BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТУПЕНЧАТОГО ПРОЦЕССА ПРИ НАЛИЧИИ ЭКРАНОВ

Б.Г.ШАМИЛОВА
Бакинский Государственный Университет

В этой статье рассматривается процесс полумарковского блуждания с задерживающими экранами. Доказана теорема об интегральном представлении двукратного преобразования Лапласа-Стильтеса одномерного распределения ступенчатого полумарковского процесса с задерживающими экранами в a *и* b $(a > b)$. *В случае, когда скачок процесса имеет распределение Лапласа находится преобразование Лапласа эргодического распределения рассматриваемого процесса и с помощью его найдены математическое ожидание и дисперсия эргодического распределения процесса.*

Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\cdot))$ задана последовательность $\{\xi_i(\omega), \eta_i(\omega)\}$, $i = \overline{1,\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин и независимых между собою $\xi_i(\omega), \eta_i(\omega)$, $i = \overline{1,\infty}$, где $\xi_i(\omega) > 0$, $E\eta_1(\omega) > 0$ и заданы числа a, b и z, так что $b > 0$, $a > b$ и $0 < z \le a - b$.

По этим случайным величинам построим процесс

$$X_1(t,\omega) = b + z + \sum_{i=1}^{k} \eta_i(\omega) \text{ если} \sum_{i=1}^{k} \xi_i(\omega) \le t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i(\omega),\ k \ge 0, \sum_{1}^{0} = 0,$$

который будем называть ступенчатым процессом полумарковского блуждания.

Процесс, построенный следующим образом, называется процессом полумарковского блуждания с задерживающими экранами « b » и « a ».

$$X(t,\omega) = \zeta_k(\omega), \text{ если } \sum_{i=1}^{k} \xi_i(\omega) \le t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i(\omega), k \ge 0, \left(\sum_{1}^{0} = 0\right).$$

$$\zeta_k(\omega) = \min\{a, \max\{b,\ \zeta_{k-1}(\omega) + \eta_k(\omega)\}\}, k \ge 1, \tag{1}$$

$$\zeta_0(\omega) = b + z.$$

Исследование эргодического распределения для процессов полумарковского блуждания занимают особое место в теории случайных процессов. В 1975 г. В.Смит доказал узловую эргодическую теорему для полумарковских процессов [5]. Общая теорема об эргодичности для процессов с дискретным вмешательством случая доказана в монографии И.И.Гихмана и А.В.Скорохода [1]. В монографии Т.И.Насировой [3] доказывается эргодическая теорема для сложных процессов полумарковского блуждания при наличии задерживающего экрана.

Цель в этой статье – найти преобразование Лапласа эргодического распределения процесса полумарковского блуждания с задерживающими экранами и числовые характеристики эргодического распределения.

Формулировки и доказательство основных результатов. Введем следующие обозначения:

$$R(t,x/b+z)=\mathrm{P}\{X(t,\omega)<x/\,X(0,\omega)=b+z\},$$

$$\widetilde{R}(\theta,x/b+z)=\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}R(t,x/b+z)dt,\ \theta>0,$$

$$\varphi(\theta)=\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}d\mathrm{P}\{\xi_1<t\},\qquad \widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)=\int_{x=b}^{a}e^{-\alpha x}d_x\widetilde{R}(\theta,x/b+z).$$

Теорема. Для процесса полумарковского блуждания (1) имеет место

$$\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}e^{-\alpha(b+z)}+\varphi(\theta)\mathrm{P}\{\eta_1<-z\}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b)+$$
$$+\varphi(\theta)\int_{y=b}^{a}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/y)d_y\mathrm{P}\{\eta_1<y-b-z\}+$$
$$+\varphi(\theta)\mathrm{P}\{\eta_1>a-b-z\}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/a).$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$R(t,x/b+z)=\varepsilon(x-b-z)\mathrm{P}\{\xi_1>t\}+$$
$$+\int_{s=0}^{t}\mathrm{P}\{\xi_1\in ds\}\int_{y=b}^{a}R(t-s/y)d\mathrm{P}\{\min(a,\max(b,b+z+\eta_1))<y\}. \quad (2)$$

Если к обеим частям уравнения (2) применить преобразование Лапласа по t, то получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}R(t,x/b+z)dt=\varepsilon(x-b-z)\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\xi_1>t\}dt+$$
$$+\int_{y=b}^{a}P\{\min(a,\max(b,b+z+\eta_1))\in dy\}\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}\int_{s=0}^{\infty}P\{\xi_1\in ds\}R(t-s,x/y)dt=$$
$$=\varepsilon(x-b-z)\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\xi_1>t\}dt+$$
$$+\int_{y=b}^{a}dP\{\min(a,\max(b,b+z+\eta_1))<y\}\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}R(t,x/y)dt\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}dP(\xi_1<t)=$$
$$=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\varepsilon(x-b-z)-\varphi(\theta)\int_{y=b}^{a}\widetilde{R}(\theta,x/y)dP\{\min(a,\max(b,b+z+\eta_1))>y\}. \quad (3)$$

Из уравнения (3) интегрированием по частям получаем, что

$$\widetilde{R}(\theta, x/b+z)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\varepsilon(x-b-z)+\varphi(\theta)\widetilde{R}(\theta,x/b)P\{\eta_1<-z\}+$$
$$+\varphi(\theta)\int_{y=b}^{a}\widetilde{R}(\theta,x/y)dP\{\eta_1<y-b-z\}+$$
$$+\varphi(\theta)\widetilde{R}(\theta,x/a)P\{\eta_1>a-b-z\}. \quad (4)$$

Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа-Стильтеса по x получаем следующее интегральное уравнение:

$$\int_{x=b}^{a}e^{-\alpha x}d_x\widetilde{R}(\theta,x/b+z)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\int_{x=b}^{a}e^{-\alpha x}d_x\varepsilon(x-b-z)+$$
$$+\varphi(\theta)\int_{x=b}^{a}e^{-\alpha x}d_x\widetilde{R}(\theta,x/b)P\{\eta_1<-z\}+\varphi(\theta)\int_{x=b}^{a}e^{-\alpha x}d_x\widetilde{R}(\theta,x/a)P\{\eta_1>a-b-z\}+$$
$$+\varphi(\theta)\int_{x=b}^{a}e^{-\alpha x}\int_{y=b}^{a}d_x\widetilde{R}(\theta,x/y)d_yP\{\eta_1<y-b-z\}. \quad (5)$$

Из уравнения (5) получаем следующее уравнение:

$$\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}e^{-\alpha(b+z)}+\varphi(\theta)P\{\eta_1<-z\}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b)+$$
$$+\varphi(\theta)\int_{y=b}^{a}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/y)d_yP\{\eta_1<y-b-z\}+\varphi(\theta)P\{\eta_1>a-b-z\}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/a), \quad (6)$$

которые и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть $\eta_1(\omega)$ имеет распределение Лапласа с параметрами λ и μ. Тогда преобразование Лапласа эргодического распределения имеет следующий вид:

$$\widetilde{R}(\alpha)=\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}}\frac{\lambda(\lambda+\alpha)e^{-\alpha b}+\mu(\alpha-\mu)e^{-(a-b)(\lambda-\mu)-\alpha a}}{\alpha+\lambda-\mu}.$$

Доказательство. Пусть $\eta_1(\omega)$ имеет распределение Лапласа

$$\mathrm{P}\{\eta_1<x\}=\begin{cases}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\ell^{\mu x}, x<0,\ \mu>0,\\ 1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\ell^{-\lambda x}, x>0,\ \lambda>0,\end{cases}\qquad p_{\eta_1}(x)=\begin{cases}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\ell^{\mu x}, x<0,\ \mu>0,\\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\ell^{-\lambda x}, x>0,\ \lambda>0.\end{cases}$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}e^{-\alpha(b+z)}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{-\mu z}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/b)+$$
$$+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{-\lambda(a-b-z)}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/a)+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{-\mu(b+z)}\int_{y=b}^{b+z}\widetilde{\widetilde{R}}(\theta,\alpha/y)e^{\mu y}dy+$$

$$+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{\lambda(b+z)}\int\limits_{y=b+z}^{a}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/y)e^{-\lambda y}dy. \qquad (7)$$

Из этого интегрального уравнения получаем неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{\tilde{R}}''(\theta,\alpha/b+z)-(\lambda-\mu)\tilde{\tilde{R}}'(\theta,\alpha/b+z)-\lambda\mu[1-\varphi(\theta)]\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)=$$

$$=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}(\lambda+\alpha)(\alpha-\mu)e^{-\alpha(b+z)}$$

с характеристическим уравнением

$$k^2(\theta)-(\lambda-\mu)k(\theta)-\lambda\mu[1-\varphi(\theta)]=0$$

и с общим решением

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)=c_1(\theta,\alpha)\ell^{k_1(\theta)(b+z)}+c_2(\theta,\alpha)\ell^{k_2(\theta)(b+z)}+$$

$$+\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{(\lambda+\alpha)(\alpha-\mu)}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}e^{-\alpha(b+z)}. \qquad (8)$$

Теперь нам нужно найти $c_i(\theta,\alpha)$, $i=1,2$. Для этого мы находим из интегрального уравнения (7) следующие начальные условия:

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}e^{-\alpha b}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b)+$$

$$+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{-\lambda(a-b)}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/a)+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{\lambda b}\int\limits_{y=b}^{a}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/y)e^{-\lambda y}dy,$$

$$\tilde{\tilde{R}}'(\theta,\alpha/b)=-\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\alpha e^{-\alpha b}-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b)+$$

$$+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{-\lambda(a-b)}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/a)+\frac{\lambda^2\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\theta)e^{\lambda b}\int\limits_{y=b}^{a}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/y)e^{-\lambda y}dy.$$

С другой стороны, из общего решения дифференциального уравнения (8) мы находим, что

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b)=\sum_{i=1}^{2}c_i(\theta,\alpha)\ell^{k_i(\theta)b}+\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{(\lambda+\alpha)(\alpha-\mu)}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}e^{-\alpha b},$$

$$\tilde{\tilde{R}}'(\theta,\alpha/b+z)=\sum_{i=1}^{2}c_i(\theta,\alpha)k_i(\theta)\ell^{k_i(\theta)b}-\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha(\lambda+\alpha)(\alpha-\mu)}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}e^{-\alpha b}.$$

Отсюда получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно $c_1(\theta,\alpha)$ и $c_2(\theta,\alpha)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\left\{[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_i(\theta)]+[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_i(\theta)]e^{-[\lambda-k_i(\theta)]a+\lambda b}\right\}c_i(\theta,\alpha)=\\
&=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\mu(\alpha-\mu)\varphi(\theta)e^{-(\lambda+\alpha)a+\lambda b}}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}+\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\lambda\alpha(\lambda+\alpha)\varphi(\theta)e^{-\alpha b}}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]},\\
&\sum_{i=1}^{2}\left\{\mu[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_i(\theta)]-\lambda[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_i(\theta)]e^{-[\lambda-k_i(\theta)]a+\lambda b}\right\}c_i(\theta,\alpha)=\\
&=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\lambda\mu\alpha(\lambda+\alpha)\varphi(\theta)e^{-\alpha b}}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}-\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\lambda\mu\alpha(\alpha-\mu)\varphi(\theta)e^{-(\lambda+\alpha)a+\lambda b}}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}.
\end{aligned}\right\}$$

Из этой системы, по формуле Крамера, находим, что

$$c_1(\theta,\alpha)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\varphi(\theta)}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}x$$
$$x\frac{\mu(\alpha-\mu)[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_2(\theta)]-\lambda(\lambda+\alpha)[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_2(\theta)]e^{(a-b)[\alpha+k_2(\theta)]}}{\ell_1}, \quad (9)$$

где

$$\ell_1=[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_2(\theta)][\mu[1-\varphi(\theta)]+k_1(\theta)]e^{[\alpha+k_1(\theta)]a}-$$
$$-[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_1(\theta)][\mu[1-\varphi(\theta)]+k_2(\theta)]e^{[\alpha+k_2(\theta)]a+[k_1(\theta)-k_2(\theta)]b};$$

и

$$c_2(\theta,\alpha)=-\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\varphi(\theta)}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}x$$
$$x\frac{\mu(\alpha-\mu)[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_1(\theta)]-\lambda(\lambda+\alpha)[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_1(\theta)]e^{(a-b)[\alpha+k_1(\theta)]}}{\ell_2}, \quad (10)$$

где

$$\ell_2=[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_2(\theta)][\mu[1-\varphi(\theta)]+k_1(\theta)]e^{[\alpha+k_1(\theta)]a-[k_1(\theta)-k_2(\theta)]b}-$$
$$-[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_1(\theta)][\mu[1-\varphi(\theta)]+k_2(\theta)]e^{[\alpha+k_2(\theta)]a}.$$

Очевидно, что

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha)=\int_{z=0}^{a-b}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha/b+z)dP\left\{\min\left(a,b+\eta_1^{+}\right)<b+z\right\}.$$

Если принять во внимание вид решения дифференциального уравнения, то получим следующее равенство:

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda-k_i(\theta)}\left[\lambda e^{k_i(\theta)b}-k_i(\theta)e^{\lambda b-[\lambda-k_i(\theta)a]}\right]c_i(\theta,\alpha)+$$
$$+\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha-\mu}{[\alpha+k_1(\theta)][\alpha+k_2(\theta)]}\left[\alpha e^{\lambda b-(\lambda+\alpha)a}+\lambda e^{-\alpha b}\right].$$

Принимая во внимание (9) и (10), имеем:

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha)=\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\varphi(\theta)}{\prod_{i=1}^{2}[\alpha+k_i(\theta)]}\left[\frac{\lambda\mu(\alpha-\mu)[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_2(\theta)]e^{k_1(\theta)b}}{\ell_1[\lambda-k_1(\theta)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda^2(\lambda+\alpha)[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_2(\theta)]e^{(a-b)[\alpha+k_2(\theta)]+k_1(\theta)b}}{\ell_1[\lambda-k_1(\theta)]}\right]-$$

$$-\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\varphi(\theta)}{\prod_{i=1}^{2}[\alpha+k_i(\theta)]}\left[\frac{\mu(\alpha-\mu)k_1(\theta)[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_2(\theta)]e^{\lambda b-[\lambda-k_1(\theta)]a}}{\ell_1[\lambda-k_1(\theta)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{-\lambda(\lambda+\alpha)k_1(\theta)[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_2(\theta)]e^{(a-b)[\alpha+k_2(\theta)]+\lambda b-[\lambda-k_1(\theta)]a}}{\ell_1[\lambda-k_1(\theta)]}\right]-$$

$$-\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\varphi(\theta)}{\prod_{i=1}^{2}[\alpha+k_i(\theta)]}\left[\frac{\lambda\mu(\alpha-\mu)[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_1(\theta)]e^{k_2(\theta)b}}{\ell_2[\lambda-k_2(\theta)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda^2(\lambda+\alpha)[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_1(\theta)]e^{(a-b)[\alpha+k_1(\theta)]+k_2(\theta)b}}{\ell_2[\lambda-k_2(\theta)]}\right]+$$

$$+\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{\alpha\varphi(\theta)}{\prod_{i=1}^{2}[\alpha+k_i(\theta)]}\left[\frac{\mu(\alpha-\mu)k_2(\theta)[\lambda[1-\varphi(\theta)]-k_1(\theta)]e^{\lambda b-[\lambda-k_2(\theta)]a}}{\ell_2[\lambda-k_2(\theta)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda(\lambda+\alpha)k_2(\theta)[\mu[1-\varphi(\theta)]+k_1(\theta)]e^{(a-b)[\alpha+k_1(\theta)]+\lambda b-[\lambda-k_2(\theta)]a}}{\ell_2[\lambda-k_2(\theta)]}\right]+$$

$$+\frac{1-\varphi(\theta)}{\theta}\frac{(\alpha-\mu)\left(\alpha e^{\lambda b-(\lambda+\alpha)a}+\lambda e^{-\alpha b}\right)}{\prod_{i=1}^{2}[\alpha+k_i(\theta)]}.$$

По теореме 3.3.3 [3] $X(t,\omega)$-эргодический процесс. Тогда по тауберовой теореме [2] имеем:

$$\tilde{R}(\alpha)=\lim_{\theta\to 0}\theta\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha)=\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}}\frac{\lambda(\lambda+\alpha)e^{-\alpha b}+\mu(\alpha-\mu)e^{-(a-b)(\lambda-\mu)-\alpha a}}{\alpha+\lambda-\mu}$$

или

$$\tilde{R}(\alpha)=\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}}\frac{\lambda(\lambda+\alpha)e^{-\alpha b}+\mu(\alpha-\mu)e^{-(a-b)(\lambda-\mu)-\alpha a}}{\alpha+\lambda-\mu}. \qquad (11)$$

Следствие 2. Пусть $\eta_1(\omega)$ имеет распределение Лапласа с параметрами λ и μ, причем $\lambda<\mu$. Тогда предел

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\omega:\ X(t,\omega)<x\}=\mathrm{P}\{\omega:\ X(\omega)<x\}$$

существует и имеет место

$$EX(\omega)=\frac{1}{\lambda-\mu}\frac{-\lambda\mu\left(1-e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}\right)+\mu^2(\lambda-\mu)ae^{-(a-b)(\lambda-\mu)}-\lambda^2(\lambda-\mu)b}{\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}},$$

$$DX(\omega)=\frac{1}{\left[\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}\right]^2}\left\{\frac{\lambda^2\mu(2\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^2}+\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}e^{-2(a-b)(\lambda-\mu)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left[2\lambda^2\mu+\lambda^2\mu^2(\lambda-\mu)(a-b)^2+2\lambda\mu(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)(a-b)\right]e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}}{(\lambda-\mu)}\right\}.$$

Доказательство. Условие $\lambda<\mu$ в доказуемом следствии обеспечивает эргодичности процесса $X(t,\omega)$, в силу которой существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\omega:\ X(t,\omega)<x\}=\mathrm{P}\{\omega:\ X(\omega)<x\}.$$

Так как $\widetilde{R}(\alpha)$ является преобразованием Лапласа случайной величины $X(\omega)$, то, с помощью известных равенств, имеем:

$$EX(\omega)=\widetilde{R}'(0)\ \text{ и }\ DX(\omega)=\widetilde{R}''(0)-\left[\widetilde{R}'(0)\right]^2.$$

Из формулы (11) находим математическое ожидание и дисперсию эргодического распределения процесса $X(t,\omega)$:

$$EX(\omega)=\frac{1}{\lambda-\mu}\frac{-\lambda\mu\left(1-e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}\right)+\mu^2(\lambda-\mu)ae^{-(a-b)(\lambda-\mu)}-\lambda^2(\lambda-\mu)b}{\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}},$$

$$DX(\omega)=\frac{1}{\left[\lambda^2-\mu^2e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}\right]^2}\left\{\frac{\lambda^2\mu(2\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^2}+\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}e^{-2(a-b)(\lambda-\mu)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left[2\lambda^2\mu+\lambda^2\mu^2(\lambda-\mu)(a-b)^2+2\lambda\mu(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)(a-b)\right]e^{-(a-b)(\lambda-\mu)}}{(\lambda-\mu)}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И. и Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1973, т.2.
2. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
3. Насирова Т.И. Сложные процессы полумарковского блуждания при наличии экрана. Б.: Элм, 1988.
4. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1967.
5. Смит В.Л. Теория восстановления и смежные в ней вопросы. «Математика», 5, 1961, 3.

EKRANLI PİLLƏVARI PROSESİN ERQODİK PAYLANMASININ LAPLAS ÇEVİRMƏSİ

B.Q.ŞAMİLOVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə gecikdirilən ekranlı, pilləvarı semimarkov dolaşma prosesinə baxılır. a və b (a > b) ekranlarında gecikdirilən pilləvarı semimarkov dolaşma prosesinin paylanmasının ikiqat Laplas-Stiltyes çevirməsi üçün inteqral teorem isbat olunub. Prosesin sıçrayışı Laplas paylanmasına malik olduqda,

prosesin erqodiк paylanmasının Laplas çevirməsi buradan isə onun кöməyilə erqodiк paylanmanın riyazi gözləmə və dispersiyası tapılır.

THE LAPLACE TRANSFORMATION OF ERGODIC DISTRIBUTIONS OF STEP PROCESS WITH SCREENS

B.Q.SHAMILOVA

SUMMARY

In this article is investigated the process of the semimarkov random walk with two delaying screens. It was proved the theorem about the integral form for twofold Laplace-Stiltyes transformation of the distribution of the process of the semimarkov random walk with two delaying screens in a and b $(\mathrm{a} > \mathrm{b})$. When the jump of the process with laplace distribution it was founded the Laplace transformation of the ergodic distributions of the process and its the expectation and the variance of ergodic distributions of the process.