BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2008**

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.А.НУРМАМЕДОВ

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

В работе рассматриваются вырождающиеся уравнения эллиптического и гиперболического, а также составного типов в одной области. Отметим, что эти уравнения в многомерном случае и меняющимся типе уравнений представляют очень большой интерес как в теоретическом, так и практическом аспекте. В работе применяются методы функционального анализа, «ε-регуляризации» и продолжения по параметру. Доказывается существование и единственность обобщенного решения в весовых пространствах Соболева.

Пусть G – ограниченная область пространства R^n точек $x=(x_1,\dots,x_n)$, включающая часть гиперплоскости $x_n=0$ и с гладкой границей $\partial G\in C^2$, $G^+=G\cap\{x_n>0\}$, $G^-=G\cap\{x_n<0\}$.

Положим $D=G\times(-T,T)$, $T>0$; $S=\partial G\times(-T,T)$, $\Gamma=\partial D$ граница D.

В области D рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered}L_1(u,\upsilon)=k_1(t)u_{tt}+k_2(x)\Delta u+\sum_{i=1}^n a_{i1}^{(1)}(x,t)u_{x_i}+\sum_{i=1}^n a_{i2}^{(1)}(x,t)\upsilon_{x_i}+\\+b_{11}(x,t)u_t+b_{12}(x,t)\upsilon_t+c_{11}(x,t)u+c_{12}(x,t)\upsilon=f_1(x,t),\\L_2(u,\upsilon)=\upsilon_{tt}+\Delta\upsilon+\sum_{i=1}^n a_{i1}^{(2)}(x,t)u_{x_i}+\sum_{i=1}^n a_{i2}^{(2)}(x,t)\upsilon_{x_i}+\\+b_{21}(x,t)u_t+b_{22}(x,t)\upsilon_t+c_{21}(x,t)u+c_{22}(x,t)\upsilon=f_2(x,t).\end{gathered}\tag{1}$$

Будем всюду предполагать, что коэффициенты системы уравнений (1) достаточно гладкие. Кроме того, выполняются условия:

$$tk_1(t)>0 \text{ при } t\neq 0,\ t\in(-T,T),$$

$$x_nk_2(x)<0 \text{ при } x_n\neq 0,\ x=(x_1,\dots,x_n)\in G\subset R^n.$$

Отсюда вытекает, что квадратичная форма системы (1) является знакоменяющейся. Уместно отметить, что в работе [2] были исследованы знаконеопределённые уравнении, а в работах [4], [5], [7], [8] исследованы уравнения, имеющие всевозможные знакоопределённые квадратичные формы в одной области. Часто такие уравнения относятся к уравнениям смешанного типа с меняющимся направлением времени.

Положим

$$\Gamma_{-T}^{+}=\{(x,t)\in\Gamma:\ x_n>0,\ t=-T\},\ \Gamma_{-T}^{-}=\{(x,t)\in\Gamma:\ x_n<0,\ t=-T\},$$
$$\Gamma_{T}^{+}=\{(x,t)\in\Gamma:\ x_n>0,\ t=T\},\ \Gamma_{T}^{-}=\{(x,t)\in\Gamma:\ x_n<0,\ t=T\},$$
$$S^{+}=S\bigcap\{x_n>0\},\ S^{-}=S\bigcap\{x_n<0\}.$$

Краевая задача. Найти решение системы уравнений (1) в области $\overline{D}$, удовлетворяющее условиям:

$$u\Big|_S=0,\quad u\Big|_{\overline{\Gamma_{-T}^{-}}}=0,\quad u\Big|_{\overline{\Gamma_{-T}^{+}}}=0, \tag{2}$$

$$\upsilon(x,-T)=\upsilon(x,T)=0,\quad \upsilon\Big|_S=0. \tag{3}$$

Символом C_L обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D}$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3), а через $H_{1,L}(D),H_{2,L}(D)$ - пространство Соболева с весами, полученными замыканием класса C_L по норме:

$$\|u\|_{H_{1,L}}^2=\int_D\left(u_t^2+|k_2(x)|\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u^2\right)dD,$$
$$\|u\|_{H_{2,L}}^2=\int_D\left(u_{tt}^2+k_2^2\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}^2+|k_2(x)|\sum_{i=1}^n u_{x_it}^2+|k_2(x)|\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+u_t^2+u^2\right)dD, \tag{4}$$

соответственно.

Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть выполнены условия:

1) $2b_{11}(x,t)-k_{1t}\geq\delta>0,\ (x,t)\in D$;

2) $x_nc_{11}(x,t)>0$ при $x_n\neq 0,\ x\in G,\ t\in(-T,T)$;

3) $\left|a_{i1}^{(1)}(x,t)\right|\leq c_1|k_2(x)|,\ \left|a_{i1}^{(2)}(x,t)\right|\leq c_1|k_2(x)|,\ \sum\limits_{i=1}^n\left(a_{i1}^{(1)}-k_{2x_i}\right)^2\leq M|k_2(x)|$,

где M – достаточно большая константа;

4) $2c_{22}(x,t)-\sum\limits_{i=1}^n a_{i2}^{(2)}-b_{22}(x,t)\leq 0,\ (x,t)\in D$,

и существуют константы $\lambda>0,\quad \mu>0$, такие, что

5) $\dfrac{nM}{2\delta}<\lambda,\ \dfrac{nM}{2\delta}<\mu$;

6) $b_{11}-\dfrac{1}{2}k_{1t}+\lambda k_1\geq\delta>0,\ b_{11}-\dfrac{1}{2}k_{1t}+\mu k_1\geq\delta>0.$

Тогда для всех функций $u(x,t)$ из класса C_L справедлива следующая оценка

$$\int\limits_{D^+} L_1(u,\upsilon)e^{-\lambda t}u_t dD^+ + \int\limits_{D^+} L_2(u,\upsilon)e^{-\lambda t}u_t dD^+ + \int\limits_{D^-} L_1(u,\upsilon)e^{\mu t}u_t dD^- +$$
$$+\int\limits_{D^-} L_2(u,\upsilon)e^{\mu t}u_t dD^- \geq m_1\left(\|u\|^2_{H_{1,L}(D)} + \|\upsilon\|^2_{H_{1,L}(D)}\right), \ \forall\, \upsilon \in C_L .$$

Доказательство леммы проводится интегрированием по частям и использованием неравенства Коши, с учетом граничных условий. Так как $k_2(x) \neq 0$ при $x_n \neq 0$, то, в силу теорем вложения С.Л.Соболева [3], функции из пространства $H_{2,L}(D)$ будут удовлетворять граничным условиям (2), (3).

Определение 1. Регулярным решением задачи (1)-(3) будем называть функции $u(x,t), \upsilon(x,t) \in H_{2,L}(D)$, удовлетворяющие уравнениям (1) почти всюду в D.

Рассмотрим распадающуюся систему уравнений вида:

$$L_1(u) = k_1(t)u_{tt} + k_2(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{(1)} u_{x_i} + b_{11}u_t + c_{11}u = f_1(x,t), \tag{5}$$

$$L_2(u) = \upsilon_{tt} + \Delta\upsilon + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)} \upsilon_{x_i} + b_{22}\upsilon_t + c_{22}\upsilon = f_2(x,t). \tag{6}$$

Для доказательства разрешимости (5), (2) воспользуемся методом «ε - регуляризации» и тем, что гиперплоскость $x_n = 0$ является характеристической для уравнения (5). Поэтому мы можем рассмотреть краевую задачу (5), (2) следующим образом:

Краевая задача 1. Найти решение уравнения (5) в области D^+, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\overline{\Gamma^+_{-T}}} = 0, \quad u\Big|_{S^+} = 0. \tag{7}$$

Краевая задача 2. Найти решение уравнения (5) в области D^-, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\overline{\Gamma^-_T}} = 0, \quad u\Big|_{S^-} = 0. \tag{8}$$

Обозначим через $C_{L'}(D^+), C_{L'}(D^-)$ класс бесконечно дифференцируемых функций в замкнутой области D^+, D^-, удовлетворяющих краевым условиям (7), (8), соответственно.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1) – 3), 5), 6) леммы 1. Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_{L'}(D^+)$ $\left(u(x,t) \in C_{L'}(D^-)\right)$ справедливы следующие оценки:

$$\left(L_1 u,\ e^{-\lambda t}u_t\right)_{L_2(D^+)} \geq m_1\|u\|^2_{H_{1,L}(D^+)}, \tag{9}$$

$$\left(L_1 u, e^{\mu t}u_t\right)_{L_2(D^-)} \geq m_2\|u\|^2_{H_{1,L}(D^-)}, \tag{10}$$

соответственно. Доказательство неравенств (9), (10) совершенно аналогично доказательству леммы 1.

Рассмотрим в области D^+ «ε - регуляризированное» уравнение смешанного типа:

$$L_{1\varepsilon}u_\varepsilon = k_1(t)u_{\varepsilon tt} + (k_2 - \varepsilon)\Delta u_\varepsilon + b_{11}u_{\varepsilon t} + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{(1)}u_{\varepsilon x_i} + c_{11}u_\varepsilon = f_1(x,t) \tag{11}$$

и для него поставим краевую задачу:

$$u_\varepsilon\Big|_{x_n=0} = 0,\ u_\varepsilon\Big|_{S^+} = 0,\ u_\varepsilon\Big|_{\overline{\Gamma_T^+}} = 0. \tag{12}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть следующую краевую задачу:

$$L_{1\varepsilon}u_\varepsilon = k_1(t)u_{\varepsilon tt} + (k_2 + \varepsilon)\Delta u_\varepsilon + b_{11}u_{\varepsilon t} + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{(1)}u_{\varepsilon x_i} + c_{11}u_\varepsilon = f_1(x,t), \tag{13}$$

с краевыми условиями

$$u_\varepsilon\Big|_{x_n=0} = 0,\ u_\varepsilon\Big|_{S^-} = 0,\ u_\varepsilon\Big|_{\overline{\Gamma_T^-}} = 0. \tag{14}$$

Исходя из результатов работ [2], [4], [5] можно утверждать, что если выполнены условия леммы 2, и кроме того, выполнено условие

$$2b_{11}(x,t) - |k_{1t}(t)| \geq \delta > 0,\ (x,t) \in D,$$

то для любой правой части $f_1(x,t)$,

$$f_{1t}(x,t) \in L_2(D^+)\ \left(f_1(x,t), f_{1t}(x,t) \in L_2(D^-)\right),$$

существует и притом единственное решение краевой задачи (11), (12) ((13, (14))) из пространства $W_2^2(D^+)\left(W_2^2(D^-)\right)$ и это решение допускает оценку:

$$\|f_t\|_{L_2(D^+)}^2 + \|f\|_{L_2(D^+)}^2 \geq m_3\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(D^+)}^2, \quad \|f_t\|_{L_2(D^-)}^2 + \|f\|_{L_2(D^-)}^2 \geq m_4\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(D^-)}^2.$$

Далее, имеют место следующие теоремы:

Теорема 1 (*о разрешимости задачи* (5), (7)).

Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того,

$$\left|k_{2x_i}k_{2x_j}\right| \leq M|k_2(x)|;\ f_1(x,t), f_{1t}(x,t) \in L_2(D^+);$$

$$2b_{11} - |k_{1t}| \geq \delta > 0,\ (\mathrm{x,t}) \in D^+.$$

Тогда существует и притом единственное регулярное решение задачи (5), (7) из пространства $H_{2,L}(D^+)$.

Теорема 2 (*о разрешимости задачи* (5), (8)).

Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того,

$$\left|k_{2x_i}k_{2x_j}\right| \leq M|k_2(x)|;\ f_1(x,t), f_{1t}(x,t) \in L_2(D^-);$$

$$2b_{11} - |k_{1t}| \geq \delta > 0,\ (\mathrm{x,t}) \in D^-.$$

Тогда существует и притом единственное регулярное решение задачи (5), (8) из пространства $H_{2,L}(D^-)$.

Доказательство теорем 1, 2. Для функции $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^2(D^+)$ $\left(u_\varepsilon(x,t)\in W_2^2(D^-)\right)$, являющейся решением краевой задачи (5), (7) ((5), (8)), имеют место следующие априорные оценки:

$$\|f_1\|_{L_2(D^+)} \ge m_5 \int_{D^+}\left(u_{\varepsilon t}^2 + |k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2 + u_\varepsilon^2\right)dD^+,$$
$$\|f_1\|_{L_2(D^-)} \ge m_6 \int_{D^-}\left(u_{\varepsilon t}^2 + |k_2+\varepsilon|\sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2 + u_\varepsilon^2\right)dD^-, \qquad (15)$$

где константы λ,μ из леммы 1 и константы m_5, m_6 не зависят от ε. Доказательства этих утверждений легко получаются путем интегрирования по частям и использованием неравенства Коши. Для получения второй априорной оценки возьмем функцию

$$\xi_1(t)=\begin{cases}\equiv 1 \;\; при \;\; t\in(-t,-\eta),\; \dfrac{T}{2}>\eta>0,\\ \le 1 \;\; при \;\; t\in\left[-\eta,-\dfrac{\eta}{2}\right),\\ \equiv 0 \;\; при \;\; t\in\left[-\dfrac{\eta}{2},T\right).\end{cases}$$

Затем рассмотрим функции $W_\varepsilon(x,t)=\xi_1(t)u_\varepsilon(x,t)$. Очевидно, что $W_\varepsilon(x,t)$ будут удовлетворять соответственно, уравнениям

$$L_{1\varepsilon}W_\varepsilon=\xi_1 f_1+2k_1(t)\xi_1'(t)u_{\varepsilon t}+k_1(t)\xi_1''(t)u_\varepsilon=F_\varepsilon. \qquad (16)$$

Тогда умножим уравнение (16) на $-W_{\varepsilon t}$ и проинтегрируем по частям по области D^+; затем, учитывая граничные условия и пользуясь неравенством Коши, получаем:

$$\|f_1\|_{L_2(D^+)} \ge m_7\int_{D^+}\left(u_{\varepsilon tt}^2+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i t}^2+u_{\varepsilon t}^2+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_i}^2+u_\varepsilon^2\right)dD^+, \qquad (17)$$

где константа m_7 не зависит от ε.

Теперь рассмотрим функцию $\xi_2(t)\in C^\infty(-T,T)$ такую, что $\xi_2(t)\equiv 0$ при $-T<t<-2\eta$, $\xi_2(t)\equiv 1$ при $-\eta<t<T$. Очевидно, что $0\le\xi_2(t)\le 1$. Возьмем $\varphi_\varepsilon(x,t)=\xi_2(t)u_\varepsilon(x,t)$. Поскольку функции $\varphi_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$L_{1\varepsilon}\varphi_\varepsilon=\xi_2(t)f_1+2k_1\xi_2'(t)u_{\varepsilon t}+k_1\xi_2''(t)u_\varepsilon=\Phi_\varepsilon(x,t), \qquad (18)$$

то можем утверждать, что $\Phi_\varepsilon(x,t), \Phi_{\varepsilon t}(x,t)$ равномерно ограничены по ε в пространстве $L_2(D^+)$. Далее, для функций $\varphi_\varepsilon(x,t)$ возьмем по переменной t конечные разности:

$$\varphi_{\varepsilon h}=\frac{\varphi_\varepsilon(x,t+h)-\varphi_\varepsilon(x,t)}{h}.$$

Также можно убедиться, что функции $\varphi_{\varepsilon h}$ удовлетворяют уравнениям:

$$L_{1\varepsilon}\varphi_{\varepsilon h}=k_1(t)\varphi_{\varepsilon htt}+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon hx_ix_i}+b_{11}(x,t)\varphi_{\varepsilon ht}+\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{(1)}\varphi_{\varepsilon hx_i}+c_{11}\varphi_{\varepsilon h}=\Phi_{\varepsilon h}(x,t).$$

Пользуясь результатом о гладкости решений задачи (11), (12) и априорной оценкой (17), а также переходя к пределу при $h\to 0$ в полученных неравенствах и устанавливая связь между функциями f_1 и Φ_ε, получаем:

$$\|f_{1t}\|_{L_2(D^+)}+\|f_{1t}\|_{L_2(D^-)}\ge m_8\int_{D^+}\left(u_{\varepsilon tt}^2+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_it}^2+u_{\varepsilon t}^2+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_i}^2+u_\varepsilon^2\right)dD^+ \quad (19)$$

$\forall u_\varepsilon\in C_{L'}(D^+)$.

Из уравнения (11), методом оценивания [6], получаем, что

$$|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_ix_i}\in L_2(D^+).$$

Тогда переходя к пределу при $\varepsilon_k\to 0$ в тождестве

$$\left(u_{\varepsilon_k},L_{1\varepsilon_k}^*W\right)_{L_2(D^+)}=(f_1,W)_{L_2(D^+)}$$

(где L_1^* - оператор, сопряженный оператору L_1, и, кроме того, $W(x,t)\in C_0^\infty(D^+)$- класс финитных функций), получаем, что функция $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (5), (7) и принадлежит пространству $H_{2,L}(D^+)$ и, кроме того, очевидно, что она удовлетворяет уравнению (5) почти всюду. Аналогичным образом, повторяя все шаги, проведенные для области D^+ и для D^-, мы можем установить, что $u(x,t)\in H_{2,L}(D^-)$.

Определение 2. Функцию $u(x,t)\in H_{1,L}(D^+)$ $\left(u(x,t)\in H_{1,L}(D^-)\right)$(следуя [1]) будем называть сильным решением краевой задачи (5), (7) ((5), (8)), если существует последовательность функций $\{u_m\}\subset C_{L'}(D^+)$ $\left(\{u_m\}\subset C_{L'}(D^-)\right)$ таких, что выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty}\|L_1u_n-f_1(x,t)\|_{L_2(D^+)}=\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{H_{1,L}(D^+)}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|L_1u_n-f_1(x,t)\|_{L_2(D^-)}=\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{H_{1,L}(D^-)}=0.$$

Имеет место следующая теорема существования сильных решений.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Кроме того,

$$\left|k_{2x_i}k_{2x_j}\right|\le M|k_2(x)|,\quad 2b_{11}-|k_{1t}|\ge\delta>0,\ (x,t)\in D.$$

Тогда для любой функции $f_1\in L_2(D^+)$ $\left(f_1\in L_2(D^-)\right)$ существует и притом единственное сильное решение краевой задачи (5), (7) из пространства $H_{1,L}(D^+)$ (а для задачи (5), (8) из $H_{1,L}(D^-)$).

Замечание 1. Пусть функции $u^+(x,t)\in H_{i,L}(D^+), u^-(x,t)\in H_{i,L}(D^-), i=1,2$.
Тогда функция

$$u(x,t)=\begin{cases} u^+(x,t) & при \quad (x,t)\in D^+, \\ u^-(x,t) & при \quad (x,t)\in D^- \end{cases} \tag{20}$$

будет также из классов $H_{i,L}(D), i=1,2$. Итак, справедлива следующая

Теорема 4 (*о разрешимости задачи* (5), (2)).

Пусть выполнены условия леммы 1 и теорем 1, 2, 3. Тогда для любых функций $f_1, f_{1t}\in L_2(D)$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (5), (2) из пространства $H_{2,L}(D)$.

Для доказательства единственности решения достаточно взять два решения $u_1, u_2\in H_{2,L}(D)$ и применить лемму 1.

Теперь рассмотрим уравнение (6) в области D. Имеет место

Теорема 5. Пусть выполнены условия

$$2c_{22}(x,t)-\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)}(x,t)-b_{22}(x,t)\le 0,\ (x,t)\in D, \tag{21}$$

$$\left|a_{i1}^{(2)}(x,t)\right|\le M\left|k_2(x)\right| \ . \tag{22}$$

Тогда для любой функции $f_2(x,t)\in L_2(D)$ существует и притом единственное решение задачи (6), (3) из пространства $H_{2,L}(D)$ (если отказаться от условий (22), то решение задачи (6), (3) будет из пространства $W_2^2(D)$).

Доказательство. Выполнение условия (20) обеспечивает коэрцитивность оператора (6). Так как оператор (6) является эллиптического типа, то все вышеуказанные шаги остаются в силе.
Пусть

$$M\bar{u}=K\bar{u}_{tt}+\sum_{i=1}^{n}A_i\bar{u}_{x_i}+B\bar{u}_t+C\bar{u},\ \ N\bar{u}=\sum_{i=1}^{n}P_i\bar{u}_{x_i}+Q\bar{u}_t+R\bar{u},$$

где

$$K=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A_i=\begin{pmatrix}a_{i1}^{(1)} & 0\\ 0 & a_{i2}^{(2)}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & 0\\ 0 & b_{22}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}k_2\Delta+c_{11} & 0\\ 0 & \Delta+c_{22}\end{pmatrix},$$

$$P_i=\begin{pmatrix}0 & a_{i2}^{(1)}\\ a_{i1}^{(1)} & 0\end{pmatrix},\ \mathrm{Q}=\begin{pmatrix}0 & b_{12}\\ b_{21} & 0\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}0 & c_{12}\\ c_{21} & 0\end{pmatrix},\quad \bar{u}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$L\bar{u}=M\bar{u}+N\bar{u}=\bar{f}\ , \text{где}\ \bar{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

Теорема 6. Пусть выполнены условия леммы 1, теорем 1, 2, 3, 4, 5 и $f_1, f_{1t}, f_2\in L_2(D), f_1(x_1-T)=0$, и пусть, кроме того, $\left|a_{i2}^{(2)}\right|\le M\left|k_2\right|$, коэффициенты $a_{i2}^{(1)}(x,t)$ достаточно малы. Тогда существует и притом единственное решение задачи (1) – (3) из пространства $H_{2,L}(D)$ (если потребовать, что $a_{i2}^{(1)}$ или $a_{i2}^{(2)}$ были достаточно малы, тогда существует и притом единственное решение задачи (1) – (3) из пространства $H_{2,L}(D)\cap W_2^2(D)$).

Доказательство. Умножая $L\bar{u}$ на векторы $\bar{\rho}_1 = \{u_t e^{-\lambda t}, \upsilon\}$, $\bar{\rho}_2 = \{u_t e^{\mu t}, \upsilon\}$, соответственно, в областях D^+ и D^-, а также, применяя неравенство Коши и формулу интегрирования по частям, легко получить, что:

$$\|L\bar{u}\|_{0,D} \geq m\|\bar{u}\|_{H_1(D)}. \tag{23}$$

Пусть $H_{t,0}$ - пространство вектор функций $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, такая, что $\varphi_1, \varphi_{1t}, \varphi_2 \in L_2(D)$, причем $\varphi_1(x,-T) = 0$. Норму в $H_{t,L}(D)$ определим следующим образом:

$$\|\bar{\varphi}\|_{t,L,D}^2 = \|\varphi_{1t}\|_0^2 + \|\varphi_2\|_0^2.$$

Из ранее доказанных теорем следуют оценки:

$$\|\bar{u}\|_{H_{2,L}(D)} \leq m\|M\bar{u}\|_{t,L,D}. \tag{24}$$

Ясно, что $M\bar{u} = L\bar{u} - N\bar{u}$ и

$$\|\bar{u}\|_{H_{2,L}(D)} \leq c\left(\|\bar{u}\|_{t,L,D} + \|N\bar{u}\|_{t,L,D}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\|\bar{u}\|_{H_{2,L}(D)} \leq c\|L\bar{u}\|_{t,L,D}.$$

Теперь рассмотрим семейство уравнений

$$L_\tau \bar{u} = M\bar{u} + \tau N\bar{u} \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

Очевидно, что равномерно относительно τ, имеет место априорная оценка

$$\|\bar{u}\|_{H_{2,L}(D)} \leq c\|Lu_\tau \bar{u}\|_{t,L,D}.$$

С другой стороны, при $\tau = 0$ задача (1)-(3) разрешима. Тогда, на основании хорошо известного метода из работы [1], так называемого методом продолжения по параметру, легко доказывается разрешимость задачи (1) – (3) из пространства $H_{2,L}(D)$. Доказательство единственности решения задачи (1) – (3) следует из леммы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.
2. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983, - 84 с.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Издательство СО АН СССР, 1962, - 255 с.
4. Нурмамедов М.А. О некоторых корректных краевых задачах для уравнения смешан-

ного типа с перпендикулярными вырождениями / Некоторые проблемы дифференциальных уравнений и дискретной математики: Меж.вуз.сб.науч.тр. / Новосибирск ун-т., Новосибирск, 1986, с. 104-107.
5. Нурмамедов М.А. Вторая краевая задача для уравнения смешанного типа с меняющимся направлением времени / Тезисы докл. конференции молодых ученых Сибири и Дальнего Востока. 1987, с.64-66.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, 407 с.
7. Нурмамедов М.А. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка с меняющимся направлением времени.Тезисы докладов Второго Сибирского Конгресса по Прикладной и Индустриальной Математике. Ин-т математики имени С.А.Соболева СО РАН, Новосибирск, 1996, с. 93.
8. Нурмамедов М.А. Об одной периодической задаче для уравнения неклассического типа. Материалы научной конференции «Современные проблемы математики», посвященной памяти А.А.Новрузова. Баку , 2001, с. 36-37

ÇOXÖLÇÜLÜ FƏZADA QARIŞIQ-TƏRKİBLİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNA BİLMƏSİ

M.Ə.NURMƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Təqdim edilən məqalədə çoxölçülü eyni bir oblastda cırlaşan elliptik və hiperbolik, həmçinin tərkib tipli tənliklərə baxılır. Çoxölçülü oblastda və dəyişən tipli tənliklər nəzəri və həm də praktik olaraq çox böyük əhəmiyyət kəsb elir. Baxılan məqalədə funksional analiz, "ε-requlyarlaşdırma", parametrə görə davam etdirmə üsullarını tətbiq etməklə qoyulmuş məsələnin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi çəkili S.L.Sobolev fəzasında isbat edilir.

ON THE SOLVABILITY ONE BOUNDSRY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS EQUATIONS OF MIXED-COMPOSITE TYPE IN SPACE

M.A.NURMAMEDOV

SUMMARY

In present work considered degenerating equations of elliptical and hyperbolic, composite types in multidimensional domain. Notice that, in case of multidimensional and changing type equations are represents very important means of the theoretical and practice aspects. In the work applied functional analysis, co-called "ε - requlariting", and method of continuation by parameter. Finally proved existence and uniqueness of generalized solution of the boundary value problems in wieght spaces S.L.Sobolev's.