BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2008*

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

З.Ф. ХАНКИШИЕВ

Бакинский Государственный Университет

Методом конечных разностей исследуется одна смешанная задача для уравнения теплопроводности, в которой граничные условия имеют особый вид. Дается способ решения разностной задачи, аппроксимирующей исходную задачу со вторым порядком точности, и доказывается ее сходимость.

Постановка задачи

Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D}=\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ функцию $u=u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<l,\ 0<t\le T, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0)=\Phi(x),\quad 0\le x\le l \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,t)=u(\bar{x},t),\ u(l,t)=u(\tilde{x},t),\ 0\le t\le T, \tag{3}$$

где $\bar{x}$, $\tilde{x}$ –некоторые фиксированные точки интервала $(0,l)$, $f(x,t)$ и $\Phi(x)$ – известные непрерывные функции своих аргументов.

Следует отметить, что подобная задача при $\bar{x}=\tilde{x}$ методом конечных разностей исследована в [1], где построена разностная задача со вторым порядком точности и доказана сходимость разностной задачи.

§1.Разностная задача и ее решение

Отрезок $[0,l]$ оси $0x$ разделим на $N\ge 2$ равных частей и число N выберем таким образом, чтобы точки $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ были точками деления этого отрезка. Пусть $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,\ldots,N,\ h=l/N\}$ и $\bar{x}=kh,\ \tilde{x}=mh,\ 0<k,m<N$. Одновременно, отрезок $[0,T]$ оси $0t$ разделим на $j_0\ge 2$ равных частей и точки деления обозначим через $t_j,\ j=0,1,\ldots,j_0$. Пусть $\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,j_0,\ \tau=T/j_0\}$.

Через $\overline{\omega}_{h\tau}$ обозначим сетку в области $\overline{D}$:

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_x\times\overline{\omega}_\tau=\{(x_i,t_j),\ x_i\in\overline{\omega}_h,\ t_j\in\overline{\omega}_\tau\}.$$

Пусть y_i^j –значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции $y = y(x,t)$, определенной на $\overline{\omega}_{h\tau}$.

Задаче (1)–(3) на сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ сопоставим следующую разностную задачу:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \Lambda(y_i^{j+1} + y_i^j) + \varphi_i^j, \ i = 1,2,...N-1, \ j = 0,1,...,j_0 - 1, \tag{1.1}$$

$$y_i^0 = \Phi(x_i), \ i = 1,2,...N, \tag{1.2}$$

$$y_0^j = y_k^j, \ y_N^j = y_m^j, \ j = 0,1,...,N. \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi_i^j = f(x_i, t_j + 0{,}5\tau), \ \Lambda y_i^j = \dfrac{1}{h^2}(y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j)$.

Разностная задача (1.1)–(1.3) аппроксимирует задачу (1)–(3) с точностью $\mathrm{O}(h^2 + \tau^2)$, если решение уравнения (1) – $u = u(x,t) \in C_3^4(D)$.

С учетом граничных условий (1.3) разностные уравнения (1.1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&-\theta y_k^{j+1} + (1+2\theta) y_1^{j+1} - \theta y_2^{j+1} = F_1^j, \\
&-\theta y_1^{j+1} + (1+2\theta) y_2^{j+1} - \theta y_3^{j+1} = F_2^j, \\
&\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
&-\theta y_{N-3}^{j+1} + (1+2\theta) y_{N-2}^{j+1} - \theta y_{N-1}^{j+1} = F_{N-2}^j, \\
&-\theta y_{N-2}^{j+1} + (1+2\theta) y_{N-1}^{j+1} - \theta y_m^{j+1} = F_{N-1}^j, \ j = 0,1,...,j_0 - 1,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\theta = \dfrac{a^2\tau}{2h^2}$, а F_i^j, $j = 1,2,...,N-1$, определяются через значения y_i^j и φ_i^j, $i = 1,2,...,N-1$.

Считая F_i^j, $j = 1,2,...,N-1$, известными, задачу (1.4) можно рассмотреть как трехточечную разностную задачу, относительно $y_i^{j+1}, \ i = 1,2,...,N-1$.

Для решения разностной задачи (1.4) рассмотрим следующие вспомогательные разностные задачи относительно сеточных функций $u = u_i^{j+1}$, $\upsilon = \upsilon_i^{j+1}$ и $z = z_i^{j+1}$:

$$\begin{aligned}
&(1+2\theta) u_1^{j+1} - \theta u_2^{j+1} = F_1^j, \\
&-\theta u_{i-1}^{j+1} + (1+2\theta) u_i^{j+1} - \theta u_{i+1}^{j+1} = F_i^j, \ i = 2,3,...,N-2, \\
&-\theta u_{N-2}^{j+1} + (1+2\theta) u_{N-1}^{j+1} = F_{N-1}^j,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$
\begin{aligned}
&(1+2\theta)\upsilon_1^{j+1} - \theta\upsilon_2^{j+1} = \theta,\\
&-\theta\upsilon_{i-1}^{j+1} + (1+2\theta)\upsilon_i^{j+1} - \theta\upsilon_{i+1}^{j+1} = 0,\ i = 2,3,\ldots,N-2,\\
&-\theta\upsilon_{N-2}^{j+1} + (1+2\theta)\upsilon_{N-1}^{j+1} = 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+2\theta)z_1^{j+1} - \theta z_2^{j+1} = 0,\\
&-\theta z_{i-1}^{j+1} + (1+2\theta)z_i^{j+1} - \theta z_{i+1}^{j+1} = 0,\ i = 2,3,\ldots,N-2,\\
&-\theta z_{N-2}^{j+1} + (1+2\theta)z_{N-1}^{j+1} = \theta.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Лемма 1.Пусть сеточные функции $u = u_i^{j+1}$, $\upsilon = \upsilon_i^{j+1}$ и $z = z_i^{j+1}$ – решения разностных задач (1.5) ,(1.6) и (1.7) , соответственно . Тогда для решения задачи (1.4) имеет место равенство

$$y_i^{j+1} = u_i^{j+1} + y_k^{j+1}\upsilon_i^{j+1} + y_m^{j+1}z_i^{j+1}, \quad i = 1,2,\ldots N-1. \tag{1.8}$$

В справедливость этой леммы можно убедиться прямой подстановкой выражения y_i^{j+1}, определяемого равенством (1.8) в (1.4).

Лемма 2. Если $\upsilon = \upsilon_i^{j+1}$ –решение задачи (1.6) , $z = z_i^{j+1}$ –решение задачи (1.7) , то

$$z_i^{j+1} = \upsilon_{N-i}^{j+1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1. \tag{1.9}$$

Для доказательства этой леммы достаточно в задаче (1.7) сделать замену

$$z_i^{j+1} = P_{N-i}^{j+1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1\ .$$

С учетом равенства (1.9) равенство (1.8) можно переписать в виде

$$y_i^{j+1} = u_i^{j+1} + y_k^{j+1}\upsilon_i^{j+1} + y_m^{j+1}\upsilon_{N-i}^{j+1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{1.10}$$

Для каждого значения j решения разностных задач (1.5) и (1.6) можно найти известным методом прогонки(см., например,[2]).Пусть для фиксированного значения j найдены решения u_i^{j+1} и υ_i^{j+1} этих задач. Тогда из равенства (1.10) при $i = k$ и $i = m$ имеем:

$$
\begin{cases}
(1-\upsilon_k^{j+1})y_k^{j+1} - \upsilon_{N-k}^{j+1}y_m^{j+1} = u_k^{j+1},\\
-\upsilon_m^{j+1}\cdot y_k^{j+1} + (1-\upsilon_{N-m}^{j+1})y_m^{j+1} = u_m^{j+1}.
\end{cases}
$$

Найдя из этой системы уравнений значения y_k^{j+1} и y_m^{j+1} , затем подставляя их в правую часть равенства (1.10), можно вычислить значения $y_i^{j+1},\ i = 1,2,\ldots,N-1$.

§2. Принцип максимума

С учетом граничных условий (1.3) перепишем разностные уравнения (1.1) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
-\frac{a^2}{2h^2}y_k^{j+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}\right)y_1^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_2^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_k^{j}-\\
-\left(\frac{1}{\tau}-\frac{a^2}{h^2}\right)y_1^{j}-\frac{a^2}{2h^2}y_2^{j}=\varphi_1^j,\\
-\frac{a^2}{2h^2}y_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}\right)y_i^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_{i+1}^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_{i-1}^{j}-\\
-\left(\frac{1}{\tau}-\frac{a^2}{h^2}\right)y_i^{j}-\frac{a^2}{2h^2}y_{i+1}^{j}=\varphi_i^j,\ i=2,3,\ldots,N-2,\\
-\frac{a^2}{2h^2}y_{N-2}^{j+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{a^2}{h^2}\right)y_{N-1}^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_m^{j+1}-\frac{a^2}{2h^2}y_{N-2}^{j}-\\
-\left(\frac{1}{\tau}-\frac{a^2}{h^2}\right)y_{N-1}^{j}-\frac{a^2}{2h^2}y_m^{j}=\varphi_{N-1}^j,\ j=0,1,\ldots,j_0-1.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

К этим разностным уравнениям присоединим начальное условие

$$y_i^0=\Phi(x_i),\ i=1,2,\ldots\mathrm{N}. \tag{2.2}$$

Предположим, что шаги h и τ сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$ удовлетворяют условию

$$\tau\le\frac{a^2}{h^2}. \tag{2.3}$$

Теорема 1. (Принцип максимума). Пусть сеточная функция y_i^j, определенная на $\overline{\omega}_{h\tau}$, удовлетворяет задаче (2.1)–(2.2). Пусть $\varphi_i^j\le 0$ $(\varphi_i^j\ge 0)$, $i=1,2,\ldots,N-1$, $j=0,1,\ldots,j_0-1$. Если шаги h и τ сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$ удовлетворяют условию (2.3), то решение y_i^j, отличное от константы, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в узлах сетки $\omega_{h\tau}=\{(x_i,t_j),i=0,1,\ldots,\mathrm{N},\ j=1,2,\ldots,j_0\}$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы, т.е. докажем, что если $\varphi_i^j\le 0,\ i=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,j_0-1$, то решение y_i^j не может принимать наибольшего положительного значения в узлах сетки $\omega_{h\tau}$.

Пусть в некотором узле сетки $\omega_{h\tau}$ решение y_i^j принимает наибольшее положительное значение. Тогда ,так как $y_\mathrm{i}^\mathrm{j}\ne const$, то найдется точка (x_l,t_n), $0\le l\le N, 0\le n\le j_0-1$, в которой

$$y_l^{n+1} = \max_{\substack{0\le i\le N\\ 0\le j\le j_0}} y_i^j = M > 0,$$

и хотя бы в одной из соседних точек $(x_{l\pm1}, t_{n+1})$, $(x_{l\pm1}, t_n)$, (x_l, t_n) значение y_i^j будет строго меньше М.

Пусть $0 < l < N$. Тогда при $i = l$, $j = n$ имеем:

$$\varphi_l^n = -\frac{a^2}{2h^2} y_{l-1}^{n+1} + (\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2}) y_l^{n+1} - \frac{a^2}{2h^2} y_{l+1}^{n+1} - \frac{a^2}{2h^2} y_{l-1}^n -$$

$$-(\frac{1}{\tau} - \frac{a^2}{h^2}) y_l^n - \frac{a^2}{2h^2} y_{l+1}^n > (-\frac{a^2}{2h^2} + \frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{a^2}{2h^2} - \frac{a^2}{2h^2} -$$

$$-\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{a^2}{2h^2}) M = 0 \quad ,$$

т.е. $\varphi_l^n > 0$, что невозможно в силу условия $\varphi_l^n \le 0$,

Пусть $l = 0$. В этом случае имеем, что

$$y_k^{n+1} = \max_{\substack{0\le i\le N\\ 0\le j\le j_0}} y_i^j = M > 0 ,$$

так как $y_k^{n+1} = y_0^{n+1}$. Рассматривая на этот раз разностное уравнение при $i = k$, как в предыдущем случае, получили бы $\varphi_k^n > 0$, что противоречит условию $\varphi_k^n \le 0$.

Аналогичным образом можно показать, что $l \ne N$.

Первая часть теоремы доказана.Вторую часть теоремы можно доказать аналогично.

Следствие1.Если $\varphi_i^j \ge 0$ $(\varphi_i^j \le 0)$, $i = 1,2,\ldots,N-1,$ $j = 0,1,\ldots,j_0 - 1$ и $y_i^0 \ge 0$, $(y_i^0 \le 0)$, то решение задачи (2.1)–(2.2) неотрицательно (неположительно): $y_i^j \ge 0$ $(y_i^j \le 0)$, $i = 0,1,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,j_0$.

Следствие 2. При $\varphi_i^j = 0$, $i = 1,2,\ldots,N-1,$ $j = 0,1,\ldots,j_0 - 1,$ $y_i^0 = 0,$ $i = 0,1,\ldots,N,$ задача (2.1)–(2.2) имеет только тривиальное решение $y_i^j = 0,$ $i = 0,1,\ldots,N,$ $j = 0,1,\ldots,j_0$, и следовательно, задача (2.1)–(2.2) однозначно разрешима при любых φ_i^j и $\Phi(x_i)$.

Теорема 2 (Теорема сравнения). Пусть y_i^j – решение задачи (2.1)–(2.2), а $\overline{y}_i^j$ – решение задачи, которая получится при замене в (2.1)–(2.2) функций φ_i^j и $\Phi(x_i)$, соответственно, на $\overline{\varphi}_i^j$ и $\overline{\Phi}(x_i)$. Тогда, если

$$\left|\varphi_i^j\right| \le \overline{\varphi}_i^j, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 0,1,\ldots,j_0 - 1, \quad \left|\Phi(x_i)\right| \le \overline{\Phi}(x_i),$$

$i = 0,1,...,N,$ (2.4)

то имеет место неравенство

$$\left|y_i^j\right| \le \bar{y}_i^j, \quad i = 0,1,...,N, \; j = 0,1,...,j_0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как $\overline{\varphi}_i^j \ge 0$, $\overline{\Phi}(x_i) \ge 0$, то согласно следствию 1, $\overline{y}_i^j \ge 0$. С другой стороны, функции $\upsilon_i^j = \overline{y}_i^j - y_i^j$ и $w_i^j = \overline{y}_i^j + y_i^j$ удовлетворяют задаче (2.1)-(2.2) с правыми частями $\overline{\varphi}_i^j - \varphi_i^j$, $\overline{\Phi}(x_i) - \Phi(x_i)$ и $\overline{\varphi}_i^j + \varphi_i^j$, $\overline{\Phi}(x_i) + \Phi(x_i)$, соответственно. Поэтому в силу (2.4), из следствия 1 получим, что $\upsilon_i^j \ge 0$, $w_i^j \ge 0$. А из этих неравенств следует справедливость неравенства (2.5).

§3. Оценка решения разностной задачи.

Используя теорему сравнения получим оценку для решения задачи (2.1)–(2.2). С этой целью введем вспомогательную функцию

$$W_i^j = Ke^{t_j}, \; i = 0,1,...,N, \; j = 0,1,...,j_0.$$

Для W_i^j с учетом равенства $e^{\tau} - 1 = \tau e^{\eta\tau}$, $0 < \eta < 1$, имеем:

$$-\frac{a^2}{2h^2}W_k^{j+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2}\right)W_1^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2}W_2^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2}W_k^j -$$
$$-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{a^2}{h^2}\right)W_1^j - \frac{a^2}{2h^2}W_2^j \ge K,$$
$$-\frac{a^2}{2h^2}W_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2}\right)W_i^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2}W_{i+1}^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2}W_{i-1}^j -$$
$$-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{a^2}{h^2}\right)W_i^j - \frac{a^2}{2h^2}W_{i+1}^j \ge K, \quad i = 2,3,...,N-2, \tag{3.1}$$
$$-\frac{a^2}{2h^2}W_{N-2}^{j+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2}\right)W_{N-1}^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2}W_m^{j+1} - \frac{a^2}{2h^2}W_{N-2}^j -$$
$$-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{a^2}{h^2}\right)W_{N-1}^j - \frac{a^2}{2h^2}W_m^j \ge K, \qquad j = 0,1,...,j_0 - 1,$$

$$W_i^0 = K, \; i = 0,1,...,N. \tag{3.2}$$

Сравнивая (2.1)–(2.2) с (3.1)–(3.2), в силу теоремы сравнения получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $K = \max\left\{ \max\limits_{D} |f(x,t)|,\ \max\limits_{0\le x\le l} |\Phi(x)| \right\}$ и шаги h и τ сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$ удовлетворяют условию (2.3), тогда для решения задачи (2.1)–(2.2) имеет место оценка

$$\left| y_i^j \right| \le K e^T,\ i = 0,1,\dots,N,\ j = 0,1,\dots,j_0. \qquad (3.3)$$

§4. Сходимость разностной задачи.

Пусть u_i^j – значение точного решения задачи (1)–(3) в узле (x_i, t_j) сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$, а y_i^j – решение разностной задачи (1.1) – (1.3) или (2.1)–(2.2). Определим на $\overline{\omega}_{h\tau}$ сеточную функцию $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Если подставить найденное из этого равенства значение $y_i^j = z_i^j + u_i^j$ в (2.1)–(2.2), то относительно z_i^j получим такие же разностные уравнения, что и (2.1), с правыми частями R_i^j, $i = 1,2,\dots,N-1$, и однородным начальным условием $z_i^j = 0,\ i = 0,1,\dots,\mathrm{N}$. Легко можно проверить, что для правых частей R_i^j, полученных разностных уравнений, справедлива оценка.

$$\left| R_i^j \right| \le \frac{M}{24}(2a^2h^2 + \tau^2),\ i = 1,2,\dots \mathrm{N}-1,\ j = 0,1,\dots,j_0 - 1\ ,$$

где

$$M = \sup_D \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \right\}.$$

В силу теоремы 3 верна следующая теорема.

Теорема 4. Если решение задачи (1)–(3) – функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет условию $u = u(x,t) \in C_4^3(D)$, то при выполнении условия (2.3) решение разностной задачи (1.1)–(1.3) сходится к решению задачи (1)–(3) . При этом имеет место оценка

$$\left| y_i^j - u_i^j \right| \le \frac{M}{24}(2a^2h^2 + \tau^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханкишиев З.Ф. О решении одной задачи для уравнения теплопроводности методом конечных разностей. Akademik M.L.Rəsulovun 90 illiyinə həsr olunmuş «Riyazi fizikanın üsulları» Elmi Konfransının materialları. Bakı: 2006, s. 177-181.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: "Наука", 1978, 592 с.

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ SONLU FƏRQLƏR ÜSULUNUN TƏTBİQİ HAQQINDA

Z.F.XANKİŞİYEV

XÜLASƏ

İstilikkeçirmə tənliyi üçün sərhəd şərtləri xüsusi şəklə malik olan bir qarışıq məsələ sonlu fərqlər üsulu ilə tədqiq edilir.İlkin məsələni ikinci tərtib dəqiqliyilə approksimasiya edən fərq məsələsinin həll üsulu verilir və onun yığılması isbat edilir.

ON THE APPLICATION OF THE FINITE-DIFFERENCE METHOD TO A HEAT EQUATION PROBLEM SOLUTION

Z.F.KHANKISHIYEV

SUMMARY

Investigated is a mixed problem for the heat equation by the finite difference method, with boundary conditions of special type. A solution method of the difference problem approximating the original one with the second order of accuracy is presented, and its convergence is proven.