BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

А.Г.ГЕЙДАРОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе определяются произведения $\delta^{(m)}(x)\cdot f(x)$, где $\delta(x)$-дельта-функция Дирака, $\delta^{(m)}(x)$-её обобщенная производная порядка m, функция $f\in C^m(R\setminus\{0\})$ и классические производные $f^{(k)}(x)$, $k=1,2,...,m$ имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода. Получены соответствующие формулы для рассматриваемых произведений. Указано обобщение полученных результатов. Приведены примеры произведений обобщенных функций на разрывные функции.

Задача определения произведений обобщенных функций (в частности, обобщенных функций на разрывные функции) имеет важное значение для математической физики и квантовой механики. Например, при определении одномерного оператора Шредингера с $\delta'(x)$ потенциалом возникает необходимость определения произведений $\delta'(x)\cdot f(x)$, где функция $f\in C^1(R\setminus\{0\})$ и ее классическая производная имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода.

Существуют различные подходы определения произведений обобщенных функций (см., напр., [1], [2], [3], где имеются библиография). Эти подходы охватывают специальные классы обобщенных функций.

В данной работе определяются произведения вида $\delta^{(m)}(x)\cdot f(x)$, где $\delta(x)$-дельта-функция Дирака, $\delta^{(m)}(x)$-её обобщенная производная порядка $m\in N$. Предполагается, что функция $f\in C^m(R\setminus\{0\})$ и классические производные $f^{(k)}(x)$, $k=1,2,...,m$ имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода. Получены соответствующие формулы для этих произведений. Эти результаты являются развитием результатов, полученных в работе [4] автора и анонсированы в [5].

Формулы для произведений $\delta^{(m)}(x)\cdot f_+(x)$ и $\delta^{(m)}(x)\cdot f_-(x)$, где $f(x)=H(x)f(x)$, $f_-(x)=H(-x)f(x)$, $f\in C^\infty(R)$, $H(x)$-функция Хевисайда, получены в работе [6].

Обозначим через $D\in C_0^\infty(R)$, где $R=(-\infty,+\infty)$–пространство основных функций, D'-пространство обобщенных функций.

Пусть $\omega(t)$-бесконечно дифференцируемая, неотрицательная, четная функция, равная нулю при $|t| \geq 1$, и такая, что $\int\limits_{-1}^{1} \omega(t)dt = 1$. Положим $\omega_n(x) = n\omega(nx)$, $n = 1,2,\dots$. Очевидно, что $\{\omega_n(x)\}$ - дельта-последовательность, т.е. $\omega_n(x) \to \delta(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве D'. Для обобщенной функции $g \in D'$ положим $g_n(x) = g * \omega_n$, где $*$-означает свертку. Тогда $g_n \in C^\infty(R)$ и $g_n \to g$ при $n \to \infty$ в пространстве D'.

1. Произведение $\delta(x) \cdot f(x)$**.** В ([7], с.274) дано определение произведений обобщенных функций. Мы приводим это определение в случае, когда одно из обобщенных функций f и g является регулярной обобщенной функцией, т.е. порождается локально интегрируемой функцией.

Определение 1. Пусть $g \in D'$ -обобщенная, а $f(x)$-локально интегрируемая на R функции. Будем говорить, что произведение $g(x) \cdot f(x)$ существует и равно $h(x) \in D'$, если для любого $\varphi \in D$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} < g_n \cdot f, \varphi > = < h, \varphi >. \tag{1}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть функция $f \in C(R \setminus \{0\})$ и имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода. Тогда произведение $\delta(x) \cdot f(x)$ существует в смысле определения 1 и задается равенством:

$$\delta(x) \cdot f(x) = \frac{1}{2}[f(+0) + f(-0)]\delta(x). \tag{2}$$

Доказательство. Положим $\delta_n(x) = \omega_n(x) * \delta(x)$. Согласно определению 1

$$< \delta(x) \cdot f(x), \varphi > = \lim_{n\to\infty} < \delta_n(x) \cdot f(x), \varphi >, \qquad \varphi \in D.$$

Очевидно, что $\delta_n(x) = \omega_n(x)$. Имеем

$$< \delta_n(x) \cdot f(x), \varphi > = < \omega_n(x) \cdot f(x), \varphi > = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_n(x) f(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n\omega(nx) f(x) \varphi(x) dx = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{0} n\omega(nx) f(x) \varphi(x) dx + \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} n\omega(nx) f(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right) \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt + \int\limits_{0}^{1} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right) \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

Таким образом,

$$<\delta_n(x)\cdot f(x),\varphi> = \int_{-1}^{0} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt + \int_{0}^{1} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt. \qquad (3)$$

Последовательность $\omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)$ сходится на отрезке $[-1,0]$ к функции $\omega(t)f(-0)\varphi(0)$ при $n\to\infty$ и

$$\omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \le C = const,\ \ t\in[-1,0],\ \ n=1,2,\ldots$$

в силу непрерывности функции $\omega(t)f(t)\varphi(t)$ на этом отрезке. Аналогично последовательность $\omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)$ сходится на отрезке $[0,1]$ к функции $\omega(t)f(+0)\varphi(0)$ при $n\to\infty$ и ограничена относительно $t\in[0,1]$ и $n=1,2,\ldots$. Поэтому в интегралах правой части (3) можно перейти к пределу при $n\to\infty$ под знаком интеграла:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt = \int_{-1}^{0} \omega(t)f(-0)\varphi(0)dt =$$

$$= f(-0)\varphi(0)\int_{-1}^{0}\omega(t)dt = \frac{1}{2}f(-0)\varphi(0);$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt = \int_{0}^{1} \omega(t)f(+0)\varphi(0)dt =$$

$$= f(+0)\varphi(0)\int_{0}^{1}\omega(t)dt = \frac{1}{2}f(+0)\varphi(0).$$

Теперь переходим к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (3):

$$\lim_{n\to\infty} <\delta_n(x)\cdot f(x),\varphi> = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt +$$

$$+\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt = \frac{1}{2}f(-0)\varphi(0) + \frac{1}{2}f(+0)\varphi(0) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(+0)+f(-0)]\varphi(0) = <\frac{1}{2}[f(+0)+f(0)]\delta(x),\varphi>.$$

Отсюда следует формула (2). Теорема 1 доказана.

2. Произведение $\delta'(x)\cdot f(x)$ и $\delta''(x)\cdot f(x)$. Сначала рассмотрим произведение $\delta'(x)\cdot f(x)$, где функция $f\in C^1(R\setminus\{0\})$ и ее обычная производная имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода. Известно [4], что такое произведение в смысле определения 1 не существует, так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} <\omega_n'(x)f(x),\varphi>$ существует не для всех $\varphi\in D$. Однако этот предел, и следовательно, произведение $\delta'(x)\cdot f(x)$ существует в смысле конечной части по Адамару. Определения произведений обобщенных функций, использующей понятие конечной части по Адамару, дано в работе [8]. Это определение мы приводим, в случае, когда одно из обобщенных функций f и g является регулярной обобщенной функцией. Обозначим через $H-\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ предел в смысле конечной части по Адамару числовой последовательности $\{a_n\}$.

Определение 2. Пусть $g\in D'$-обобщенная, а $f(x)$-локально интегрируемая на R функции. Будем говорить, что произведение $g(x)\cdot f(x)$ существует и равно $h(x)\in D'$, если для любого $\varphi\in D$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} < g_n\cdot f,\varphi >$в смысле конечной части по Адамару и

$$H-\lim_{n\to\infty} < g_n\cdot f,\varphi > = < h,\varphi > .$$

Таким образом, по определению

$$< g\cdot f,\varphi > = H-\lim_{n\to\infty} < g_n\cdot f,\varphi >,\quad \varphi\in D. \qquad (4)$$

Теорема 2. Пусть функция $f\in C^1(R\setminus\{0\})$ и ее обычная производная имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода. Тогда произведение $\delta'(x)\cdot f(x)$ существует в смысле определения 2 и задается формулой:

$$\delta'(x)\cdot f(x) = -\frac{1}{2}\left[f'(+0)+f'(-0)\right]\delta(x)+\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(-0)\right]\delta'(x). \qquad (5)$$

Доказательство. Положим $\delta_n(x)=\omega_n(x)*\delta(x)$. Тогда $\delta_n(x)=\omega_n(x)$ и $\delta_n'(x)=\omega_n'(x)$, $n=1,2,\ldots$. Согласно определению (4)

$$< \delta'(x)\cdot f(x),\varphi > = H-\lim_{n\to\infty} < \omega_n'(x)\cdot f(x),\varphi >,\quad \varphi\in D. \qquad (6)$$

Интегрируем по частям интеграла

$$< \omega_n'\cdot f(x),\varphi > = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_n'(x) f(x)\varphi(x)dx$$

и сделаем замену переменной $nx=t$. Тогда получим

$$< \omega_n'(x)\cdot f(x),\varphi > = \int\limits_{-1/n}^{0} \omega_n'(x) f(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{1/n} \omega_n'(x) f(x)\varphi(x)dx =$$

$$= n\omega(0)\left[f(-0)-f(+0)\right]\varphi(0) - \int\limits_{-1}^{0} \omega(t) f'\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt - \int\limits_{-1}^{0} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi'\left(\frac{t}{n}\right)dt -$$

$$-\int\limits_{0}^{1} \omega(t) f'\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt - \int\limits_{0}^{1} \omega(t) f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi'\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Отсюда находим

$$H-\lim_{n\to\infty} < \omega_n'(x)\cdot f(x),\varphi > =$$

$$-\frac{1}{2}\left[f'(+0)+f'(-0)\right]\varphi(0)-\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(-0)\right]\varphi'(0)=$$

$$=<-\frac{1}{2}\left[f'(+0)+f'(-0)\right]\delta(x)+\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(-0)\right]\delta'(x),\varphi>.$$

Таким образом, справедлива формула (5). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 3. Пусть функция $f\in C^2\left(R\setminus\{0\}\right)$ и ее обычные производные $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют в точке $x=0$ разрывы первого рода. Тогда произведение $\delta''(x)\cdot f(x)$ существует в смысле определения 2 и задается формулой:

$$\delta''(x)\cdot f(x)=\frac{1}{2}\left[f''(+0)+f''(-0)\right]\delta(x)-$$

$$-\left[f'(+0)+f'(-0)\right]\delta'(x)+\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(-0)\right]\delta''(x). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно определению 2

$$<\delta''(x)\cdot f(x),\varphi>=H-\lim_{n\to\infty}<\omega_n''(x)\cdot f(x),\varphi>,\quad \varphi\in D. \tag{8}$$

Докажем существование предела в правой части (8). Интегрируем дважды по частям интеграла

$$<\omega_n''(x)\cdot f(x),\varphi>=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_n''(x)f(x)\varphi(x)dx$$

и сделаем замену переменной $nx=t$. Тогда получим

$$<\omega_n''(x)\cdot f(x),\varphi>=n^2\omega'(0)\left[f(-0)-f(+0)\right]\varphi(0)+$$

$$+n\omega(0)\left[f'(+0)-f'(-0)\right]\varphi(0)+n\omega(0)\left[f(+0)-f(-0)\right]\varphi'(0)+$$

$$+\int_{-1}^{0}\omega(t)f''\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt+2\int_{-1}^{0}\omega(t)f'\left(\frac{t}{n}\right)\varphi'\left(\frac{t}{n}\right)dt+$$

$$+\int_{-1}^{0}\omega(t)f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi''\left(\frac{t}{n}\right)dt+\int_{0}^{1}\omega(t)f''\left(\frac{t}{n}\right)\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt+$$

$$+2\int_{0}^{1}\omega(t)f'\left(\frac{t}{n}\right)\varphi'\left(\frac{t}{n}\right)dt+\int_{0}^{1}\omega(t)f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi''\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Отсюда следует

$$H-\lim_{n\to\infty}<\omega_n''\cdot f(x),\varphi>=$$

$$-\frac{1}{2}\left[f''(+0)+f''(-0)\right]\varphi(0)+\left[f'(+0)+f'(-0)\right]\varphi'(0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(-0)\right]\varphi''(0)=\frac{1}{2}\left[f''(+0)+f''(-0)\right]<\delta(x),\varphi>-$$

$$-\left[f'(+0)+f'(-0)\right]<\delta'(x),\varphi>+\frac{1}{2}\left[f(+0)+f(-0)\right]<\delta''(x),\varphi>.$$

Следовательно, справедлива формула (7). Теорема доказана.

Формула (2) и частный случай формулы (5) (при условии непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=0$) доказаны в [4].

Отметим, что аналогичные формулы справедливы и для произведений $\delta^{(m)}(x-x_0)\cdot f(x)$, где $x_0 \in R$-фиксированная точка, $m=0,1,2,\ldots$, функция $f \in C^m(R \setminus \{x_0\})$ и обычные производные $f^{(k)}(x)$, $k=1,2,\ldots,m$ имеют в точке x_0 разрывы первого рода. Соответствующая формула имеет вид:

$$\delta^{(m)}(x-x_0)\cdot f(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}}{2}\binom{m}{k}\left[f^{(m-k)}(x_0+0)+f^{(m-k)}(x_0-0)\right]\delta^{(k)}(x-x_0), \qquad (9)$$

где $\binom{m}{k}$-биномиальные коэффициенты,

$$f^{(k)}(x_0 \pm 0)=\lim_{x\to x_0\pm 0} f^{(k)}(x), \quad k=0,1,2,\ldots,m.$$

Приведем примеры произведений обобщенных функций на разрывные функции.

Пример 1. Пусть $f(x)=\theta(x)$, где $\theta(x)$–функция Хевисайда. Тогда

$$\delta^{(m)}(x)\cdot\theta(x)=\frac{1}{2}\delta^{(m)}(x), \quad m=0,1,2,\ldots$$

Пример 2. Пусть $f(x)=sign\,x$. Тогда

$$\delta^{(m)}(x)\cdot sign\,x=0, \quad m=0,1,2,\ldots$$

Пример 3. Определим функцию $f(x)=x^2+x+1$, если $x>0$, $f(x)=x^2/2$, если $x<0$.

Справедливы следующие формулы:

$$\delta(x)\cdot f(x)=\frac{1}{2}\delta(x), \quad \delta'(x)\cdot f(x)=-\frac{1}{2}\delta(x)+\frac{1}{2}\delta'(x),$$

$$\delta''(x)\cdot f(x)=\frac{3}{2}\delta(x)-\delta'(x)+\frac{1}{2}\delta''(x).$$

Эти формулы непосредственно следуют из (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В.К. Умножение распределений и регуляризация расходящихся интегралов. -Изв.вузов, Математика, 1971, №3, с.41-49.
2. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.-276с.
3. Егоров Ю.В. К теории обобщенных функций. – Успехи матем.наук. 1990, т.45, вып.3, с.3-40.

4. Гейдаров А.Г. О произведениях обобщенных функций. Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук, 2004, № 2, с.39-46.
5. Гейдаров А.Г. Некоторые формулы умножения обобщенных функций на разрывные функции. Тезисы научн. конференции «Теоретические и прикладные задачи операторных уравнений» посвящ. 75-летию чл.-коор. НАНА проф. Мамедова Я.Дж. Баку, 2006, с.51-52.
6. Fisher B., Özça E., Gülen Ü. A theorem on the commutative neutrix product of distributions. Sarayevo Journ.of Math., 2005, v.1(4), p.235-242.
7. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.-311с.
8. Tillmann H.G. Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen. Math.Z., Bd 77, № 2, 1961, S.106-124.

ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALARIN KƏSİLƏN FUNKSİYALARA HASİLLƏRİ HAQQINDA

A.H.HEYDƏROV

XÜLASƏ

Məqalədə Dirak funksiyasının $\delta^{(m)}(x)$ ümumiləşmiş törəmələrinin $f^{(k)}(x),\quad k=1,2,...,m$ klassik törəmələri $x=0$ nöqtəsində birinci növ kəsilmə nöqtələrinə malik olan $f\in C^m(R\setminus\{0\})$ funksiyasına $\delta^{(m)}(x)\cdot f(x)$ hasilləri təyin edilir. Bu hasillər üçün uyğun düsturlar verilir. Alınan nəticələrin ümumiləşməsi göstərilir. Ümumiləşmiş funksiyaların kəsilən funksiyalara hasillərinə aid misallar verilir.

ABOUT PRODUCTS OF THE GENERALIZED FUNCTIONS ON DISCONTINUOUS FUNCTIONS

A.H.HEYDAROV

SUMMARY

In this work are defined the products of $\delta^{(m)}(x)\cdot f(x)$ where $\delta(x)$ is a Dirac's delta function, $\delta^{(m)}(x)$ is its generalized derivative of the m order, the function $f\in C^m(R\setminus\{0\})$ and classical derivatives $f^{(k)}(x),\quad k=1,2,...,m$ have discontinuity of the first order at the point $x=0$. Corresponding formulas are received for considered products. Generalization of the received results is shown. It is given of examples of products of generalized functions on discontinuity functions.