кудрявцев В.Б., Подколязин А.С. Введение в теорию автоматов. М., Наука, 1986.
5. Марков А.А. Введение в теорию кодирования. М., Наука 1982 г.
6. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. М., Наука, 1972 г.
7. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., Наука, 1984, 224 с.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., Наука, 1976.
9. Клини С.К. Математическая логика. М., Мир, 1973, 480 с.
10. Əliyev A.Y., Piriverdiyev V.Ə. Diskret riyaziyyatın elementləri. Bakı, Mütərcim, 2003, 92 s.

Количество часов по темам

№	Темы	Кол. лек. часов	Кол. сем. часов
1	Функции алгебры логики. Существенные и фиктивные переменные. Эквивалентные и симметричные функции. Элементарные функции алгебры логики.	2	1
2	Формулы. Реализация функции формулами. Формулы одинакового	2	1

	строения. Тавталогия и однозначно ложные формулы. Эквивалентность формул. Свойства элементарных функций.		
3	Принцип двойственности. Двойственные функции.	2	1
4	Разложение функций алгебры логики по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.	2	1
5	Полнота и замкнутость.	2	1
6	Понятие графа. Путь, цикл, петля. Связный граф.	2	1
7	Геометрическая реализация графа. Подграф. Полный граф. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.	2	1
8	Направленные, ненаправленные и смешанные графы. Плоские и однородные графы.	2	1
9	Сети и деревья.	2	1
10	Кодирование. Декодирование. Алфавитное и равномерное кодирование.	2	1
11	Выбор кода. Источник помех. Декодирование. Критерий однозначности декодирования. Свойства префикса.	2	1
12	Взаимно однозначное декодирование. Критерий взаимной однозначности алфавитного кодирования. Разложение на	2	1

	элементарные коды. Алгоритм определения однозначности декодирования.		
13	Элементарная конъюнкция. Дизъюнктивная нормальная форма. Индекс простоты $L(D)$. Аксиомы индекса простоты и примеры.	2	1
14	Минимальная дизъюнктивная нормальная форма. Примеры. Тупиковые дизъюнктивная нормальная форма.	2	1
15	Алгоритм упрощения Д.Н.Ф. Получение минимальной дизъюнктивной нормальной формы путем применения алгоритма упрощения.	2	1