МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУЬЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ»

П Р О Г Р А М М А

курса «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»
Для университетов

Направление ТЕ 01.00.00 – математика
Специальность ТЕ 01.01.00 - математика

Программа
Печатается приказом Министерства
Азербайджанской Республики
от 21.10.2008, № 1164

БАКУ – 2008

Составили:
1. Д.ф.-м.н., проф.М.А.Ягубов
2. Д.ф.-м.н., проф.Г.Ф.Кулиев

Научный редактор:
Заведующий кафедрой «Математические методы теории управления», доктор физико-математических наук, профессор М.А.Ягубов

Рецензенты:
1. К.ф.-м.н., проф.Г.К.Намазов
2. К.ф.-м.н., проф.К.К.Гасанов

Вариационное исчисление и методы оптимизации.
Предисловие

Вариационное исчисление является одним из важных разделов классической математики. Создание этой науки началось с 1696-го года и связано с постановкой задачи о брахистохроне. В дальнейшем многие другие задачи механики и физики также были заданы в экстремальной постановке, а требование решения этих задач играли важную роль в формировании вариационного исчисления как науки.

До создания вариационного исчисления имелись многочисленные практические задачи, приводящие к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной или нескольких переменных. В дальнейшем эти задачи сыграли большую роль в создании нелинейного программирования, выпуклого программирования и линейного программирования, как научного направлений.

Все вышеперечисленные преподаются под названием «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

В механико-математическом факультете БГУ предмет «Вариационное исчисление и методы оптимизации» преподается в VII семестре.

В этой программе приведены основные разделы предмета и темы, входящие в эти разделы. Программой могут воспользоваться и другие высшие учебные заведения, в которых готовятся кадры по специальности «Математика».

I раздел
Задача нелинейного программирования.

1. Необходимые условия и достаточные условия экстремума функции одной переменной.

Приводится необходимое условие достижения экстремума функции в точке, в которой имеются производные слева и справа. Доказывается теорема Ферма являющееся необходимым условием экстремума для функции, имеющей производную в точке. Исследуется наличие экстремума в точках, где производная обращается в ноль, т.е. в стационарных точках и в точках, где производная не существует. (Стационарные точки и точки, в которых производная не существует, называются критическими точками функции). Далее, при помощи второй производной выводятся необходимое условие экстремума. Показывается, что неотрицательность (неполо--жительность) второй производной в стационарной точке является необходимым условием минимума (максимума). После этого показывается, что если в левой малой окрестности стационарной точки производная отрицательна (положительна), а в правой малой окрестности положительна (отрицательна), то в этой точке достигается минимум (максимум).

2. Безусловный экстремум функции многих переменных.

Доказывается аналог теоремы Ферма, т.е. доказывается, что если функция имеет непрерывные частные производные в точке, то равенство нулю этих производных является необходимым условием экстремума в этой точке. Далее показывается, что, неотрицательность (положительность) матрицы в этой точке, составленной из вторых производных, является необходимым условием минимума второго порядка.

Если в точке градиент функции равен нулю, а матрица составленная из вторых производных в этой точке положительно определенная (отрицательно определенная), то в этой точке функция достигает минимум (максимум).

3. Задача на экстремум функции многих переменных при наличии ограничений типа равенств. (Задача на условный экстремум).

Сначала доказывается необходимое условие первого порядка, т.е. доказывается правило множителей Лагранжа или принцип Лагранжа. Показывается, что существуют множители Лагранжа, для которых выполняется условие стационарности для функции Лагранжа.

Далее для задачи на условный экстремум приводятся необходимые условия экстремума второго порядка, т.е. показывается, что если точка является точкой локального минимума, то существуют такие множители Лагранжа, что выполняется условие стационарности для функции Лагранжа и на некоторых гиперплоскостях матрица, составленная из вторых производных неотрицательна.

Если в точке выполняется условие стационарности и матрица составленная из вторых производных функции Лагранжа на некоторых гиперплоскостях положительно определенная, то точка является точкой локального минимума.

4. Задача экстремума функции многих переменных при наличии ограничений типа равенств и неравенств.

Сначала доказывается необходимое условие экстремума первого порядка – принцип Лагранжа. Далее дается необходимое условие экстремума второго порядка. Показывается, что если точка является решением задачи, то для функции Лагранжа выполняются условие стационарности, условие дополняющей нежесткости и матрица составленная из вторых производных функции Лагранж положительно определенная на некоторых гиперплоскостях. После этого даются достаточные условия экстремума, т.е. показывается, что если в точке выполняется условие стационарности, условие дополняющей нежесткости и матрица составленная из вторых производных функции Лагранж положительно определенная на некоторых гиперплоскостях, то эта точка является точкой локального минимума рассматриваемой задачи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд-во БГУ, 1981, 350 с.

4. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. Москва, 2002, 302 с.

5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.Наука, 1974, 479 с.

II раздел
Задача выпуклого программирования.

1. Свойства выпуклых множеств и выпуклых функций.

Дается определение выпуклого множества. Доказывается теорема отделимости в конечномерном случае, т.е. доказывается, что если выпуклое множество не содержит в себе начало координат пространства, то существует гиперплоскость, проходящая через начало координат такая, что это множество остается в одной стороне от этой гиперплоскости.

Дается определение выпуклой функции при помощи неравенства Иенсена и при помощи надграфика. Доказывается эквивалентность этих определений. Приводятся необходимые и достаточные условия выпуклости функции.

2. Основная задача выпуклого программирования.

Здесь в линейном пространстве задаются выпуклое множество и выпуклые функции. Рассматривается задача минимума выпуклой функции на выпуклом множестве, при наличии ограничений, заданных выпуклыми функциями. Для этой задачи строится функция Лагранжа. Доказывается теорема Куна-Таккера. Показывается, что если точка является решением рассматриваемой задачи, то выполняются условие минимума для функции Лагранжа, условие неотрицательности множителей и условие дополняющей нежесткости. Доказывается, что выполнение этих трех условий в некоторых случаях является достаточным для решения задачи. Приводится условие Слейтера.

3. Двойственная задача.

Рассматривается основная задача выпуклого программирования при предположении выполнения условия Слейтера. Строится двойственная задача. Изучается связь между основной и двойственной задачами. Показывается, что $\varphi(x)=\sup_{\lambda} L(x,\lambda) \geq \varphi(x)=\min_{x} L(x,\lambda)$. При помощи этого неравенства доказываются некоторые свойства.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд.БГУ, 1981, 350 с.

4. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. Москва, 2002, 302 с.

III раздел
Задача линейного программирования.

1. Практические задачи относящиеся к линейному програм-мирование.

Здесь приводятся транспортная задача и задача планирования, показывается их практическая сущность. В случае меньшей размерности дается геометрическое истолкование задачи линейного программирования.

2.Каноническая форма задачи линейного программирования.

Приводится каноническая форма задачи линейного программирования. Показывается, что задачу линейного программирования, заданную в другой форме, можно привести к задаче, заданной в канонической форме. Даются различные записи задачи в канонической форме. Доказывается выпуклость множества планов задачи линейного программирования. Доказывается, что среди точек множества планов доставляющих минимум линейной функции имеются и вершины этого множества, называемые опорными планами. Приводятся критерии, различающие вершины от других точек множества планов. Для невырожденного опорного плана доказывается условие оптимальности.

3. Симплекс метод, построение опорного плана и нахождение исходного опорного плана.

Дается конструктивный метод построения опорного плана. Показывается, что метод доказательства является правилом построения опорного плана, а сам метод известным симплекс методом.

Нахождение исходного опорного плана является одной из основных задач линейного программирования.

Рассматриваются три правила нахождения опорного плана. Они наглядно иллюстрируются на примерах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.Гасс С.Линейное программирование. М.Физматиз, 1961.

2.K.Q.Həsənov. Optimallaşdırma üsulları, Bakı, Bakı Dövlət Universiteti nəşr., 1987.

IV раздел
Вариационное исчисление.

1. Постановка основной задачи вариационного исчисления.

Дается постановка основной или простейшей задачи вариационного исчисления. Вводится понятие слабого и сильного экстремума, показывается, что необходимое условие слабого экстремума является необходимым и для сильного экстремума.

2. Первая вариация функционала.

Дается определение первой вариации функционала и доказывается, что равенство нулю первой вариации на заданном элементе является необходимым условием экстремума на этом элементе. Находится первая вариация функционала вариационного исчисления.

3. Основные леммы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа.

Доказываются лемма Лагранжа, лемма Дю-Буа-Реймонда и на их основе выводится уравнение Эйлера-Лагранжа в основной задаче вариационного исчисления, показывается, что это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и для некоторых частных случаев находится его первый интеграл.

4. Задача о брахистохроне.

Решается задача о брахистохроне, играющая важную роль в создании вариационного исчисления.

5. Задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

В основной задаче считается, что все функции множества, на котором определен функционал, заданы на одном и том же отрезке. Здесь же, считается что функции определены, вообще говоря, на различных отрезках и выводится формула для первой вариации функционала. Далее выводятся условия трансверсальности для случая, когда концы функций лежит на заданных кривых.

6. Функционал зависящий от нескольких функций. Функционал зависящий от производной высоких порядков функции.

Выводятся необходимые условия экстремума, когда функционал зависит от нескольких искомых функций. Показывается, что для того чтобы функции доставляли экстремум функции, необходимо чтобы они были решением системы уравнений Эйлера-Лагранжа.

Для случая, когда функционал зависит и от производных высоких порядков искомой функции, показывается, что необходимо чтобы эта функция была решением уравнения, порядок которого два раза больше производной в функционале.

7. Задача на условный экстремум (Задача Лагранжа).

Выводятся необходимые условия экстремума в задаче, являющееся обобщением основной задачи вариационного исчисления, которое имеет практическое значение. Для этого при помощи множителей Лагранжа задача сводится к задаче нахождения безусловного экстремума нового функционала и составляется система уравнений Эйлера-Лагранжа.

8. Изопериметрическая задача.

Эта задача также является обобщением основной задачи вариационного исчисления. Здесь экстремум функционала ищется при дополнительных функциональных ограничениях и опять при помощи множителей Лагранжа сводится к задаче нахождения безусловного экстремума, составляется система уравнений Эйлера-Лагранжа. Показывается, что в этой задаче множители Лагранжа являются числами.

9. Достаточные условия слабого и сильного экстремума в основной задаче вариационного исчисления.

Вводятся понятия поля, центрального поля и поля экстремалей. Далее выясняется, когда семейство экстремалей образует поле. В связи с этим вводится понятие сопряженной точки, выводится условии Якоби, составляется функция Вейерштрасса и с ее помощью получаются достаточные условия экстремума. Отсюда в частности выводится условие Лежандра.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2.Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3.И.М.Гельфанд, С.В.Фомин. Вариационное исчисление. М.Физматиз., 1961.

4.Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.Наука, 1974, 479 с.

5.Смирнов В.И. Курс высшей математики, T.IV, 2.

6. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. М.Гостехизд., 1958, 163 с.

V раздел
Задачи оптимального управления

1. Основная задача оптимального управления (задача быстродействия).

На примере перевода материальной точки из одной заданной точки в заданную другую точку под воздействием определенной силы объясняется задача быстродействия в общем виде и дается понятие допустимого управления.

2. Задача терминального оптимального управления.

Дается постановка задачи терминального управления в процессах, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с фиксированным временем и свободным правым концом траекторий. Даются понятия приращений управляющих функций, траекторий и с их помощью выводится формула для приращения функционала. Вводится функция Гамильтона, строится сопряженная система. Приращение управляющих функций определяется при помощи игольчатой вариации, оценивается приращение траектории и оценивается остаточный член функционала. А далее с их помощью доказывается необходимое условие оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина. Из принципа максимума выводится уравнение Эйлера-Лагранжа основной задачи вариационного исчисления.

3. Управляемость линейных автономных систем.

Здесь доказывается теорема Кальмана являющаяся критерием управляемости линейных автономных систем.

4. Метод динамического программирования. Принцип оптимальности.

Применяя принцип оптимальности выводится уравнение Беллмана в процессах, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М., Наука, 1984, 288 с.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 432 с.

3. Беллман Р. Динамическое программирование, Москва, ИЛ, 1961.

4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М., Наука, 1969, 408 с.

5. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972, 415 с.

6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.:Наука, 1981, 400 с.

7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск, Изд-во БГУ, 1981, 350 с.

8. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория Примеры. Задачи. Москва, 2002, 302 с.

9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.Наука, 1974, 479 с.