BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДОВ КВАДРАТУР

В.Р.ИБРАГИМОВ, Г.Ю.МЕХТИЕВА
Бакинский Государственный Университет

Некоторые прикладные задачи сводятся к решению интегральных уравнений типа Вольтерра. Найти точное решение таких уравнений удается не всегда. Поэтому приходится прибегать к использованию численных методов. Среди этих методов наиболее распространённым является метод квадратур, который успешно используется по сей день. Здесь дан один способ для определения коэффициентов обобщенного метода квадратур.

Введение. В [1] для численного решения следующего интегрального уравнения типа Вольтерра

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,s,y(s))ds \tag{1}$$

предложен k -шаговый метод с постоянными коэффициентами в виде:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_{n+i} + h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}), \tag{2}$$

здесь k - целозначная величина, $\alpha_i, \beta_i^{(j)} (j,i = 0,1,...,k)$ - некоторые действительные числа, y_m - приближенное, а $y(x_m)$ - точное значение решения (1) в точке x_m $(m = 0,1,2,...)$, параметр $h > 0$ - шаг разбиений отрезка $[x_0, X]$ на N равных частей. Предполагаем, что непрерывная по совокупности функция $K(x,s,y)$ определена в области $G = \{x_0 \le x, s \le X, |y| \le B\}$ и там же имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка p, включительно.

Для нахождения коэффициентов метода (2) в [1] предложена система линейно-алгебраических уравнений, которая получена при некоторых ограничениях на решение уравнения (1). Здесь доказано, что эта система имеет место и в общем случае.

1.Способ определения коэффициентов метода (2).

Здесь построена система линейно-алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\alpha_i, \beta_i^{(j)} (j,i = 0,1,...,k)$, с помощью которой можно определить точность метода (2). Сначала, используя разложение функции в ряд Тейлора, построим многошаговый метод типа (2). С этой целью уравнение (1) перепишем в виде:

$$y(x) = f(x) + \varphi_{n+k-1}(x) + \int_{x_{n+k-1}}^{x} K(x,s,y(s))ds, \tag{1.1}$$

где

$$\varphi_{n+k-1}(x) = \int_{x_0}^{x_{n+k-1}} K(x,s,y(s))ds.$$

Если положим $x = x_{n+k}$, то из (1.1) имеем:

$$y(x_{n+k}) = f(x_{n+k}) + \varphi_{n+k-1}(x_{n+k}) + \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} K(x_{n+k},s,y(s))ds. \tag{1.2}$$

К вычислению интеграла применим следующую формулу:

$$\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} K(x_{n+k},s,y(s))ds \approx h\sum_{i=0}^{k} \overline{\beta}_i K(x_{n+k},x_{n+i},y(x_{n+i})) \ . \tag{1.3}$$

Учитывая, что предел интегральной суммы в (1.3) является постоянной величиной и коэффициенты $\overline{\beta}_i \ (i = 0,1,...,k)$ имеют постоянные значения, то получаем, что при её вычислении для разных значений величины n не возникает трудностей. Поэтому рассмотрим вычисления $\varphi_{n+k-1}(x_{n+k})$, которые имеет следующий вид:

$$\varphi_{n+k-1}(x_{n+k}) = \int_{x_0}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+k},s,y(s))ds. \tag{1.4}$$

Функцию $K(x_{n+k},s,y(s))$ разлагаем в ряд Тейлора вокруг точки x_{n+k-1}. Тогда имеем:

$$K(x_{n+k},s,y(s)) = K(x_{n+k-1},s,y(s)) + hK'_x(x_{n+k-1},s,y(s)) + \frac{h^2}{2!}K'_x(x_{n+k-1},s,y(s)) + \dots \ .$$

Частные производные функции $K(x\ ,s,y(s))$ на отрезке $[x_n, x_{n+k}]$ заменим их разностным соотношением и учтём в (1.4). При этом получим интегралы в виде:

$$\int_{x_0}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+i},s,y(s))ds, \ (i = 0,1,...,k).$$

Эти интегралы перепишем в виде:

$$\int_{x_0}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+i},s,y(s))ds = \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i},s,y(s))ds + \int_{x_{n+i}}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+i},s,y(s))ds.$$

Отсюда имеем:

$$\int_{x_0}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+i},s,y(s))ds = y(x_{n+i}) - f(x_{n+i}) + \int_{x_{n+i}}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+i},s,y(s))ds.$$

Для вычислений интегралов

$$\int_{x_{n+i}}^{x_{n+k-1}} K(x_{n+i},s,y(s))ds \ (i = 0,1,...,k) \tag{1.5}$$

используем квадратурные формулы типа (1.3) и используя некоторые обобщения, получаем, что

$$\varphi_{n+k-1}(x_{n+k}) \approx \sum_{i=0}^{k} l_i y_{n+i} + h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \overline{\beta}_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}) - \sum_{i=0}^{k} l_i f_{n+i}. \quad (1.6)$$

Очевидно, что по предложенной схеме мы находим приближенные значения решения уравнения (1). Если (1.6) и (1.3) учтём в (1.2), то имеем:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_{n+i} + h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}), \quad (1.7)$$

где коэффициенты $\alpha_i, \beta_i^{(j)}$ $(i = 0,1,2,\dots,k; j = 0,1,2,\dots,k)$ являются некоторыми действительными числами. Отметим, что метод, построенный по вышеописанной схеме, является неустойчивым.

Определение 1. Метод (1.7) будем называть устойчивым, если корни его характеристического многочлена

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i$$

лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней.

Характеристический многочлен метода, построенный по вышеописанной схеме, имеет кратные корни $\lambda = 1$. Поэтому он является неустойчивым. Например, рассмотрим следующий метод, который построен по вышеописанной схеме

$$\begin{aligned} y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n - h(K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_n, x_n, y_n))/2 + \\ h(3K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) - K(x_{n+1}, x_n, y_n))/2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Этот метод является явным и имеет степень $p = 2$.

Определение 2. Целозначная величина p называется степенью метода (1.7), если имеет место:

$$\sum_{i=0}^{k}\left(\alpha_i (y(x+ih) - f(x+ih)) - h\sum_{j=0}^{k} \beta_i^{(j)} K(x+jh, x+ih, y(x+ih)) \right) = O(h^{p+1}).$$

Для построения устойчивых методов типа (1.7) используем следующую формулу:

$$\int_{x_0}^{x_{n+k}} K(x_{n+k}, s, y(s))ds = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_{n+i} + \sum_{i=0}^{k} \beta_i \int_{x_n}^{x_{n+k}} K(x_{n+i}, s, y(s))ds, \quad (1.9)$$

которая получается из следующих равенств:

$$\int_{x_0}^{x_{n+k}} K(x_{n+k}, s, y(s))ds = \sum_{i=0}^{k} \overline{\alpha}_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s))ds + \sum_{i=0}^{k} \overline{\alpha}_i \int_{x_{n+i}}^{x_{n+k}} K(x_{n+i}, s, y(s))ds + R_n,$$

$$\sum_{i=0}^{k} \overline{\alpha}_i \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s))ds = \sum_{i=0}^{k} \overline{\alpha}_i y(x_{n+i}) - \sum_{i=0}^{k} \overline{\alpha}_i f(x_{n+i}).$$

Учитывая (1.9) и (1.3) в (1.2), получим метод типа (1.7). Вообще говоря, тип многошаговых методов определяется по способу определения их коэффициентов. Как видно из изложений первого способа, мы использовали замены частных производных функции $K(x, s, y)$ через ее значения. Следовательно, полученную схему можно было бы назвать разностным методом. Однако, при построении метода (1.7) мы использовали более общие схемы, чем разложение функции в ряд Тейлора. В результате полученный метод содержит в себе многошаговый метод, построенный и по второму способу. Отсюда следует, что можно построить устойчивые многошаговые методы типа (1.7) разными способами. Поэтому здесь предлагаем метод неопределенных коэффициентов для определения величин $\alpha_i, \beta_i^{(j)}$ $(i = 0,1,\dots,k)$.

Рассмотрим специальный случай и применим метод (1.7) к решению следующего уравнения

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))ds, \qquad (1.10)$$

которое является обобщением вышеуказанного уравнения.

Тогда имеем:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = y(x_0)\sum_{i=0}^{k} \alpha_i + h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(j)} y'_{n+i}. \qquad (1.11)$$

Используя разложения

$$y_{n+i} = y_n + ihy'_n + \frac{(ih)^2}{2} y''_n + \dots + \frac{(ih)^p}{p!} y_n^p + O(h^{p+1}),$$

$$y'_{n+i} = y'_n + ihy''_n + \frac{(ih)^2}{2} y'''_n + \dots + \frac{(ih)^{p-1}}{(p-1)!} y_n^p + O(h^p)$$

в соотношении (1.11), имеем:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \left(y_n + ihy'_n + \frac{(ih)^2}{2!} y''_n + \dots + \frac{(ih)^p}{p!} y^{(p)}(x) + O(h^{p+1}) - y(x_0)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(j)} \left(hy'_n + ih^2 y''_n + \frac{i^2 h^3}{2!} y'''_n + \dots + \frac{i^{p-1}h^p}{(p-1)!} y_n^{(p)} + O(h^{p+1})\right).$$

Отсюда получаем, что для того, чтобы метод (1.11) имел степень p, необходимым и достаточным условием является удовлетворение коэффициентов $\alpha_i, \beta_i^{(j)} (i, j = 0,1,\dots,k)$ следующих систем алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(j)}, \\ &\sum_{i=0}^{k} \frac{i^l}{l!}\alpha_i = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \frac{i^{l-1}}{(l-1)!}\beta_i^{(j)} \quad (l = 2,3,\dots,p). \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Полученное соотношение является однородной системой линейно-алгебраических уравнений, количество уравнений в которой равно $p+1$, а количество неизвестных равно $(k+2)(k+1)$. Если $p < (k+2)(k+1)$, то система (1.12) имеет решение, отличное от нуля.

С целью построения устойчивых методов рассмотрим случай $k = 2$. Тогда из (1.12) имеем:

$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$,

$$\alpha_1+2\alpha_2=a+b+c, \qquad (1.13)$$
$$\alpha_1/2+2\alpha_2=a+2b,$$
$$\alpha_1/6+4\alpha_2/3=a/2+2b,$$
$$\alpha_1/24+2\alpha_2/3=a/6+4b/3.$$

Здесь

$$a=\beta_1^{(0)}+\beta_1^{(1)}+\beta_1^{(2)}, \qquad b=\beta_2^{(0)}+\beta_2^{(1)}+\beta_2^{(2)}, \quad c=\beta_0^{(0)}+\beta_0^{(1)}+\beta_0^{(2)}.$$

Если система (1.13) имеет решение, отличное от нуля, то степень метода $p=4$. Сначала построим метод со степенью $p=3$. Поэтому количество уравнений уменьшаем на единицу. В этом случае один из устойчивых методов со степенью $p=3$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}y_{n+2}=&(y_{n+1}+y_n)/2+f_{n+2}-(f_{n+1}+f_n)/2+h(-2K(x_n,x_{n+2},y_{n+2})-\\&-2K(x_n,x_n,y_n)+3K(x_{n+1},x_{n+2},y_{n+2})+4K(x_{n+1},x_{n+1},y_{n+1})+K(x_{n+1},x_n,y_n)+\\&-2K(x_{n+2},x_{n+2},y_{n+2})+4K(x_{n+2},x_{n+1},y_{n+1})+2K(x_{n+2},x_n,y_n))/8.\end{aligned} \qquad (1.14)$$

Не нарушая общности, можно положить $\alpha_2=1$. Тогда количество неизвестных и уравнений в системе (1.13) совпадают и равны 5 и система (1.13) имеет единственное решение, которое имеет следующий вид:

$$\alpha_2=1, \alpha_1=0, \alpha_0=-1,\ a=4/3, b=1/3, c=1/3.$$

Отметим, что метод, имеющий степень $p=4$ не единственен. Действительно, подбирая значения коэффициентов $\beta_i^{(j)}$ $(i=0,1,2;\ j=0,1,2)$ можно построить разные методы со степенью $p=4$. Один из таких методов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}y_{n+2}=&y_n+f_{n+2}-f_n+h(-K(x_n,x_n,y_n)-K(x_n,x_{n+1},y_{n+1})-\\&-K(x_n,x_{n+2},y_{n+2})+K(x_{n+1},x_n,y_n)+4K(x_{n+1},x_{n+1},y_{n+1})+\\&+K(x_{n+1},x_{n+2},y_{n+2})+K(x_{n+2},x_n,y_n)+K(x_{n+2},x_{n+1},y_{n+1})+\\&+K(x_{n+2},x_{n+2},y_{n+2}))/3.\end{aligned} \qquad (1.15)$$

Методы (1.14) и (1.15) являются неявными. Поэтому построим явный устойчивый метод. В этом случае некоторые коэффициенты равны нулю, а именно, $\beta_{j,2}=0$ $(j=0,1,2)$. Отсюда следует, что $b=0$. Легко можно показать, что в этом случае не существуют устойчивые методы со степенью $p>2$. Отсюда следует, что можем построить явные устойчивые методы со степенью $p=2$. Один из методов со степенью $p=2$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}y_{n+2}=&(y_{n+1}+y_n)/2+f_{n+2}-(f_{n+1}+f_n)/2+h(K(x_n,x_{n+1},y_{n+1})-\\&-3K(x_n,x_n,y_n)+3K(x_{n+1},x_{n+1},y_{n+1})+K(x_{n+1},x_n,y_n)+\\&+3K(x_{n+2},x_{n+1},y_{n+1})+K(x_{n+2},x_n,y_n))/4.\end{aligned} \qquad (1.16)$$

Теперь, для построения метода типа (1.7), используем другой способ, который заключается в следующем. В уравнении (1) положим $x=x_{n+k}$. Тогда имеем:

$$y(x_{n+k})=f(x_{n+k})+\int_{x_0}^{x_{n+k}}K(x_{n+k},s,y(s))ds.$$

Построим многочлен Лагранжа или Ньютона для функции $K(x_{n+k},s,y(s))$ по узлам интерполяции x_{n+j} $(j=0,1,...,k)$:

$$K(x_{n+k},s,y(s))=-\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_jK(x_{n+j},s,y(s))+R_n,$$

здесь R_n - погрешность интерполяции.

Учитывая полученное в интегральном уравнении (1) имеем:

$$y(x_{n+k})=f(x_{n+k})-\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_j\int_{x_0}^{x_{n+k}}K(x_{n+j},s,y(s))ds+R_n.$$

Отсюда можем написать

$$y(x_{n+k})=f(x_{n+k})-\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_j\int_{x_0}^{x_{n+j}}K(x_{n+j},s,y(s))ds-\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_j\int_{x_{n+j}}^{x_{n+k}}K(x_{n+j},s,y(s))ds+R_n.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_j\int_{x_0}^{x_{n+j}}K(x_{n+j},s,y(s))ds=\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_jy(x_{n+j})-\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\alpha}_jf(x_{n+j}).$$

Применяя интерполяции к величинам $y(x_{n+k})$, $f(x_{n+k})$, отбрасывая погрешность интерполяции R_n и используя некоторые преобразования для определения приближенных значений решения уравнения, получим:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_iy_{n+i}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_if_{n+i}-\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j\int_{x_{n+j}}^{x_{n+k}}K(x_{n+j},s,y(s))ds\ (\alpha_k=1). \qquad (1.17)$$

Заменяя интеграл квадратурной формулой

$$\int_{x_{n+j}}^{x_{n+k}}K(x_{n+j},s,y(s))ds\approx h\sum_{i=0}^{k}\gamma_i^{(j)}K(x_{n+j},x_{n+i},y_{n+i}),\ (j=0,1,2,...,k-1)$$

и учитывая в (1.17), получим следующий многошаговый метод:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_iy_{n+i}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_if_{n+i}-h\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j\sum_{i=0}^{k}\gamma_i^{(j)}K(x_{n+j},x_{n+i},y_{n+i}). \qquad (1.18)$$

Если в методе (1.7) заменим

$$\beta_i^{(j)}=-\alpha_j\gamma_i^{(j)}\quad (j=0,1,2,...,k-1;\ i=0,1,2,...,k),$$

то из него получим метод (1.18).

При $k=2$ один из устойчивых методов со степенью $p=3$ будет иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
y_{n+2} &= (y_{n+1} + y_n)/2 + f_{n+2} - (f_{n+1} + f_n)/2 + h(K(x_n, x_n, y_n) + \\
&+ 8K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) + 3K(x_n, x_{n+2}, y_{n+2}) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + \\
&+ 8K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 3K(x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n+2}))/16.
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. V.R.Ibrahimov, M.N. Imanova. On a new method of solution to Volterra integral equation. Transactions issue mathematics and mechanics series of physical technical and mathematical science, XXVII, 2007,№1, 197-204.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, Науково Думка, 1986.
3. Бельтюков Б.А. Аналог метода Рунге-Кутта для решения нелинейных уравнений типа Вольтерра. – Дифференц.уравнения, 1965, 1, №4, с.716-721.
4. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. – 2-е изд. – М.: Мир, 1977. – 584с.
5. Baker C.T.H. The numerical treatment of integral equations.- Oxford; Claerdon, 1977. - 1034p.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. В 2-х т. – Т. 2.М.: Наука, 1977. – 400с.
7. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
8. Ch.Lubich. Runge-Kutta theory for Volterra and Abel Integral equations of the second kind. Mathematics of computation volume 41, number 163, July 1983, p. 87-102.
9. Булатов М.В., Чистяков Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами. Дифференц. уравнения, 2006, том 42, №9, с. 1248-1255.

KVADRATUR ÜSULLARIN BİR ÜMUMİLƏŞMƏSİ HAQQINDA

V.R.İBRAHİMOV, Q.Y.MEHDİYEVA

XÜLASƏ

Bir çox tətbiqi məsələlərin həlli Volterr tipli inteqral tənliklərin həllinə gətirilir. Bu tipli tənliklərin dəqiq həllini həmişə tapmaq mümkün olmur. Buna görə də ədədi üsullardan istifadə etməli olurlar. Bu üsullar içərisində çox yayılmışı kvadratur üsullardır ki, indi də onlardan müvəffəqiyyətlə istifadə edirlər. Burada ümumiləşmiş kvadratur üsulun əmsallarının təyini üçün bir sxem verilir.

ON WAY OF GENERALIZING OF METHODS OF QUADRATURE

V.R.IBRAGIMOV, G.Yu.MEHDIYEVA

SUMMARY

Some applied problems lead to solving of Volterra Integral Equations. As it not always succeed in the exact solution of such equations one has to turn to using numerical methods. The most common method among the other ones is the method of quadrature, which is widely used up-today. Hereby it is given a way of determination of coefficients of generalized method of quadratute.