BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ «КРАЕВЫЕ» ЗАДАЧИ СО СТОЯЩИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет

В работе, применяя конечное интегральное преобразование для параболических уравнений, решается интегро-дифференциальная «краевая» задача. При этом в «краевые» условия входят старшие производные по пространственной переменной искомой функции. Получается аналитическое представление решения рассматриваемой задачи.

В работах [1], [5], [6] нами показана применимость метода конечного интегрального преобразования [3] к решению следующих смешанных задач на сопряжение параболических систем с разрывными коэффициентами:

Найти решение системы

$$D_t u_i(x,t) - a(t)\sum_{j=0}^{2p_i} A_{ij}(x) D_x^j u_i(x,t) = f_i(x,t),$$

$$x \in (a_i, b_i), \quad t \in (0,T), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

при интегро-дифференциальных «краевых» условиях

$$+ \int_{a_i}^{b_i} \gamma_{jm}^{(i)}(x) D_x^m D_t^j u_i(x,t)dx\} = \varphi(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u_i(x,0) = \Phi_i(x), \qquad x \in (a_i, b_i), \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

где A_{ij}-квадратные матрицы порядка r_i; $a(t)$-скалярная функция; $\alpha_{jm}^{(i)}$, $\beta_{jm}^{(i)}$, $\gamma_{jm}^{(i)}(x)$-матрицы размеров $N \times r_i$, $N = 2(d_1 + \ldots + d_n)$, $d_\nu = p_\nu r_\nu$; Φ_i, f_i, u_i - столбцы размера r_i; φ-столбец размера N; r_i, p_i, n-натуральные числа; $\chi(i)$-0 или 1; T $(0 < T \le \infty)$, a_i, b_i $(a_i < b_i)$ конечные числа; u_i $(i = 1,\ldots,n)$-искомое решение, а остальные данные, входящие в (1)-(3) считаются известными и наконец $S(j,i)$-неотрицательные целые числа, меньшие или равные $2p_i - 1$.

Исследование автора показало, что метод конечного интегрального преобразования применим к решению задач (1)-(3) и в случае, когда $S(j,i) \ge 2p_i$, т.е. когда в «краевых» условиях (2) входят и старшие производные искомой функции по пространственной переменной.

Ради простоты записи мы ограничимся рассмотрением следующей модельной задачи:

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t), \qquad x\in(0,1), \quad t>0 \tag{4}$$

при интегро-дифференциальных «краевых» условиях

$$U_i(u)=\sum_{j=0}^{2}\left\{\alpha_{ij}\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=0}+\beta_{ij}\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=1}+\int_0^1\gamma_{ij}(x)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}dx\right\}=\varphi_i(t), \; t>0, \; i=1,2, \tag{5}$$

и начальном условии

$$u(x,0)=f(x), \quad x\in(0,1), \tag{6}$$

здесь $u\equiv u(x,t)$-искомое решение, остальные считаются известными; α_{ij}, β_{ij} - скалярные числа.

Пусть выполняются ограничения 1^0-3^0.

1^0. Пусть $\operatorname{Re} a^2>0$, т.е. пусть $|arg\, a|<\pi/4,$ где a-некоторый констант.

2^0. $\gamma_{ij}(x)\in C^m([0,1])$, $i=1,2,$ $j=0,1,2$, где m-некоторое неотрицательное целое число.

3^0. функции $F(x,t)$, $\varphi_i(t)$, $i=1,2$ $f(x)$ непрерывны при $x\in[0,1]$, $t\geq 0$.

Для решения задачи (4)-(6) сначала будем решать следующую параметрическую задачу

$$\left(a^2\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)y=\psi(x), \quad x\in(0,1) \tag{7}$$

$$U_i(y)=\gamma_i, \quad i=1,2, \tag{8}$$

где $\psi(x)\in C([0,1])$, γ_i $(i=1,2)$-некоторые числа. Здесь и в дальнейшем предполагается, что

$$\lambda\in R_\sigma=\left\{\lambda: \; |\lambda|\geq R, \; |arg\,\lambda|\leq\frac{\pi}{4}+\sigma\right\},$$

σ-некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству $0<\sigma<\frac{\pi}{4}-|arg\, a|;$ R-достаточно большое положительное число.

Системы фундаментальных частных решений однородного уравнения, соответствующего (7), берем в виде

$$y_1\equiv y_1(x,\lambda)=exp\left(-\frac{\lambda}{a}x\right); \; y_2\equiv y_2(x,\lambda)=exp\left(-\frac{\lambda}{a}(1-x)\right), x\in[0,1], \lambda\in R_\sigma. \tag{9}$$

Из (9) получаем

$$|y_1(x,\lambda)| \le const. \quad exp(-\varepsilon|\lambda|x), \qquad x \in [0,1],$$
$$|y_2(x,\lambda)| \le const. \quad exp(-\varepsilon|\lambda|(1-x)), \qquad \lambda \in R_\sigma, \tag{10}$$
ε -некоторое положительное число.

Положим

$$\Delta(\lambda) = \det\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Разлагая определитель (11) имеем

$$\Delta(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \lambda^{4-i} + \frac{E(\lambda)}{\lambda^{m-3}}, \quad \lambda \in R_\sigma, \tag{12}$$

где α_i -некоторые числа, $\alpha_0 = \frac{1}{a^4}(\alpha_{12}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{12})$; m -из ограничения 2^0; $E(\lambda)$ -некоторая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|E(\lambda)| \le const, \qquad \lambda \in R_\sigma. \tag{13}$$

Отметим, что если число m (из ограничения 2^0) достаточно большое, то для $\Delta(\lambda)$ можно получить более точную асимптотику.

Определение. Будем говорить, что «краевые» условия (8) (или (5)) правильны, если хотя бы одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (из (12)) отлично от нуля.

Имеет место

Лемма 1. Пусть выполняются ограничения 1^0-2^0 и «краевые» условия (8) правильны. Тогда при $\lambda \in R_\sigma$:

1) задача (7)-(8) имеет единственное решение
2) это решение можно представить формулой

$$y(x,\lambda) = \delta[x,\lambda,\gamma_1,\gamma_2] - \delta[x,\lambda,V_1(\psi),V_2(\psi)] + \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)d\xi, \quad x \in [0,1], \lambda \in R_\sigma, \tag{14}$$

где

$$\delta[x,\lambda,\gamma_1,\gamma_2] = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ -\gamma_1 & U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ -\gamma_2 & U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix},$$

$$G(x,\xi,\lambda) = g(x,\xi,\lambda) + G_1(x,\xi,\lambda), \; G_1(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Delta_1(x,\xi,\lambda),$$

$$V_i(\psi) = \frac{1}{a^2}\left\{\alpha_{i2}\psi(0) + \beta_{i2}\psi(1) + \int_0^1 \gamma_{i2}(x)\psi(x)dx\right\}, \; i = 1,2;$$

$$\Delta_1(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(g) & U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$g(x,\xi,\lambda)=-\dfrac{1}{2a\lambda}\exp\left(-\dfrac{\lambda}{a}|x-\xi|\right)$-фундаментальное решение [2] уравнения (7).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются ограничения 1^0-2^0 и «краевые» условия (8) правильны. Тогда для любых чисел γ_1, γ_2 и $\psi(x)\in C([0,1])$, если $\psi(x)$ непрерывна по Гельдеру с показателем α $(0<\alpha\le 1)$ в $[\mu_1,\mu_2]$, $(0<\mu_1<\mu_2<1)$, то имеет место

$$\int\limits_{\text{☹}}\lambda^k\delta[x,\lambda,\gamma_1,\gamma_2]d\lambda=0,\quad 0<x<1, \tag{16}$$

k -любое целое число;

$$\int\limits_{\text{☹}}\lambda^s d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)d\xi=-s\sqrt{-1}\left(\frac{\pi}{2}+2\sigma\right)\psi(x),\ s=0{,}1,\ 0<\mu_1<x<\mu_2<1, \tag{17}$$

где ☹-бесконечная гладкая линия в R_σ, достаточно далекая часть которой совпадает с продолжениями лучей $\arg\lambda=\pm(\pi/4+\sigma)$, причем интеграл по линиям ☹ понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Согласно условиям теоремы из (15), с учетом (10), получаем

$$|\delta[x,\lambda,\gamma_1,\gamma_2]|\le\text{const}|\lambda|^M(|\gamma_1|+|\gamma_2|)\times\{\exp(-\varepsilon|\lambda|x)+\exp(-\varepsilon|\lambda|(1-x))\},\ x\in[0,1],\ \lambda\in R_\sigma, \tag{18}$$

$$|G_1(x,\xi,\lambda)|\le\text{const}\,|\lambda|^M\{\exp(-\varepsilon|\lambda|x)+\exp(-\varepsilon|\lambda|(1-x))\},\quad x,\xi\in[0,1],\quad \lambda\in R_\sigma, \tag{19}$$

где M -некоторое целое число.

Пользуясь неравенствами (18) и (19) легко понять [3] выполнимость формулы (16) и равенств

$$\int\limits_{\text{☹}}\lambda^k d\lambda\int\limits_0^1 G_1(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)d\xi=0,\quad 0<x<1, \tag{20}$$

где k -любое целое число.

Согласно [3]-[4], для фундаментального решения $g(x,\xi,\lambda)$ имеет место следующая формула обращения

$$\int\limits_{\text{☹}}\lambda^s d\lambda\int\limits_0^1 g(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)d\xi=-s\sqrt{-1}\left(\frac{\pi}{2}+2\sigma\right)\psi(x),\ s=0{,}1,\quad 0<\mu_1<x<\mu_2<1. \tag{21}$$

Из (15), (20)-(21) получаем справедливость формулы обращения (17). Теорема доказана.

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполняются ограничения 1^0-3^0 и интегро-дифференциальные «краевые» условия (5) правильны. Тогда, если задача (4)-(6) имеет классическое решение, то

1) оно единственное,
2) его можно представить формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{\text{☹}}\lambda\exp\left(\lambda^2 t\right)\text{☞}(x,t,\lambda)d\lambda,\qquad x\in(0,1),\quad t>0, \tag{22 }$$

где

$$\text{☞}(x,t,\lambda)=\delta\left[x,\lambda,\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau,\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\delta\left[x,\lambda,V_1\left(\text{☞}_{\square}(x,t,\lambda)\right),V_2\left(\text{☞}_{\square}(x,t,\lambda)\right)\right]+\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\text{☞}_{\square}(\xi,t,\lambda)d\xi;$$

$$\text{☞}_{\square}(x,t,\lambda)=-f(x)-\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)F(x,\tau)d\tau;$$

$$q(\lambda,\tau)=\exp\left(-\lambda^2\tau\right). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть задача (4)-(6) имеет классическое решение. Тогда из (4) имеем

$$\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau=a^2\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau+\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)F(x,\tau)d\tau.$$

Отсюда

$$\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\lambda^2\right)\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)u(x,\tau)d\tau=q(\lambda,t)u(x,t)+\text{☞}_0(x,t,\lambda),\quad x\in(0,1),\quad (t>0). \tag{24}$$

Из интегро-дифференциальных «краевых» условий (5) получаем

$$U_i\left(\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)u(x,\tau)d\tau\right)=\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\varphi_i(\tau)d\tau,\quad i=1,2. \tag{25}$$

При $\lambda\in R_{\sigma}$ согласно Лемме 1 из (24)-(25) получаем

$$\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)u(x,\tau)d\tau=\delta\left[x,\lambda,\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau,\int\limits_0^t q(\lambda,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\delta\left[x,\lambda,V_1\{q(\lambda,t)u(x,t)+\text{☞}_0(x,t,\lambda)\},V_2\{q(\lambda,t)u(x,t)+\text{☞}_0(x,t,\lambda)\}\right]+$$

$$+\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\{q(\lambda,t)u(\xi,t)+\text{☞}_0(\xi,t,\lambda)\}d\xi.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^t\exp\left(-\lambda^2\tau\right)u(x,\tau)d\tau+\exp\left(-\lambda^2 t\right)\delta\left[x,\lambda,V_1(u(x,t)),V_2(u(x,t))\right]-$$

$$-\exp\left(-\lambda^2 t\right)\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)u(\xi,t)d\xi=\text{☞}(x,t,\lambda),\qquad x\in[0,1],\quad t\geq 0,\quad \lambda\in R_{\sigma}. \tag{26}$$

Умножая обе части (26) на $\lambda\, exp\left(\lambda^2 t\right)$ и интегрируя по линиям ☹, имеем

$$\int_{\text{☹}} \lambda d\lambda \int_0^t \exp\left(\lambda^2 (t-\tau)\right) u(x,\tau) d\tau + \int_{\text{☹}} \lambda \delta\left[x, \lambda, V_1\left(u(x,t)\right), V_2\left(u(x,t)\right)\right] d\lambda -$$

$$- \int_{\text{☹}} \lambda d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) u(\xi,t) d\xi = \int_{\text{☹}} \lambda \exp\left(\lambda^2 t\right) \text{☞}(x,t,\lambda) d\lambda. \qquad (27)$$

Согласно [3], имеет место следующая формула обращения

$$\int_{\text{☹}} \lambda d\lambda \int_0^t \exp\left(\lambda^2 (t-\tau)\right) \varphi(\tau) d\tau = \left(\frac{\pi}{2} - 2\sigma\right) \sqrt{-1}\varphi(t), \qquad t > 0, \qquad (28)$$

где $\varphi(t)$-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция.

Пользуясь формулами (16), (17) и (28) имеем

$$\int_{\text{☹}} \lambda d\lambda \int_0^t exp\left(\lambda^2 (t-\tau)\right) u(x,\tau) d\tau = \left(\frac{\pi}{2} - 2\sigma\right) \sqrt{-1} u(x,t),$$

$$\int_{\text{☹}} \lambda d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) u(\xi,t) d\xi = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\sigma\right) \sqrt{-1} u(x,t),$$

$$\int_{\text{☹}} \lambda \delta\left[x, \lambda, V_1\left(u(x,t)\right), V_2\left(u(x,t)\right)\right] d\lambda = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \qquad (29)$$

Учитывая (29) в (27), получаем формулы (22).

Теорема доказано.

В виду того, что функция $exp\left(\lambda^2 t\right)$ при $\mathrm{t} > 0$ и $|\lambda| \to \infty$ по линиям ☹ убывает экспоненциальным ростом, то накладывая определенные ограничения на данные задачи (4)-(6) непосредственной проверкой легко убедиться, что функция $u(x,t)$, определяемая формулой (22), является классическим решением задачи (4)-(6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов Э.А. К теории смешанных задач для параболических систем с разрывными коэффициентами.- ДАН Азерб. ССР, 1981, т.XXXVII, №6, с.11-16.
2. Гасымов Э.А. Построение фундаментальной матрицы и асимптотическое представление решений обыкновенных линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра. –ДАН Азерб. ССР, 1980, т. XXXVI, №10, с.11-16
3. Гасымов Э.А. Интегральные преобразования и параболические потенциалы; применение их к решению некоторых смешанных задач. –Канд. диссертация, МГУ им. М.В.Ломоносова, М.: 1984.
4. Гасымов Э.А. Асимптотические формулы и формула обращений для решений некоторых линейных дифференциальных систем уравнений с параметром.- Известия АН Азерб., ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1989, т.X , №1, с.29-34.
5. Гасымов Э.А. Смешанные задачи на сопряжение параболических систем разных порядков с нелокальными краевыми условиями. –Дифференц. уравнения, 1990, т.26, №8, с. 1364-1374.
6. Гасымов Э.А. Применение интегральных преобразований к решению некоторых смешанных задач. –Дифференц. уравнения, 1992, т.28, №3, с.521-522.

KƏSİLƏN ƏMSALLI PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN YÜKSƏK TƏRTİBLİ İNTEQRO-DİFERENSİAL «SƏRHƏD» MƏSƏLƏSİ

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə кəsilən əmsallı paraboliк tənliкlər üçün inteqro-diferensial şərtli «sərhəd» məsələsinə baxılır. «Sərhəd» şərtlərinə fəza dəyişəninə görə yüкsəк tərtib törəmə daxil olur. Sonlu inteqral çevirmə metodunu tətbiq etməкlə baxılan məsələnin həllinin analitiк ifadəsi alınır.

INTEGRO-DIFFERENTIAL «BOUNDARY» VALUE PROBLEMS WITH HIGH ORDER DERIVATIVES FOR PARABOLIC SYSTEM OF DISCONTINUOUS COEFFICIENT

E.A.GASIMOV

SUMMARY

In this work the integro-differential «boundary» value problem of the parabolic equations is solved applying finite integral transformations. Note that in «boundary» conditions at lend high order derivatives on space variable of seeking function. The analytical representation of the solution of considered problem.