BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Э.Б.СУЛТАНОВА
Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе исследуется свойства полноты системы собственных и присоединенных элементов одного класса интегро-дифференциальных операторов из кинетической теории ядерных реакторов. Полученный результат является обобщением известных результатов В.С. Владимирова, С.Б. Шихова, А.М. Ахмедова и др. Определен спектр рассмотренного интегро-дифференциального оператора и установлена полнота системы собственных и присоединенных элементов указанного оператора.

В кинетической теории ядерных реакторов важным является исследование разрешимости следующей задачи в размножающей среде с запаздывающими нейтронами.

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = -\vartheta(s, grad\, N) - \vartheta \sum\nolimits_t (x,\tau) N + \left[k_1 \sum\nolimits_s (x,\tau) + k_2(x,\tau)\right] \times$$
$$\times \int_\Omega N(s', x, \tau) ds' + \sum_{k=1}^{m} Z_k \chi_k C_k(x,\tau), \tag{1}$$

$$\frac{\partial C_k(x,\tau)}{\partial \tau} = -z_k C_k(x,\tau) + b_k \sum\nolimits_f (x,\tau) \int_\Omega N(s', x, \tau) ds', \tag{2}$$

$$N(s,x,\tau)\big|_{\tau=0} = N_0(s,x), \quad C_k(x,\tau)\big|_{\tau=0} = C_{k,0}(x), \tag{3}$$

$$N(s,x,\tau)\big|_{x\in\Gamma} = 0, \qquad (s, n(x)) < 0, \quad \tau > 0, \; k = 1,2,\dots,m, \tag{4}$$

где Γ - поверхность выпуклой области D, $N(s,x,\tau)$ - плотность частиц в момент времени τ, летящих в направлении $s = (s_1, s_2, s_3)$ из данной точки $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, n – внешняя нормаль по отношению к области D; Ω -

поверхность единичной сферы из R^3; $s \in \Omega$; $C_k(x,\tau)$ - концентрация эмиттеров запаздывающих нейтронов группы k; $\sum_i(\bar{x},t),\ i = t,s,f$ – макроскопические сечения взаимодействия нейтронов со средой; ϑ – скорость нейтронов; $k_n\,(n=1,2),\quad Z_k, b_k, \chi_k\quad (k=1,2,...,m)$ – некоторые положительные числа. Относительно указанных здесь терминов см. [3].

Исходя из физических соображений предполагаются выполнения следующих условий:

1) Функции $\sum_i(\bar{x},t),\ i=t,s,f$ ограничены, измеримы и положительны почти всюду в D равномерно по $\tau > 0$;

2) $0 < \sum_i(x,\tau) \le \sup\limits_{x\in D} \underset{t\in[0,\infty)}{vrai} \sum_i(x,\tau) < \infty$;

3) $\vartheta\sum_t(x,\tau) \ge \alpha > 0, \qquad \alpha = \underset{x\in D}{vrai} \min\limits_{t\in[0,\infty)} \vartheta\sum_t(x,\tau)$,

4) $0 < Z_1 < Z_2 < ... < Z_m < \alpha$.

Задача (1) - (3) исследуется в фазовой области $\Omega\times D\times T\quad (T=[0,\infty))$ фазового пространства $\Omega\times R^3\times T$, которая состоит из пар (s,x) в каждый момент времени $t>0,\ s\in\Omega,\ x\in R^3,\ t\in T$.

Чтобы привести систему (1)- (3) к уравнению эволюционного типа, вводится в рассмотрение прямое произведение лебеговых-банаховых пространств

$$\widetilde{L}_p = \underbrace{L_p(D)\times L_p(D)\times ...\times L_p(D)}_{(m+1)\text{раз}},$$

где $L_p(D)$, $1 < p < \infty$ - банаховы пространства с обычными нормами.

Введем следующие обозначения:

$$LN = -\vartheta(s, grad\, N) - \vartheta\sum_t(x,\tau)N,$$

$$Q_k N = b_k \sum_f(x,\tau)\int_\Omega N(s',x,\tau)ds', \quad k=1,2,...,m,$$

$$KN = \left[k_1\sum_s(x,\tau) + k_2\sum_f(x,\tau)\right]\int_\Omega N(s',x,\tau)ds'.$$

Система (1)-(3) приводится к уравнению следующего вида в пространстве $\widetilde{L}_p(D)\quad (p>1)$:

$$\frac{d\widetilde{N}}{d\tau} = \widetilde{A}\widetilde{N}(\tau),$$
$$\widetilde{N}(0) = \widetilde{N}_0, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{A} = -\widetilde{L} + \widetilde{C},$$
$$\widetilde{A}^* = -\widetilde{L}^* + \widetilde{C}^*,$$

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 I & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_m I \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{L}^* = \begin{pmatrix} L^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 I & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_m I \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} K, & Z_1 \vartheta_1 I & . & . & . & Z_m \vartheta_m I \\ Q_1, & 0 & . & . & . & 0 \\ Q_2, & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ Q_m, & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{N}(\tau) = \begin{pmatrix} N(\tau) \\ C_1(\tau) \\ . \\ . \\ . \\ C_m(\tau) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{N}_0 = \begin{pmatrix} N_0 \\ C_{1,0} \\ . \\ . \\ . \\ C_{m,0} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

I - единичный оператор в $L_p(D)$.

Из предполагаемых условий следует, что операторы $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}^*$ являются неограниченными замкнутыми операторами, области определения которых всюду плотны, соответственно, в $\widetilde{L}_p(D)$ и $\widetilde{L}_q(D)$, $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}^*$ ограниченно - обратимы. Эти утверждения верны также для операторов $\widetilde{A}, \widetilde{A}^*$.

Теперь рассмотрим следующее неоднородное уравнение:

$$\frac{d\widetilde{N}}{d\tau} = \widetilde{A}\widetilde{N}(\tau) + S(\tau), \quad \widetilde{N}(0) = N^{(0)},$$

$$S(\tau) = \begin{pmatrix} s_0(\tau) \\ s_1(\tau) \\ . \\ . \\ . \\ s_m(\tau) \end{pmatrix} \in \widetilde{L}_p(D), \tag{7}$$

$$s_i(\tau) \in L_p(D), \quad i = 0,1,\dots,m.$$

Известно (см.[3]), что операторы $\left[\left(\lambda I + \widetilde{L}\right)^{-1}\widetilde{C}\right]^4$ и $\left[\widetilde{C}^*\left(\lambda\widetilde{I} + \widetilde{L}^*\right)^{-1}\right]^4$ являются компактными, соответственно, в пространствах $\widetilde{L}_p(D)$ и $\widetilde{L}_q(D)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

В связи с задачей (1) - (3) и связанной с нею операторным уравнением (5), рассматривается оператор-матрица

$$\widetilde{U}(\lambda) = (\lambda\widetilde{I} + \widetilde{L})^{-1}\widetilde{C} = \begin{pmatrix} l(\lambda)k & Z_1 l(\lambda)\vartheta & \dots & Z_m l(\lambda)\vartheta \\ \dfrac{Q_1}{\lambda + Z_1} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ \dfrac{Q_m}{\lambda + Z_m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $l(\lambda) = (\lambda I + L)^{-1}$.

Из результатов работ [1] и [2] следует, что (5) является оператором конечного порядка. Кроме того, для резольвенты операторного уравнения

$$\widetilde{A} = -\widetilde{L} + \widetilde{C}$$

верна оценка

$$\left\| \left[\left(\lambda I + \widetilde{L}\right)^{-1}\widetilde{C}\right]^4 \right\| \le \frac{k_0}{\left|\lambda + Z_1\right|^{\theta}}, \quad k_0 = const, \quad \frac{1}{2} < \theta < 1.$$

С помощью этого и вышеуказанных фактов доказывается следующая

Теорема:

1) Спектр оператора $\widetilde{A} = -\widetilde{L} + \widetilde{C}$ состоит из характеристических чисел, расположенных в области G:

$$G = \begin{Bmatrix} \lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\alpha,\ \alpha \ne -Z_k, \\ k = 1,2,\dots,m \end{Bmatrix}$$

с предельными точками $-Z_k$ $(k = 1,2,\dots,m)$ и $-\alpha$;

2) Система собственных и присоединенных элементов оператора $\widetilde{A}$, отвечающая характеристическим числам из области G, полна в пространстве $\widetilde{L}_p(D)$.

Замечание. Отметим, что вышеприведенная теорема является обобщением известных результатов В.С.Владимирова [2], С.Б.Шихова [3], А.М.Ахмедова и Х.С.Масимовой [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедов А.М., Масимова Х.С. Кратная полнота и сходимость кратных разложений по собственным и присоединенным функциям одного класса интегро-дифференциальных уравнений. Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2001, №4, с.68-72.
2. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц.Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, 1961, LXI, с.3-157.
3. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. М.: Атомизд., 1973, 728 с.

BİR SİNİF İNTEQRO-DİFERENSİAL OPERATORLARIN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA ELEMENTLƏRİ SİSTEMİNİN TAMLIĞI HAQQINDA

E.B.SULTANOVA

XÜLASƏ

İşdə nüvə reaкtorlarının кinetiк nəzəriyyəsindən məlum olan bir sinif inteqro-diferensial operatorların məxsusi və qoşma elementləri sisteminin tamlıq xassəsi araşdırılır. Alınan nəticə V.S.Vladimirov, S.B.Şixov, Ə.M.Əhmədov və başqalarının məlum nəticələrinin ümumiləşməsidir. Burada baxılan inteqro-diferensial operatorun speкtri təyin olunmuş və uyğun məxsusi və qoşma elementlər sisteminin tamlığı göstərilmişdir.

ON COMPLETENESS OF A SYSTEM OF EIGEN - AND ADJOINT ELEMENTS OF A CLASS OF INTEGRO – DIFFERENTIAL OPERATORS

E.B.SULTANOVA

SUMMARY

In this work the property of completeness of a system of eigen - and adjoint elements of a class of integro-differential operators of the kinetic theory of nuclear operators is investigated. Received result generalizes of the known results by V.S.Vladimirov, S.B.Shihov, A.M.Akhmedov and others. Here the spectrum of considered integro – differential operator is defined and the completeness of the corresponding system of eigen - and adjoint elements is proved.