BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2008***

RİYAZİYYAT

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ РИССА – БЕССЕЛЯ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, М.К.КЕРИМОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе, для обобщенных потенциалов Рисса, с нестепенными ядрами, порожденных оператором обобщенного сдвига, ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа – Бесселя устанавливаются сильные неравенства типа Харди-Литлвуда-Соболева и слабые неравенства типа Колмогорова. Здесь рассматривается случай, когда оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных.

1. Введение

Пусть R_n - евклидово пространство размерности $n \geq 1$,

$\mathrm{R}^+_{m+k,k} = \{(x_1,...,x_m, x_{m+1},...,x_{m+k}) \in R_{m+k} : x_{m+1} > 0,...,x_{m+k} > 0\}, m \geq 0,\ k \geq 1$,

$$\mathrm{T}^s u(x) = C_\nu \int_0^\pi ... \int_0^\pi u\Big(x' - s', \sqrt{x_{m+1}^2 - 2x_{m+1}s_{m+1}\cos\alpha_1 + s_{m+1}^2}$$
$$,..., \sqrt{x_{m+k}^2 - 2x_{m+k}s_{m+k}\cos\alpha_k + s_{m+k}^2}\Big)\sin^{2\nu_{m+1}-1}\alpha_1 ... \sin^{2\nu_{m-k}-1}\alpha_k\, d\alpha_1 ... d\alpha_k \tag{1}$$

оператор обобщенного сдвига (ООС), порожденный оператором Лапласа-Бесселя ([1]) :

$$\varDelta_{B_{m+k,k}}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d^2}{dx_i^2} + \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{d^2}{dx_m^2} + \frac{2\nu_i}{x_i}\frac{d}{dx_i}\ ,\ \nu > 0, \mathrm{x} \in \mathrm{R}^+_{m+k,k}\,,$$

где $x = (x', x_{m+1},...,x_{m+k}), s = (s', s_{m+1},...,s_{m+k}), x', s' \in R_m, \nu_{m+1} > 0,..., \nu_{m+k} > 0,$
$|\nu| = \nu_{m+1},...,\nu_{m+k}$ C_ν -постоянное.

Потенциал Рисса $\left(-\varDelta_{B_{m,1}}\right)^{-\alpha}(\alpha > 0)$ ([2]), порожденный обобщенным сдвигом, ассоциированным дифференциальным оператором Лапласа–Бесселя, в смысле обобщенных функций, реализуется как интегральный оператор со слабой особенностью (обозначим его через $\mathrm{I}_\mathrm{B}^\alpha$):

$$\left(-\varDelta_{B_{m,1}}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi = I_B^\alpha\varphi = C_\alpha(m,\nu)\int_{R_m^+}\varphi(y)T^y\left(|x|^{-m-2\nu+\alpha}\right)y_m^{2\nu}\,dy,$$

где

$$C_\alpha(m,\nu) = 2^{1-\alpha}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{m+2\nu-\alpha}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}.$$

О действии оператора I_B^α в пространствах

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(R_m^+) = \left\{ u - изм.: \|u\|_{p,\nu} = \left[\int_{R_m^+} |u(x)|^p x_m^{2\nu} dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \le \boldsymbol{p} < \infty, \nu > 0$$

известна следующая

Теорема Р. ([2]). Пусть $1 < p < q < \infty$. Неравенство

$$\left\| I_B^\alpha u \right\|_{p,\nu} \le C_\alpha \|u\|_{p,\nu}, \forall u \in L_{p,\nu},$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\alpha = (m+2\nu)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

Отметим, что всюду в этой работе постоянные C, с различными индексами, обозначают действительное число, точное значение которого нам безразлично.

Для $\alpha > 0, p \ge 1,$ обозначим через $\Omega_{p,\alpha}$ ([6]) совокупность функций $\omega : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)$ возрастает, $r^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}\omega(r)$ убывает для некоторого $\varepsilon > 0$ и сходится интеграл

$$\int_0^1 \omega(t) t^{-1} dt.$$

Очевидно, если $\omega \in \Omega_{p,\nu}$, то

$$\omega(2t) \le 2^{\frac{\alpha}{p}}\omega(t), \ t > 0.$$

Для $\omega \in \Omega_{p,(m+k+2|\nu|)}$ рассмотрим обобщенный потенциал Рисса

$$\left(I_B^\omega f\right)(x) = \int_{R_{m+k,k}^+} f(y) T^y \left(\frac{\omega(x)}{|x|^{m+k+2|\nu|}}\right) d\mu(y), x \in R_{m+k,k}^+, \ 2\nu_{m+1} dy$$

$$d\mu(y) = y_{m+1}^{2\nu_{m+1}} \dots y_{m+k}^{2\nu_{m+k}} dy.$$

В работе ([3]) показано, что обобщенные потенциалы Рисса, с нестепенными ядрами, в отличие от классических потенциалов Рисса (см.[4]) не действуют, вообще говоря, в шкале L_p пространств.

Через $L_\nu^\Phi(R_{m+k,k}^+)$ обозначим пространство Орлича ([5]) порожденное N-функцией Ф:

$$L_\nu^\Phi(R^+_{m+k,k})=\left\{f: изм. \int\limits_{R^+_{m+k,k}}\Phi(\varepsilon|f(x)|)d\mu(y)<\infty, \text{ для всех } \varepsilon>0\ \right\},$$

$$\|f:L_\nu^\Phi(R^+_{m+k,k})\|=\inf\left\{\lambda>0: \int\limits_{R^+_m}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\le 1\right\}.$$

Основной результат работы состоит в следующем:

Теорема С. Пусть $1\le p<\infty, \omega\in\Omega_{p,(m+k+2|\nu|)}$. Тогда существует N – функция Ф такая, что

$$c^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+2|\nu|}}\right)\le\frac{1}{r^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}}\int\limits_0^r\frac{\omega(t)}{t}dt\le c\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+2|\nu|}}\right),\ \ r>0,$$

где c не зависит от r, и

а) при $p>1$ существует $C>0$ такое, что

$$\left\|I_B^\omega f\right\|_{L_\nu^\Phi(R^m_{m+k,k})}\le C\|f\|_{L_\nu^p},\ \ f\in L_{p,\nu}\left(R^+_{m+k,k}\right)$$

б) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L_\nu^1$

$$\int\limits_{\{x:|I_B^\omega f(x)|>2\beta\}}d\mu(x)\le\left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_\nu^1}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1},\ \ \beta>0.$$

Доказательство теоремы С.

Лемма 1. Пусть $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta\le m+k+2|\nu|$. Если функция $h\in\Omega_{1,\alpha}$ и она дифференцируема, то существует N- функция Ф такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+2|\nu|}}\right)\le\frac{h(r)}{r^{\alpha+\beta}}\le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+2|\nu|}}\right).\qquad(\Phi')$$

Докажем теорему С.

Существование N- функции Ф, удовлетворяющей условию (Ф), следует из Леммы 1 и Леммы 2 ([6]) , если полагать

$$h(r)=\int\limits_0^r\frac{\omega(t)}{t}dt\ \text{ и }\ \alpha+\beta=\frac{m+k+2|\nu|}{p}.$$

Для $x\in R^+_{m+k,k}$ и $r>0$, положим

$$i_1(x,r)=\int\limits_{\{y\in R^+_{m+k,k}:|x-y|<r\}}f(y)T^y\left(\frac{\omega(|x|)}{|x|^{m+k+2|\nu|}}\right)d\mu(y),$$

$$i_2(x,r)=\int\limits_{\{y\in R^+_{m+k,k}:|x-y|\ge r\}}f(y)T^y\left(\frac{\omega(|x|)}{|x|^{m+k+2|\nu|}}\right)d\mu(y).$$

Учитывая убывание функции $\omega(t)t^{-(m+k+2|\nu|)}$ и простейшие свойства оператора сдвига T^y, получаем

$$i_1(x,r) \le c \int_{\{y\in R^+_{m+,k}:|x-y|<r\}} |f(y)| \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{m+k+2|\nu|}} d\mu(y) \le c(M_\nu f)(x) \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \qquad (1)$$

где

$$(M_\nu f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y),$$

$$B(x,r) = \{y \in R^+_m : |x-y| < r\},$$

$$\mu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} d\mu(y).$$

Применив обобщенное неравенство Гельдера, получаем $(p>1)$

$$|i_2(x,r)| \le \|f\|_{p,\nu} \left(\int_{R^+_{m+k,k}/B(x,r)} \left| T^y \left(\frac{\omega(|x|)}{|x-y|^{m+k+2|\nu|}} \right) \right|^{p'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \|f\|_{p,\nu} \left(\int_{\{y\in R^+_{m+k,k}:|x-y|\ge r\}} \left(\frac{\omega(|x|)}{|x|^{m+k+2|\nu|}} \right)^{p'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{p,\nu} A.$$

Положим $r_j = 2^{-j} r, j = 0,1,2,\ldots$.

Учитывая, что $\omega \in \Omega_{p,(m+k+2|\nu|)}$, получаем

$$A = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{y\in R^+_{m+k,k}:r_j\le|x-y\le 2r_j|\}} \left(\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{m+k+2|\nu|}} \right)^{p'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le C \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\omega(r_j)}{r_j^{m+k+2|\nu|}} \right) \mu^{\frac{1}{p'}} (B(x,2r_j)) \le C \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\omega(r_j)}{r_j^{m+k+2|\nu|}} \right) r_j^{\frac{m+k+2|\nu|}{p'}} =$$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega(r_j)}{r_j^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}} \le C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{r_j}^{2r_j} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}} \frac{dt}{t} = C \int_r^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}} \frac{dt}{t} =$$

$$= C \int_r^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}-\varepsilon}} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} \le C \frac{\omega(r)}{r^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}} \le C \frac{1}{r^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}} \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\left|i_2(x,r)\right| \le C_{2,p}\|f\|_{p,\nu}\,\frac{1}{r^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}}\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}\,dt\,. \tag{2}$$

Легко доказать, что это неравенство имеет место и в случае $p=1$.

Объединяя полученные сверху оценки для $\left|i_1(x,r)\right|$ и $\left|i_2(x,r)\right|$, имеем, что для любого $x \in R^+_{m+k,k}$ и $r>0$ $(p \ge 1)$ имеет место оценка

$$\left|\left(I_B^{\omega} f\right)(x)\right| \le \left|i_1(x,r)\right| + \left|i_2(x,r)\right| \le C\left((M_\nu f)(x) + \|f\|_{p,\nu}\,\frac{1}{r^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}}\right)\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}\,dt\,. \tag{3}$$

Как известно, при p>1

$$\left\|(M_\nu f)(x)\right\|_{p,\nu} \le C_p\|f\|_{p,\nu}\,. \tag{4}$$

Теперь выбираем

$$r=\sigma^{-\frac{p}{m+k+2|\nu|}} \quad \text{и} \quad \sigma=(M_\nu f)(x)\big/(C_p\|f\|_{p,\nu}).$$

Тогда

$$(M_\nu f)(x)+\|f\|_{p,\nu}\,r^{-\frac{m+k+2|\nu|}{p}}=(1+\frac{1}{C_p})(M_\nu f)(x),$$

кроме того, в силу условия (Ф)

$$\int_0^r \frac{\omega(t)}{t-}\,dt \le cr^{\frac{m+k+r|\nu|}{p}}\,\varPhi^{-1}(r^{-(m+k+2|\nu|)})=$$

$$=c\left[\sigma^{\frac{p}{m+k+2|\nu|}}\right]^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}\varPhi^{-1}\left(\sigma^{-\frac{p}{m+k+2|\nu|}(-m+k+2|\nu|)}\right)=C\frac{1}{\sigma}\Phi^{-1}(\sigma^p)\,.$$

Учитывая все это из (3) получаем

$$\left|(I_B^{\omega} f)\right| \le c\left(1+C_p^{-1}\right)\left(M_\nu f\right)(x)\frac{\varPhi^{-1}\left(G^p\right)}{G}=$$

$$=CC_p\left(1+C_p^{-1}\right)\|f\|_{p,\nu}\,\varPhi^{-1}\left[\left(\frac{\left(M_\nu f\right)(x)}{C_p\|f\|_{p,\nu}}\right)^p\right].$$

Наконец, отсюда получаем

$$\int_{R^+_{m+k,k}} \varPhi\left(\frac{(I_B^{\omega} f)(x)}{\widetilde{c}\,\|f\|_{p,\nu}}\right)d\mu(x) \le 1,$$

где $\widetilde{c}=CC_p\left(1+C_p^{-1}\right)$.

Отсюда, из определения нормы

$$\left\|(I_B^{\omega} f)(x)\right\|_{L_\nu^{\Phi}} \le \tilde{c}\|f\|_{p,\nu}.$$

Этим а) теоремы С доказана.

Теперь докажем б). Очевидно,

$$\left|\{x : |I_\omega f(x)| > 2\beta\}\right|_\nu \le \left|\{x : i_1(x,r) > \beta\}\right|_\nu + \left|\{x : i_2(x,r) > \beta\}\right|_\nu .$$

В силу (1)

$$A = \left|\{x : i_1(x,r) > \beta\}\right|_\nu \le \left|\left\{x : (M_\nu f)(x) \ge \beta c_1 \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right\}\right|.$$

Известно, что

$$\left|\{x : (M_\nu f)(x) \ge \alpha\}\right|_\nu \le c_0 \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L_{1,\nu}}.$$

В последнем полагая, что

$$\left(\alpha = \beta c_1 \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right)$$

получаем

$$A \le C_0 C_1 \left(\int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right) \frac{1}{\beta} \|f\|_{L_{1,\nu}}.$$

Теперь выберем r. Пусть $C_3 = \max\{C_0 C_1, C_{2,1}\}$ и

$$C_3 r^{-m+k+2|\nu|} \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt \|f\|_{L_{1,\nu}} = \beta .$$

Тогда в силу (2) $|i_2(x,r)| \le \beta$, следовательно, $\left|\{x : i_2(x,r) > \beta\}\right| = 0$.

Если обозначим $K = \left|\{x : I_\omega f(x) > 2\beta\}\right|_\nu$, то

$$K \le C_3 \beta^{-1} \left(\int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right) \|f\|_{L_{1,\nu}}.$$

Теперь покажем, что функция

$$F(r) = r^{-(m+k+2|\nu|)} \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt$$

убывает в $(0,\infty)$.

Действительно

$$F'(r) = -(n+k+2|\nu|) r^{-(n+k+2|\nu|)-1} \cdot \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt + r^{-(m+k+2|\nu|)} \frac{\omega(r)}{r} =$$

$$= r^{-(m+k+2|\nu|+1)} \left(\omega(r) - (m+k+2|\nu|) \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\dfrac{\omega(t)}{t^{m+k+2|\nu|-\varepsilon}}$ убывает, тогда получаем

$$(n+k+2|\nu|)\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt = (n+k+2|\nu|)\int_0^r \frac{\omega(t)}{t^{m+k+2|\nu|-\varepsilon}} \cdot \frac{t^{m+k+2|\nu|-\varepsilon}}{t}dt \geq$$

$$\geq (n+k+2|\nu|)\frac{\omega(r)}{r^{m+k+2|\nu|-\varepsilon}} \cdot r^{m+k+2|\nu|-\varepsilon} \cdot \frac{1}{m+k+2|\nu|-\varepsilon} \geq \omega(r).$$

Таким образом, получаем, что $F'(r) < 0$, откуда и следует убывание $F(r)$.

Таким образом, для каждого a уравнение $F(r) = c_0 \dfrac{\beta}{\|f\|_{L_{1,\nu}}} \equiv a$ имеет единственное решение $r = F^{-1}(a)$.

Следовательно,

$$K \leq \left(\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt\right)\frac{\|f\|_{L_{1,\nu}} \cdot C_3}{\beta} = r^{m+k+2|\nu|}\left(\frac{1}{r^{m+k+2|\nu|}}\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt\right) \cdot \frac{\|f\|_{L_{1,\nu}} \cdot C_3}{\beta} = r^{m+k+2|\nu|}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{r^{(m+k+2|\nu|)}}\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt = \frac{\beta}{\|f\|_{L_{1,\nu}}} \cdot C_3 = a$$

тогда

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+2|\nu|}}\right) = c_3 F(r) = c_3 a \quad \text{и} \quad r^{m+k+2|\nu|} = [\Phi(c_3 a)]^{-1}.$$

Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем. наук, 6, №2 (1951), стр.102-143.
2. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. О классах операторов типа потенциала, порожденных обобщенным сдвигом. // Док. расш. засед. сем. Инт-та Приклад. матем. им. И.Н.Векуа, том 3, №2, 1988.
3. E.Nakan and H.Sumitomo, Scien. Math. Japan. 2001. vol. 54. p.463-472.
4. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342с.
5. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз. 1958. 271 с.
6. Абдуллаев С.К., Дамирова З.А. Научные и педагогические известия университета Одлар юрду. серия физических, технических, математических и естественных наук. Баку: 2005, № 13.

ÜMUMİLƏŞMİŞ RİSS-BESSEL POTENSİALLARI HAQQINDA

S.K.ABDULLAYEV, M.K.KƏRİMOV

XÜLASƏ

İşdə Laplas-Bessel diferensial operatoruna uyğun ümumiləşmiş sürüşmənin doğurduğu ümumiləşmiş Riss potensialları üçün Xardi-Littlvud-Sobolev tipli güclü bərabərsizliкlər və Kolmoqorov tipli zəif bərabərsizliкlər isbat olunmuşdur. Burada ümumiləşmiş sürüşmə operatoru dəyişənlərin ixtiyari yığımına görə götürülür.

ABOUT GENERALIZED POTENTIALS RISS-BESSEL

S.K.ABDULLAEV, M.K.KERIMOV

SUMMARY

In this work are established the strong inequalities of type of Hardi-Litlvud-Sobolev and weak inequalities of type of Kolmogorov for generalized potentials Riss with non-exponential kernels, generated by operator of the generalized shift, associate with Laplas–Bessel differential operator. Here is considered the case when the operator of the generalized shift takes on an any set of variables.