BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

А.А.МЕХТИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе ставится задача оптимального управления для слабо нелинейного уравнения колебаний стержня. Сначала, применяя метод Галеркина, доказывается теорема существования и единственности решения соответствующей краевой задачи для фиксированного допустимого управления. Далее, используя известные результаты Филиппова, Цезари и Берковича, доказывается теорема существования оптимального управления в поставленной задаче.

Известно, что одним из основных задач теории оптимального управления является доказательство теорем существования оптимального управления в рассматриваемых задачах. Близкие вопросы для гиперболических уравнений второго порядка изучены в работах [1]-[5].

В данной работе для слабо нелинейного уравнения колебаний стержня доказывается теорема существования оптимального управления. При этом используется обобщенная лемма Филиппова [6,7].

Предположим, что управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v(x,t)\right),\ (x,t)\in Q=\{0<x<l,0<t<T\} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\quad (0\le x\le l) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t)=u(l,t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0\quad (0\le t\le T), \tag{3}$$

где $u(x,t)$ - состояние процесса, $v(x,t)$ - управляющая функция.

За класс допустимых управлений U_{ad} берем множество измеримых и ограниченных в Q функций $v(x,t)$ таких, что почти при всех (x,t) значения этих функций принадлежат компактному множеству $V\subset R^r, V\neq\emptyset$.

Ставится следующая задача: найти такое допустимое управление из U_{ad}, которое вместе с соответствующим решением задачи (1)-(3) доставляет минимум функционалу

$$J(v)=\iint_Q f_0(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v(x,t))dxdt. \qquad (4)$$

Под решением задачи (1)-(3) для заданной управляющей функции $v(x,t)$ понимается функция $u(x,t)\in C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$ (определение пространства $C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$ см.[8]), которая для любой функции $\Phi(x,t)\in C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$ такой, что $\Phi(x,T)=0$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_Q\left[-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt-\int_0^l\psi(x)\Phi(x,0)dx=$$

$$=\iint_Q f_0(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v(x,t))\Phi(x,t)dxdt, \qquad (5)$$

причем выполнение условия $u(x,0)=\varphi(x)$ понимается в обычном смысле. Допустимое управление $v_0(x,t)$, являющееся решением поставленной задачи, называется оптимальным управлением, а пара $(u_0(x,t),v_0(x,t))$ – оптимальной.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1^0. $\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\psi\in L_2(0,l)$.

2^0. Функции $f(x,t,u,p,v)$ и $f_0(x,t,u,p,v)$ непрерывны на $\overline{Q}\times R\times R\times V$. Функция $f(x,t,u,p,v)$ удовлетворяет условию Липшица по (u,p) равномерно относительно (x,t) и $v\in V$; функция $f_0(x,t,u,p,v)$ удовлетворяет условию $\left|f_0(x,t,u,p,v)\right|\le a_0+b_0\left|\left|u\right|^2+\left|v\right|^2\right|$, где $a_0,b_0=const>0$.

3^0. Для каждой точки $(x,t,u,p)\in\overline{Q}\times R\times R$ множество $R^+(x,t,u,p)=\{(\eta,\xi)\in R^2\big|$ $\eta\ge f_0(x,t,u,p,v),\ \xi=f(x,t,u,p,v),\ v\in V\}$ замкнуто и выпукло в R^2.

Справедлива следующая

Теорема 1. При выполнении условий 1^0, 2^0 смешанная задача (1)-(3) для каждого $v(x,t)\in U_{ad}$ имеет единственное решение. А для совокупности решений задачи (1)-(3), соответствующих всем допустимым управлениям, справедлива оценка

$$\|u\|_{C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))}\le const.$$

Для доказательства применим метод Галеркина (см.[9]). Пусть $\{\varphi_k(x)\}$-фундаментальная система в $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ и $(\varphi_k,\varphi_m)=\delta_k^m$. Приближенные решения $u^N(x,t)$ ищем в виде $u^N=\sum_{k=1}^{N}c_k^N(t)\varphi_k(x)$ из соотношений

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\varphi_k(x)dx+\int_0^l \frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_k(x)}{\partial x^2}dx=$$

$$=\int_0^l f(x,t,u^N(x,t),\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x},v(x,t))\varphi_k(x)dxdt\ \ (k=1,...,N) \tag{6}$$

и

$$c_k^N(0)=\alpha_k^N,\ \frac{d}{dt}c_k^N(t)\Big|_{t=0}=\int_0^l\psi(x)\varphi_k(x), \tag{7}$$

где α_k^N – коэффициенты сумм $\varphi^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N\varphi_k(x)$ аппроксимирующих при $N\to\infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$. Покажем, что для $u^N(x,t)$ справедлива оценка

$$\int_0^l\left[\left(u^N(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le$$

$$\le C\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|\psi\|^2_{L_2(0,l)}+\|a_v\|^2_{L_2(Q)}\right),\ \forall t\in[0,T], \tag{8}$$

где $a_v(x,t)=\left|f(x,t,0,0,v(x,t))\right|$.

Действительно, умножая каждое из равенств (6) на своё $\frac{d}{dt}c_k^N(t)$ и суммируя по k от 1 до N, получим равенство

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}dx+\int_0^l \frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u^N(x,t)}{\partial x^2\partial t}dx=$$

$$=\int_0^l f\left(x,t,u^N(x,t),\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x},v(x,t)\right)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}dxdt,\ k=1,...,N.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx=2\int_0^t\int_0^l f\left(x,s,u^N(x,s),\frac{\partial u^N(x,s)}{\partial x},v(x,s)\right)\frac{\partial u^N(x,s)}{\partial s}dxds.$$

Учитывая условия, налагаемые на функцию $f(x,t,u,p,v)$, и интегрируя по t, отсюда получаем оценку

$$\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le C\int_0^t\int_0^l\left[\left(u^N(x,s)\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,s)}{\partial s}\right)^2\right]dxds+$$

$$+C\int_0^l\left[(\varphi(x))^2+(\varphi'(x))^2+(\varphi''(x))^2+(\psi(x))^2\right]dx+C\int_0^T\int_0^l a_v^2(x,t)dxdt.$$

Здесь и в дальнейшем, через C будем обозначать различные постоянные.

Из эквивалентности норм в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ имеем

$$\int_0^l\left[\left(u^N(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dxdt\le$$

$$\le C\int_0^t\int_0^l\left[\left(u^N(x,s)\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,s)}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N(x,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N(x,s)}{\partial x^2}\right)^2\right]dxds+$$

$$+C\int_0^l\left[(\varphi(x))^2+(\varphi'(x))^2+(\varphi''(x))^2+(\psi(x))^2\right]dx+C\int_0^T\int_0^l a_v^2(x,t)dxdt.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, получаем (8).

В силу (8) из последовательности $\{u^N(x,t)\}$ можно выбрать подпоследовательность (обозначим её снова через $\{u^N(x,t)\}$), сходящуюся слабо в $W_2^{2,1}(Q)$ и равномерно по $t\in[0,T]$ в норме $L_2(0,l)$ к некоторому элементу $u\in C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right)$. Покажем, что $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)-(3). Начальное условие $u(x,0)=\varphi(x)$ будет выполнено в силу, только что отмеченной сходимости $u^N(x,t)$ к $u(x,t)$ в $L_2(0,l)$ и того, что $u^N(x,0)\to\varphi(x)$ в $L_2(0,l)$. Чтобы доказать справедливость тождества (5) для предельной функции $u(x,t)$, умножим каждое из соотношений (6) на свою функцию

$d_k(t)\in W_2^1(0,T), d_k(T)=0$, полученные равенства просуммируем по всем k от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T; после этого в первом слагаемом проведем интегрирование по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial t}$ с u^N на $\Phi\equiv\sum_{k=1}^{N} d_k(t)\varphi_k(x)$.

Тогда получим тождество

$$\iint_Q\left[-\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt-\int_0^l\psi(x)\Phi(x,0)dx=$$

$$=\iint_Q f\left(x,t,u^N(x,t),\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x},v(x,t)\right)\Phi(x,t)dxdt, \tag{9}$$

справедливое при любой функции Φ вида $\sum_{k=1}^{N} d_k(t)\varphi_k(x)$. Множество таких Φ обозначим через $\Re_N$. В (9) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности при фиксированном Φ из какого-либо $\Re_{N_i}$. Это приводит к тождеству (5) для предельной функции $u(x,t)$ при любой $\Phi\in\Re_{N_i}$. Так как $\bigcup_{N=1}^{\infty}\Re_N$ плотно в $C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right)$, а $u(x,t)\in C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right)$, то (5) будет выполняться для $u(x,t)$ при любой $\Phi\in C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right)$, $\Phi(x,T)=0$.

Итак, мы доказали, что предельная функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3) из $C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right)$. Поскольку норма в банаховом пространстве слабо полунепрерывна снизу, то для предельной функции $u(x,t)$ справедлива оценка

$$\int_0^l\left[(u(x,t))^2+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le$$

$$\le C\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|\psi\|^2_{L_2(0,l)} + \|a_v\|^2_{L_2(Q)}\right), \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{10}$$

Единственность решения задачи (1)-(3) следует из того, что функция $f(x,t,u,p,v)$ удовлетворяет условию Липшица относительно (u,p). Так как оценка (10) получена равномерно по v, то отсюда следует вторая часть утверждения теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $1^0 - 3^0$. Тогда в задаче (1)-(4) существует оптимальное управление.

Доказательство. Обозначим через γ нижнюю грань функционала $J(v)$ в множестве U_{ad} : $\gamma = \inf\limits_{v \in U_{ad}} J(v)$. Из условия $U_{ad} \ne \varnothing$ следует, что $\gamma < +\infty$. Покажем, что $\gamma > -\infty$. Предположим, что $\{v_k(x,t)\}$ - минимизирующая последовательность допустимых управлений. Через $u_k(x,t)$ обозначим решение задачи (1)-(3), соответствующее $v_k(x,t)$. Тогда

$\gamma = \lim\limits_{k\to\infty} J(v_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \iint\limits_Q f_0\left(x,t,u_k(x,t),\dfrac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}, v_k(x,t)\right) dxdt$. Поскольку, в силу теоремы 1, $\|u_k\|_{C\left(0,T;\overset{0}{W_2^2}(0,l),L_2(0,l)\right)} \le const$, то из последовательности $\{v_k(x,t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность (её тоже обозначим через $\{v_k(x,t)\}$), что

$$u_k \to u_0 \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q) \text{ при } k \to \infty. \tag{11}$$

Тогда по теоремам о компактности вложений (см. [9]) при $k \to \infty$ имеем:

$$u_k \to u_0 \text{ равномерно в } C(\overline{Q}), \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \to \frac{\partial u_0}{\partial x} \text{ сильно в } L_2(Q). \tag{13}$$

Согласно (11)

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \to \frac{\partial u_0}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(Q),$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \text{ слабо в } L_2(Q) \text{ при } k \to \infty. \qquad (14)$$

Из условий, налагаемых на функцию $f(x,t,u,p,v)$, и из условия $\|u_k\|_{C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right)} \le C$ следует, что $-\infty < \gamma < +\infty$. Далее, из (13) следует, что последовательность $\left\{\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}\right\}$ при $k \to \infty$ сходится по мере к функцию $\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}$. Следовательно, из этой последовательности можно выделить такую подпоследовательность (её тоже обозначим через $\left\{\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}\right\}$), что при $k \to \infty$ $\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}$ почти всюду в Q. Из условия, налагаемого на $f(x,t,u,p,v)$, получается, что последовательность $\left\{f\left(x,t,u_k(x,t),\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x},v_k(x,t)\right)\right\}$ ограничена в $L_2(Q)$ и можно считать, что при $k \to \infty$

$$f\left(x,t,u_k(x,t),\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x},v_k(x,t)\right) \to z(x,t) \text{ слабо в } L_2(Q). \qquad (15)$$

Тогда, по теореме Мазура [10] , можно построить такую выпуклую комбинацию

$$\psi_s(x,t) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_{ms} f\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t)\right), \qquad (16)$$

$$\left(\alpha_{ms} \ge 0, \sum_{m=1}^{k} \alpha_{ms} = 1\right),$$

что она при $s \to \infty$ сильно сходится к $z(x,t)$ в $L_2(Q)$ (вообще говоря, k зависит от s). Отсюда следует, что имеется такая последовательность $\{\psi_s(x,t)\}$, что она сходится к $z(x,t)$ почти всюду в Q.

Положим

$$\lambda_s(x,t) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_{ms} f_0\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t)\right) \qquad (17)$$

и обозначим $\varliminf_{s\to\infty}\lambda_s(x,t)=z_0(x,t)$. Из условий, налагаемых на функцию $f(x,t,u,p,v)$, следует, что $z_0(x,t)$ интегрируема и конечна почти всюду в Q. По лемме Фату ясно, что

$$\iint_Q z_0(x,t)dxdt \le \varliminf_{s\to\infty}\iint_Q \lambda_s(x,t)dxdt =$$

$$=\varliminf_{s\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\alpha_{ms}\iint_Q f_0\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t)\right)dxdt=\varliminf_{s\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\alpha_{ms}J(v_{n_s+m}).$$

С другой стороны, из равенства

$$\varliminf_{k\to\infty}J(v_k)=\lim_{k\to\infty}J(v_k)=\lim_{k\to\infty}\iint_Q f_0\left(x,t,u_k(x,t),\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x},v_k(x,t)\right)dxdt=\gamma$$

получаем:

$$\varliminf_{s\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\alpha_{ms}J(v_{n_s+m})=\varliminf_{s\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\alpha_{ms}\iint_Q f_0\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t)\right)dxdt=\gamma$$

.

Значит

$$\iint_Q z_0(x,t)dxdt \le \gamma\,. \tag{18}$$

Теперь покажем, что $(z_0(x,t),z(x,t))\in R^+\left(x,t,u_0(x,t),\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right)$. Обозначим через Q_1 множество точек $(x,t)\in Q$, для которых $z_0(x,t)$ конечно, при $s\to\infty$ $\psi_s(x,t)\to z(x,t)$ и при $k\to\infty$ $\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}\to\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}$. Ясно, что $mesQ_1=mesQ$. Для каждого k определим множество $E_k=\{(x,t)|(x,t)\in Q, v_k(x,t)\,\overline{\in}\,V\}$. По определению допустимых управлений $mesE_k=0$, $k=1,2,\ldots$. Пусть $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, $Q_2=\{(x,t)|(x,t)\in Q,(x,t)\,\overline{\in}\,E\}$, $Q_0=Q_1\bigcap Q_2$. Ясно, что $mesQ_0=mesQ$. Предположим, что $(x,t)\in Q_0$. Поскольку $\varliminf_{s\to\infty}\lambda_s(x,t)=z_0(x,t)$, то имеется такая подпоследовательность (обозначим её тоже через $\{\lambda_s(x,t)\}$), что для $\{\lambda_s(x,t)\}$ и соответствующей подпоследовательности $\{\psi_s(x,t)\}$ $\psi_s(x,t)\to z(x,t)$ при $s\to\infty$. Из $u_k(x,t)\to u_0(x,t)$, $\dfrac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}\to\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}$ следует, что для любого $\delta>0$ существует такое $k_0(\delta)>0$, что при $k>k_0$ $|u_k(x,t)-u_0(x,t)|<\delta$, $\left|\dfrac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}-\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right|<\delta$. Тогда для $k>k_0$ $\left(x,t,u_k(x,t),\dfrac{\partial u_k(x,t)}{\partial x}\right)\in N\left(x,t,u_0(x,t),\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial x},\delta\right)$, где через $N(x,t,u_0,p_0,\delta)$ обозначено множество точек (x,t,u,p), для которых $|u-u_0|<\delta, |p-p_0|<\delta$. Поэтому для всех $n_s+m>k_0$

$$\left(f_0\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t)\right),f\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t)\right)\right)\in$$

$$\in R^+\left(N\left(x,t,u_0(x,t),\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x},\delta\right)\right),$$

где $R^+(N(x,t,u_0,p_0,\delta))=\bigcup\limits_{\substack{|u-u_0|<\delta\\ |p-p_0|<\delta}}\{R^+(x,t,u,p)|(x,t,u,p)\in N(x,t,u_0,p_0,\delta)\}$.

Тогда из (16) и (17) следует, что $(\lambda_s(x,t),\psi(x,t))\in coR^+\left(N\left(x,t,u_0(x,t),\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial x},\delta\right)\right)$. Так как при $s\to\infty$ $\lambda_s(x,t)\to z_0(x,t),\psi_s(x,t)\to z(x,t)$, $(z_0(x,t),z(x,t))\in clcoR^+\Big(N\Big(x,t,$ $u_0(x,t),\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial x},\delta\Big)\Big)$ $\forall\delta>0$, где через $clcoA$ обозначена выпуклая замкнутая оболочка множества A. Отсюда по [11,12] следует, что $(z_0(x,t),z(x,t))\in R^+\left(x,t,u_0(x,t),\dfrac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right)$. По определению множества $R^+(x,t,u,p)$ существует такая функция $v(x,t)$, что она принимает значения из V и

$$z_0(x,t) \ge f_0(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v(x,t)),$$
$$z(x,t) = f(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v(x,t)).$$

Тогда по обобщенной лемме Филиппова (см.[7]) имеется такая измеримая функция $v_0(x,t)$, что

$$v_0(x,t) \in V,$$
$$z_0(x,t) \ge f_0(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v_0(x,t)),$$
$$z(x,t) = f(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v_0(x,t)). \qquad (19)$$

Покажем, что функция $u_0(x,t)$ является решением задачи (1)-(3), соответствующим управлению $v_0(x,t)$. По определению обобщенного решения

$$\iint_Q \sum_{m=1}^{k} \alpha_{ms} \left[\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt - \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx =$$
$$= -\iint_Q \sum_{m=1}^{k} \alpha_{ms} f\left(x,t,u_{n_s+m}(x,t),\frac{\partial u_{n_s+m}(x,t)}{\partial x},v_{n_s+m}(x,t) \right)\Phi(x,t)dxdt. \qquad (20)$$

Переходя к пределу в (20) при $s \to \infty$, и учитывая (13), (14), (15), имеем

$$\iint_Q \left[-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt - \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx =$$
$$= -\iint_Q z(x,t)\Phi(x,t)dxdt.$$

Если здесь учесть третье из соотношений (19), то получим, что $u_0(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3), соответствующим $v_0(x,t)$. Поэтому

$$J(v_0) \ge \gamma. \qquad (21)$$

Выше показали, что $f_0(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v_0(x,t)) \le z_0(x,t)$. Тогда учитывая последнее соотношение и (18), имеем

$$J(v_0) = \iint_Q f_0\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},v_0(x,t) \right)dxdt \le \iint_Q z_0(x,t)dxdt \le \gamma. \qquad (22)$$

Из (21) и (22) следует, что $J(v_0) = \gamma$, т.е. $(u_0(x,t),v_0(x,t))$ - оптимальная пара, а $v_0(x,t)$ - оптимальное управление. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасанов К.К. О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений. Ж. вычислит. матем. и матем.физики, №3,с.599-608.
2. Кулиев Г.Ф. О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений. ДАН Азерб.ССР, 1978, 34, №8, с.7-10.
3. Тагиев Р.К. Корректность и регуляризация одного класса задач оптимального управления коэффициентами линейного гиперболического уравнения. В сб. "Численные методы и математическое обеспечение", Баку: 1984, с.98-105.
4. Шарифов Я.А. Существование оптимального управления и необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами.- Автореф. дисс.на соиск уч. степени канд. физ.-мат. наук. Баку: 1990,18 с.
5. Юсубов Ш.Ш.О некоторых вопросах теории оптимального управления для систем, описываемых гиперболическими уравнениями. - Автореф. дисс.на соиск уч. степени канд. физ.-мат. наук. Баку: 1992, 15 с.
6. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.- Вестник МГУ, сер.матем., механ., астрон., 1959, №1, с.25-32.
7. Mc. Shane E.J. and Warfield R.B. On Filippov implicit functions lemma.- Proc.Amer. Math.Soc., 1967, 18, №1, p.41-47.
8. Васильев Ф.П., Ишмухаметов Ф.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1989,142 с.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
10. Хилле Э.,Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962,829 с.
11. Cesari L. Existence theorems for abstract multidimentional control problems.- Jour.Opt. Theory and Appl.,1970, 6, №3,p.210-236.
12. Berkovitz L.D. Existence and lower closure theorems for abstract multidimentional control problems. – SIAM J.Control, 1974,12, №1, p. 27-42.

ÇUBUĞUN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜCÜN OPTİMAL İDARƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

A.A.MEHDİYEV

XÜLASƏ

İşdə çubuğun zəif qeyri-xətti rəqsləri tənliyi üçün optimal idarə məsələsi qoyulur. Əvvəlcə qeyd olunmuş mümkün idarə üçün Qalyorkin üsulunu tətbiq edərək uyğun sərhəd məsələsinin həllinin varlıq və yeğanəlik teoremi isbat olunur. Sonra Filippov, Cezari, Berkovicin məlum nəticələrindən istifadə edərək qoyulmuş məsələdə optimal idarənin varlığı teoremi isbat olunur.

ON AN EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE PENCIL VIBRATION EQUATION

A.A.MEXTIYEV

SUMMARY

In the paper consider an optimal control problem for the weakly non-linear equation of the pencil vibration. First the existence and uniqeness theorems of the solution are proved for the correspondinq boundary problem for the fixed admissible control by applying Qalyorkin`s metods. Then by using Filippov, Cezari, Berkovitz`z known results the existence theorem is proved for the considered an optimal control problem.