

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

*В работе исследуется нелокальная краевая задача для псевдогиперболического уравнения третьего порядка. Сначала доказывается теорема о единственности классического решения. Далее методом разделения переменных строится классическое решение в явном виде.*

В области  $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xxx}(x, t) - \beta u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

при обычных локальных граничных

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2)$$

и нелокальных краевых

$$u(x, 0) + \delta u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) + \delta u_t(x, T) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3)$$

условиях, где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\delta$  – заданные числа,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные функции, а  $u(x, t)$  – искомая функция.

**Определение.** Под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию  $u(x, t)$  непрерывную в замкнутой области  $D_T$  вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и удовлетворяющую всем условиям (2), (3) в обычном смысле.

Для изучения вопроса единственности классического решения задачи (1)-(3) важную роль играет следующая

**Лемма.** Пусть  $y(t) \geq 0$ ,  $y'(t) \leq 0$  при любом  $t \in [0, T]$  и  $y(0) - \delta^2 y(T) = 0$  ( $-1 < \delta < 1$ ). Тогда  $y(t) \equiv 0$  при любом  $t \in [0, T]$ .

**Теорема 1.** Если  $-1 < \delta < 1$ , то задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы проводится по следующей схеме [1]. Допустим, что существуют два классических решения рассматриваемой задачи  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . Рассмотрим разность

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Очевидно, что функция  $v(x, t)$ , удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt}(x, t) - \alpha v_{txx}(x, t) - \beta v_{xx}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in D_T) \quad (4)$$

и условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

$$v(x, 0) + \delta v(x, T) = 0, \quad v_t(x, 0) + \delta v_t(x, T) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (6)$$

Докажем, что функция  $v(x, t)$  тождественно равна нулю. Для этого умножим обе части уравнения (4) на функцию  $2v_t(x, t)$  и проинтегрируем полученное равенство по  $x$  от 0 до 1:

$$2 \int_0^1 v_{tt}(x, t) v_t(x, t) dx - 2\alpha \int_0^1 v_{txx}(x, t) v_t(x, t) dx - 2\beta \int_0^1 v_{xx}(x, t) v_t(x, t) dx = 0. \quad (7)$$

Используя граничные условия (5) будем иметь:

$$2 \int_0^1 v_{tt}(x, t) v_t(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 v_t^2(x, t) dx,$$

$$2 \int_0^1 v_{txx}(x, t) v_t(x, t) dx = 2 \left( v_{tx}(1, t) v_t(1, t) - v_{tx}(0, t) v_t(0, t) - \int_0^1 v_{tx}^2(x, t) dx \right) = -2 \int_0^1 v_{tx}^2(x, t) dx,$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 v_{xx}(x, t) v_t(x, t) dx &= 2 \left( v_x(1, t) v_t(1, t) - v_x(0, t) v_t(0, t) - \int_0^1 v_x(x, t) v_{tx}(x, t) dx \right) = \\ &= -\frac{d}{dt} \int_0^1 v_x^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Тогда из (7) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 v_t^2(x, t) dx + 2\alpha \int_0^1 v_{tx}^2(x, t) dx + \beta \frac{d}{dt} \int_0^1 v_x^2(x, t) dx = 0.$$

Примем обозначение

$$y(t) = \int_0^1 v_t^2(x, t) dx + \beta \int_0^1 v_x^2(x, t) dx \geq 0.$$

Очевидно, что

$$y'(t) \equiv \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 v_t^2(x, t) dx + \beta \int_0^1 v_x^2(x, t) dx \right) = -2\alpha \int_0^1 v_{tx}^2(x, t) dx \leq 0.$$

$$y(0) - \delta^2 y(T) = \int_0^1 (v_t^2(x,0) - \delta^2 v_t^2(x,T)) dx + \beta \int_0^1 (v_x^2(x,0) - \delta^2 v_x^2(x,T)) dx = 0.$$

Таким образом, функция  $y(t)$  удовлетворяет всем условиям леммы. Следовательно, в силу леммы она тождественно равна нулю

$$y(t) = \int_0^1 v_t^2(x,t) dx + \beta \int_0^1 v_x^2(x,t) dx \equiv 0.$$

Из этого тождества заключаем, что

$$v_t(x,t) \equiv 0, \quad v_x(x,t) \equiv 0.$$

Отсюда следует тождество

$$v(x,t) \equiv \text{const} = C.$$

Теперь же пользуясь нелокальными условиями (6), будем иметь

$$v(x,0) + \delta v(x,T) = C(1 + \delta) = 0.$$

Следовательно,  $C = 0$ , ибо  $\delta \neq -1$ . Тем самым доказано, что  $v(x,t) \equiv 0$ .

Таким образом, если существуют два решения  $u_1(x,t)$  и  $u_2(x,t)$  задачи (1)-(3), то  $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ . Отсюда следует, что если решение задачи (1)-(3) существует, то оно единственное. Теорема доказана.

Очевидно, что необходимым условием существования непрерывного в  $D_T$  решения является выполнение условий согласования

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(1) = 0.$$

Так как система  $\left\{ \sin \frac{\pi}{2} (2k-1) \right\}_{k=1}^{\infty}$  полна в  $L_2(0,1)$ , то каждое классическое решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2} (2k-1), \quad (8)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx.$$

Применяя метод Фурье, из (1), (3) получим

$$u_k''(t) + \alpha \lambda_k^2 u_k'(t) + \beta \lambda_k^2 u_k(t) = f_k(t) \quad (k=1,2,\dots), \quad (9)$$

$$u_k(0) + \delta u_k(T) = \varphi_k, \quad u_k'(0) + \delta u_k'(T) = \psi_k \quad (k=1,2,\dots), \quad (10)$$

где

$$f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad \varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx.$$

Решая задачу (9), (10), находим:

$$u_k(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[ (\rho_{1k}(T) \mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \rho_{2k}(T) \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + (\rho_{2k}(T) e^{\mu_{2k} t} - \rho_{1k}(T) e^{\mu_{1k} t}) \psi_k - \right. \\ \left. - \delta \int_0^T f_k(\tau) (\rho_{2k}(T) e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)} - \rho_{1k}(T) e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}) d\tau + \int_0^t f_k(\tau) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right], \quad (11)$$

где

$$\mu_{1k} = -\lambda_k \left( \frac{\alpha \lambda_k}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \right) < 0, \quad \mu_{2k} = -\lambda_k \left( \frac{\alpha \lambda_k}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \right) < 0,$$

$$\gamma_k = \mu_{2k} - \mu_{1k} = \lambda_k \sqrt{\alpha^2 \lambda_k^2 - 4\beta}, \quad \rho_{ik}(T) = (1 + \delta e^{\mu_{ik} T})^{-1} \quad (i = 1, 2).$$

Дифференцируя (11) два раза, получим

$$u'_k(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[ \mu_{1k} \mu_{2k} (\rho_{1k}(T) e^{\mu_{1k} t} - \rho_{2k}(T) e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + (\rho_{2k}(T) \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t} - \rho_{1k}(T) \mu_{1k} e^{\mu_{1k} t}) \psi_k - \right. \\ \left. - \delta \int_0^T f_k(\tau) (\mu_{2k} \rho_{2k}(T) e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)} - \mu_{1k} \rho_{1k}(T) e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^t f_k(\tau) (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right], \quad (12)$$

$$u''_k(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[ \mu_{1k} \mu_{2k} (\rho_{1k}(T) \mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \rho_{2k}(T) \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + \right. \\ \left. + (\rho_{2k}(T) \mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \rho_{1k}(T) \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_k - \right. \\ \left. - \delta \int_0^T f_k(\tau) (\mu_{2k}^2 \rho_{2k}(T) e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)} - \mu_{1k}^2 \rho_{1k}(T) e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^t f_k(\tau) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] + f_k(t). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что

$$|\mu_{1k}| \leq \alpha \lambda_k^2, \quad |\mu_{2k}| \leq \frac{2\beta}{\alpha}, \quad |\gamma_k| \geq \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \cdot \lambda_k^2, \quad |1 + e^{\mu_{ik}T}|^{-1} \leq (1 - |\delta|)^{-1},$$

$$\mu_{1k} \mu_{2k} = \beta \lambda_k^2.$$

Учитывая эти оценки, из (11), (12), (13) соответственно находим

$$|u_k(t)| \leq (\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \lambda_k^{-2} \left[ (1 - |\delta|)^{-1} \cdot \left( \frac{2\beta}{\alpha} + \alpha \lambda_k^2 \right) |\varphi_k| + \right. \\ \left. + 2(1 - |\delta|)^{-1} |\psi_k| + 2(1 + |\delta|(1 - |\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \left( \int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$|u'_k(t)| \leq (\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \lambda_k^{-2} \left[ 2(1 - |\delta|)^{-1} \beta \lambda_k^2 |\varphi_k| + (1 - |\delta|)^{-1} \left( \alpha \lambda_k^2 + \frac{2\beta}{\alpha} \right) |\psi_k| + \right. \\ \left. + \left( \alpha \lambda_k^2 + \frac{2\beta}{\alpha} \right) (1 + |\delta|(1 - |\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \left( \int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$|u''_k(t)| \leq (\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \lambda_k^{-2} \left[ \beta \lambda_k^2 (1 - |\delta|)^{-1} \left( \alpha \lambda_k^2 + \frac{2\beta}{\alpha} \right) |\varphi_k| + \right. \\ \left. + (1 - |\delta|)^{-1} \left( \alpha^2 \lambda_k^4 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right) |\psi_k| + \right. \\ \left. + \left( \alpha^2 \lambda_k^4 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right) (1 + |\delta|(1 - |\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \left( \int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] + |f_k(t)|.$$

Отсюда имеем:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3} (\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \left[ (1 - |\delta|)^{-1} \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + 2(1 - |\delta|)^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |\psi_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} + 2(1 + |\delta|(1 - |\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|^2) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (14)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3} (\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \left[ 2(1 - |\delta|)^{-1} \beta \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+ 2(1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |\psi_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \left( 1 + |\delta|(1-|\delta|)^{-1} \right) \sqrt{T} \left[ \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|^2) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2(\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \left[ \beta(1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+ (1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha^2 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left. \left( \alpha^2 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right) \left( 1 + |\delta|(1-|\delta|)^{-1} \right) \sqrt{T} \left[ \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|^2) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \right] + 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть  $-1 < \delta < 1$ ,  $\alpha^2 - 4\beta > 0$  и

1.  $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ ,  $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = 0$ ;
2.  $\psi(x) \in C^2[0,1]$ ,  $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\psi(0) = \psi'(1) = \psi''(0) = 0$ ;
3.  $f(x,t) \in C_{x,t}^{2,0}(D_T)$ ,  $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$ ,  $f(0,t) = f_x(1,t) = f_{xx}(0,t) = 0$ .

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[ (\rho_{1k}(T)\mu_{2k}e^{\mu_{1k}t} - \rho_{2k}(T)\mu_{1k}e^{\mu_{2k}t})\varphi_k + (\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}t} - \rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}t})\psi_k - \right. \right.$$

$$\left. - \delta \int_0^T f_k(\tau) (\rho_{2k}(T)e^{\mu_{2k}(T+t-\tau)} - \rho_{1k}(T)e^{\mu_{1k}(T+t-\tau)}) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t f_k(\tau) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right\} \sin \lambda_k x \quad (17)$$

является классическим решением задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Принимая во внимание условия теоремы 2 из (14), (15), (16) соответственно получим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{6}(\alpha^2 - 4\beta)^{-\frac{1}{2}} \left[ (1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$+ 2(1-|\delta|)^{-1} \|\psi'(x)\|_{L_2(0,1)} + 2(1+|\delta|(1-|\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} \Big], \quad (18)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{6}(\alpha^2 - 4\beta)^{\frac{1}{2}} \left[ 2(1-|\delta|)^{-1} \beta \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left. + 2(1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) (1+|\delta|(1-|\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right], \quad (19)$$

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{2}(\alpha^2 - 4\beta)^{\frac{1}{2}} \left[ \beta(1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left. + (1-|\delta|)^{-1} \left( \alpha^2 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right) \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \left( \alpha^2 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \right) (1+|\delta|(1-|\delta|)^{-1}) \sqrt{T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right] +$$

$$+ 2\sqrt{2} \|f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \Big]_{L_2(D_T)}. \quad (20)$$

Очевидно, что

$$|u(x,t)| = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

$$|u_{xx}(x,t)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$|u_{txx}(x,t)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

$$|u_{tt}(x,t)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Из (21)-(24), с учетом (18)-(20), следует, что функции  $u(x,t)$ ,  $u_{xx}(x,t)$ ,  $u_{txx}(x,t)$ , и  $u_{tt}(x,t)$  непрерывны в  $D_T$ . Непосредственной проверкой легко видеть, что функция  $u(x,t)$  удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3) в обычном смысле. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. V. М.: 1957.
2. Будак Б.М., Самарский А.А. Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: 1972.

#### ÜÇ TƏRTİB PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİR QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Y.T.MEHRƏLİYEV

#### XÜLASƏ

İşdə üç tərtib psevdohiperbolik tənlik üçün bir qeyri-lokal sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Əvvəlcə həllin yeganəliyi haqqında teorem isbat edilir. Sonra isə dəyişənlərinə ayırma üsulundan istifadə edilərək həll aşkar şəkildə qurulur.

#### ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS OF THIRD ORDER

Y.T.MEHRALIYEV

#### SUMMARY

In this work the nonlocal boundary value problem for the pseudohyperbolic equations of third order is investigated. First of all the theorem of uniqueness of classical solution is proved. Then using the method of separation of variables the classical solution is constructed in explicit form.