BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2008**

ОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ ВОЛЬТЕРРА

Р.О. МАСТАЛИЕВ
Институт Кибернетики НАН Азербайджана

Задачи оптимального управления, описываемые интегральными уравнениями, исследованы многими авторами. В настоящей работе изучается одна дискретная терминальная задача управления описываемая системой нелинейных разностных уравнений Вольтерра. Сначала доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного принципа максимума Понтрягина. Далее рассмотрен случай вырождения дискретного условия максимум (особый случай), получено необходимое условие оптимальности особых управлений.

Введение. Разностные уравнения Вольтерра возникают при моделировании различных задач из механики, динамики популяций и др. (см., напр. [1-3]). В работах [1-3] и др. изучены различные свойства разностных уравнений Вольтерра. В [4] изучена одна линейно-квадратичная задача оптимального управления, описываемая разностным уравнением Вольтерра.

Настоящая работа посвящена исследованию особых управлений в одной терминальной задаче управления, описываемой системой нелинейных разностных уравнений Вольтерра.

1. **Постановка задачи.** Пусть требуется минимизировать терминальный функционал

$$S(u)=\varphi(z(t_1)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in T, \tag{2}$$

$$z(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,z(\tau),u(\tau)), \quad t\in T=\{t_0,t_0+1,\dots,t_1-1\}, \quad z(t_0)=z_0, \tag{3}$$

здесь $z(t)$ - n-мерный вектор состояния, $u(t)$ - r-мерный вектор управляющих воздействий, U - заданное непустое и ограниченное множество, $\varphi(z)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, t_0, t_1 - заданы, причем t_1-t_0 - натуральное число, $f(t,\tau,z,u)$ - заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно.

В дальнейшем управляющую функцию (или просто управление $u(t)$), удовлетворяющую ограничениям (2), назовем допустимым управлением.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум терминальному функционалу (1) при ограничениях (2) и (3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), z(t))$ - оптимальным процессом.

В работе [5] анонсировано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче.

Нашей целью является исследование случая вырождения условия максимума Понтрягина (особый случай [6]).

2. **Формула приращения критерия качества.** Пусть $(u(t), z(t))$ фиксированный допустимый процесс и вдоль него множество

$$f(t,\tau,z(\tau),U)=\{\alpha : \alpha = f(t,\tau,z(\tau),v),\ \ v\in U\} \tag{4}$$

при всех $t\in T$ выпукло.

Через $u(t;\varepsilon)$, ($\varepsilon\in[0,1]$ - произвольное число) обозначим произвольное допустимое управление такое, что

$$\begin{aligned} z(t+1;\varepsilon) &= f(t,\tau,z(\tau;\varepsilon),u(\tau;\varepsilon)) \equiv f(t,\tau,z(\tau;\varepsilon),u(\tau))+ \\ &+\varepsilon\left[f(t,\tau,z(\tau;\varepsilon),v(\tau))-f(t,\tau,z(\tau;\varepsilon),u(\tau))\right], \end{aligned} \tag{5}$$

$z(t_0;\varepsilon)=z_0$,

где $v(t)\in U$, $t\in T$ произвольный вектор.

Заметим, что такой допустимый вектор существует в силу выпуклости множества (4).

Пусть по определению

$$y(t)=\left.\frac{\partial z(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}; \qquad Y(t)=\left.\frac{\partial^2 z(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{6}$$

Пользуясь (5) доказывается, что $y(t)$, $Y(t)$ являются, соответственно, решениями следующих задач:

$$\begin{gathered} y(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f_z(t,\tau,z(\tau),u(\tau))\,y(\tau)+\Delta_{v(\tau)}f(t,\tau,z(\tau),u(\tau))\right], \\ y(t_0)=0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} Y(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f_z(t,\tau,z(\tau),u(\tau))Y(\tau)+y'(\tau)f_{zz}(t,\tau,z(\tau),u(\tau))y(\tau)+\right. \\ \left.+2\Delta_{v(\tau)}f_z(t,\tau,z(\tau),u(\tau))\,y(\tau)\right], \\ Y(t_0)=Y_0. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения типа

$\Delta_{v(\tau)}f(t,\tau,z(\tau),u(\tau))=f(t,\tau,z(\tau),v(\tau))-f(t,\tau,z(\tau),u(\tau))$.

При этом специальное приращение функционала (1) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u) &= S(u(t;\varepsilon))-S(u(t))=\varepsilon\frac{\partial\varphi(z(t_1))}{\partial z}y(t_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(z(t_1))}{\partial z^2}y(t_1)+ \\ &+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{\partial\varphi(z(t_1))}{\partial z}Y(t_1)+0(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{9}$$

По определению

$$H(t,z(t),u(t),\psi(t))=\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi'(\tau)f(\tau,t,z(t),u(t)).$$

Здесь $\psi=\psi(t)$ - n-мерная вектор-функция сопряженных переменных, являющаяся решением задачи

$$\psi(t-1)=\sum_{\tau=t}^{t_1-1}f_z'(\tau,t,z(t),u(t))\psi(\tau),\quad \psi(t_1-1)=-\varphi_x(x(t_1)). \tag{10}$$

Тогда,по схеме работы [7], специальное приращение (9) критерия качества (1) преобразуется к виду:

$$\Delta S_\varepsilon(u)=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(t)}H(t,z(t),u(t),\psi(t))+\frac{\varepsilon^2}{2}\{y'(t_1)\varphi_{zz}(z(t_1))y(t_1)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}y'(t)H_{zz}(t,z(t),u(t),\psi(t))y(t)-2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(t)}H_z'(t,z(t),u(t),\psi(t))y(t)\Big\}+0(\varepsilon^2). \tag{11}$$

3. Необходимые условия оптимальности. Из разложения (11) в силу произвольности $\varepsilon\in[0,1]$ следует

Теорема 1. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(t)}H(t,z(t),u(t),\psi(t))\le 0 \tag{12}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Эта теорема является аналогом дискретного принципа максимума [7, 8] для рассматриваемой задачи.

Заметим, что поточечный вариант необходимого условия оптимальности (12) анонсирован в [5].

Ясно, что дискретное условие максимума (12) является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Изучим случай вырождения этого необходимого условия оптимальности.

Определение 1. Допустимое управление $u(t)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением в задаче (1)-(3), если для всех $v(t)\in U$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(t)}H(t,z(t),u(t),\psi(t))\equiv 0\,. \tag{13}$$

Из этого определения ясно, что для особых управлений условие максимума Понтрягина теряет свое содержательное значение.

Таким образом, возникает необходимость в дальнейшем исследовании особых управлений. Из разложения (11), с учетом (13), следует

Теорема 2. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t)$ в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$y'(t_1)\varphi_{zz}(z(t_1))y(t_1)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[y'(t)H_{zz}(t,z(t),u(t),\psi(t))y(t)+2\Delta_{v(t)}H'_z(t,z(t),u(t),\psi(t))y(t)\right]\geq 0 \quad (14)$$
выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (14) является общим необходимым условием оптимальности особых управлений.

Опираясь на это неравенство в некоторых случаях удается получить конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений.

Применяя результаты, например, работ [1, 2], получаем, что решение $y(t)$ задачи (7) допускает представление:

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}R(t,s+1)\Delta_{v(\tau)}f[s,\tau]\right], \qquad (15)$$

здесь $R(t,s)$ резольвента уравнения (7) при фиксированном t, удовлетворяющая по s $(s\leq t)$ уравнению

$$R(t+1,s)=\sum_{\tau=s}^{t}R(t+1,\tau+1)f_z(\tau,s,z(s),u(s)),\ s\leq t,$$

с начальным условием

$$R(t+1,t+1)=\mathrm{E},$$

а при фиксированном s $(s\leq t)$ являющаяся по t решением уравнения

$$R(t+1,s)=\sum_{\tau=s}^{t}f_z(t,\tau,z(\tau),u(\tau))R(\tau,s),$$
$$R(s,s)=E,$$

(E - $(n\times n)$ единичная матрица).

Пусть вектор-функция $f(t,\tau,z,u)$, входящая в правую часть уравнения (3), имеет вид:

$$f(t,\tau,z,u)=A(t,\tau)g(\tau,z,u). \qquad (16)$$

Тогда представление (15) принимает вид

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}R(t,s+1)A(s,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,z(\tau),u(\tau))\right]=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}R(t,s+1)A(s,\tau)\right]\times$$
$$\times\Delta_{v(\tau)}g(\tau,z(\tau),u(\tau))=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q(t,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,z(\tau),u(\tau)). \qquad (17)$$

здесь по определению

$$Q(t,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t-1}R(t,s+1)A(s,\tau).$$

Введем в рассмотрение $(n\times n)$ матричную функцию $K(\tau,s)$ посредством формулы

$$K(\alpha,\beta)=-Q_1'(t_1,\alpha)\varphi_{zz}(z(t_1))Q(t_1,\beta)+\sum_{t=\max(\alpha,\beta)+1}^{t_1-1}Q'(t,\alpha)H_{zz}(t,z(t),u(t),\psi(t))Q(t_1,\beta).$$

При помощи представления (17) неравенство (14) преобразуется к виду

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(\alpha)}g'(\alpha,z(\alpha),u(\alpha))K(\alpha,\beta)\Delta_{v(\beta)}g(\beta,z(\beta),u(\beta))+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\alpha=t_0}^{t-1}\Delta_{v(t)}H'_z(t,z(t),u(t),\psi(t))Q(t,\alpha)\Delta_{v(\alpha)}f(\alpha,z(\alpha),u(\alpha))\right]\le 0\,. \quad (18)$$

Сформулируем полученный результат

Теорема 3. Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t)$ в задаче (1)-(3), (16) необходимо, чтобы неравенство (18) выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмановский В.Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2001, № 4, с. 47-55.
2. Ивинская Е.В., Колмановский В.Б. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 8, с. 89-97.
3. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Институт математики НАН Беларуси. 2000, 400 с.
4. Дымков М.П. Оптимальное управление дискретной системой Вольтерра по квадратичному функционалу // Докл. АН Беларуси, 1997, т. 41, № 3, с. 10-16.
5. Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об одной дискретной задаче управления // Akad. M.L.Rəsulovun 90 illiyinə həsr olunmuş "Riyazi fizikanın üsulları" elmi konfransının materialları. Bakı: 2006, s. 117-128.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
7. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку, Изд-во БГУ, 2002, 114 с.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд-во БГУ, 1981, 350 с.

VOLTERR DİSKRET SİSTEMLƏRİNDƏ MƏXSUSİ İDARƏLƏR

R.O.MƏSTƏLİYEV

XÜLASƏ

İnteqral tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri bir çox müəlliflər tərəfindən tədqiq olunmuşdur. Bu işdə isə qeyri-xətti Volterr fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir diskret terminal optimal idarəetmə məsələləsi öyrənilir. Əvvəlcə optimallıq üçün diskret maksimum şəklində birinci tərtib zəruri şərt verilmişdir. Sonra diskret maksimum şərtinin cırlaşdığı hal (məxsusi hal) öyrənilmişdir. Məxsusi idarələrin optimallığı üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

SINGULAR CONTROLS IN THE VOLTERRA'S DISCRETE SYSTEMS

R.O. MASTALIYEV

SUMMARY

Variors optimal control problems described by integral equations have been investigated by many authors. In the present work a discrete terminal control problem described by a system of non-linear Voltaire difference equations is studied. At first necessary first order optimality condition in the form of discrete Pontryagin prinsiple of maximum has been formulated. Then extinction case of discrete maximum condition (particular case) has been considered. Necessary optimality condition of particular controls has been obtained.