BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

İNFORMATİKA

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДУ В НЕПРЕРЫВНОМ СЛУЧАЕ

Н.И.ВЕЛИЕВА, А.А.НИФТИЛИ, С.Я.АЛИЕВ

Институт Прикладной Математики при БГУ

В настоящей работе на основе преобразования Келли приводится вычислительный алгоритм для решения задачи оптимального регулятора по выходу. В отличие от известных здесь не требуется решение двух алгебраических уравнений Ляпунова.. Результаты иллюстрируются несколькими примерами.

Линейно-квадратичная задача оптимального регулятора с обратной связью по выходу в стационарном случае рассмотрены в работах [1-9] .В работе [1] использован аппарат выпуклого программирования, а в [7] применяются сопряженные градиентные методы. В этих работах на каждом шаге решаются уравнения Ляпунова, которые во многих случаях могут отрицательно влиять на точность решения. В настоящей работе приводится итерационный алгоритм для решения задачи оптимального регулятора по выходной переменной, который, в отличие от [2,6,7], не требует на каждом шаге решения матричных алгебраических уравнений Ляпунова. В настоящей работе с помощью Келли преобразования непрерывные алгебраические уравнения Ляпунова приводятся к дискретному и решаются эти уравнения итеративным путем. Эффективность предлагаемого алгоритма показываются на примерах.

Пусть движение объекта описывается линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t);\; x(0) = X_0, \qquad (1)$$

$$y = Cx(t)$$

где требуется минимизировать функционал

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)dt \qquad (2)$$

с помощью закона регулирования

$$u(t) = Ky(t) \qquad (3)$$

так, чтобы замкнутая система (1)+ (3)

$$\dot{x}(t) = (F + GKC)x(t) \qquad (4)$$

была асимптотически устойчива, т.е. $\operatorname{Re}\lambda(F + GKC) < 0$.

Здесь $x \in R^n$ -фазовый вектор координата объекта, $u \in R^m$ - вектор управляющих воздействий, $y \in R^r$ - наблюдаемый вектор. $F, G, C, Q = Q' \geq 0, R = R' > 0$ заданные постоянные матрицы соответствующих размерностей, λ -собственные значение матрицы.

Если обозначить $\Re$ множества всех стабилизирующих регуляторов ,то задачу (1)-(3) можно сформулировать в следующем виде

$$\min_K J;\ K \in \Re \tag{5}$$

Минимальное значение функционала (2) определяется .

$$J = Sp(X_0, S),$$

где X_0 - вектор начальных условий, $S = S' > 0$ решение уравнения Ляпунова

$$(F + GKC)'S + S(F + GKC) + Q + C'K'RKC = 0\,. \tag{6}$$

Известно [2], что градиент функционала (2) определяется в следующем виде

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 2[RKC + G'S]UC', \tag{7}$$

где U определяется из уравнения Ляпунова

$$(F + GKC)U + U(F + GKC)' + X_0 = 0\,. \tag{8}$$

Из условия оптимальности можно определить коэффициент регулятора в следующем виде:

$$K = -R^{-1}G'SUC'(CUC')^{-1}\,. \tag{9}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) сводится к решению уравнений (6), (8), (9). В работе [2] предложен итерационный алгоритм решения задачи (1)-(3) и там предполагается, что начальное значение матрицы K, известно. Однако в работе [11] предложен итеративный алгоритм для дискретного случая, который не требует на каждом шаге решения уравнения Ляпунова.

Для использования этого алгоритма уравнения (6), (8) с помощью следующих преобразований

$$\Psi = (E + (F + GKC))(E - (F + (GKC))^{-1}\ ;$$

$$\overline{R} = \frac{1}{2}(E + \Psi')(Q + C'K'RKC)(E + \Psi)\,;$$

$$M = \frac{1}{2}(E + \Psi)(E + \Psi')$$

приводятся к дискретному случаю

$$S = \Psi'S\Psi + \overline{R} \tag{10}$$

$$U = \Psi U \Psi' + M\,. \tag{11}$$

Можно утверждать, что если собственные числа матрицы $(F + GKC)$ лежат в левой полуплоскости, то собственные числа матрицы Ψ будут лежать внутри единичного круга.

Путем итерационной схемы [10] можно написать следующие рекуррентные формулы

$$S_{i+1} = \Psi_i\, S_i \Psi_i + \overline{R}_i \qquad (12)$$

$$U_{i+1} = \Psi_i U_i \Psi_i + M_i \qquad (13)$$

$$\Psi_i = (E + F + GK_i C)(E - F - GK_i C)^{-1} \qquad (14)$$

$$\overline{R_i} = \frac{1}{2}(E + \Psi_i)(Q + C'K_i\, RK_i C)(E + \Psi_i) \qquad (15)$$

$$\overline{M}_i = \frac{1}{2}(E + \Psi_i)(E + \Psi_i\,) \qquad (16)$$

Известно, что если характеристические числа матрицы Ψ_i лежат внутри единичного круга, то S_i и U_i при $i \to \infty$, приближаются к матрицам S и U, где S и U единственные решения алгебраического уравнения Ляпунова (10), (11).

Опишем итеративный алгоритм решения уравнений (12-16).

1. Выбираем начальное приближение S_0, U_0 так, чтобы собственные числа матрицы Ψ_0 лежали внутри единичного круга.
2. Вычисляем

$$K_0 = -R^{-1}G'S_0U_0C'(CU_0C')'$$

3. Вычисляем Ψ_0 по формуле (14).
4. Находятся значения матриц $\overline{R}_0$ и $\overline{M}_0$ по (15), (16).
5. Вычисляем S_1, U_1 по (12),(13).
6. Проверяем условие $\|S_1 - S_0\| \le \varepsilon$. Если условие удовлетворяется процедура вычисления прекращается, иначе приравнивая $S_0 = S_1$, переходим к шагу 2. (ε-точность решение задачи)

Перейдем к описанию дискретного аналога задачи (1)-(3).

3.Пусть движение объекта описывается дискретной стационарной системой конечно- разностных уравнений

$$x(i+1) = \Psi x(i) + \Gamma u(i), \qquad i = 1,2,..., \qquad (17)$$
$$y(i) = Cx(i)$$

где требуется минимизировать функционал

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x'(i)Qx(i) + u'(i)Ru(i)\right), \qquad (18)$$

с помощью закона регулирования

$$u(i) = Fy(i) = FCx(i)\,, \qquad (19)$$

который минимизирует критерий качества (18) при условии асимптотической устойчивости (17)+(19). В работе [6] решение задачи (17),(18),(19) сводится к решениям уравнений

$$L = (\Psi + \Gamma FC)'\, L(\Psi + \Gamma FC) + Q + C'FRFC, \qquad (20)$$

$$U = (\Psi + \Gamma FC)U(\Psi + \Gamma FC)' + X_0\,, \qquad (21)$$

$$F = -\left(R + \Gamma' L \Gamma\right)^{-1} \Gamma' L \Psi U C' \left(C U C'\right)^{-1} \qquad (22)$$

решение уравнений (20)-(22) путем итерационной схемы можно, аналогично [10], написать в следующем рекуррентном виде

$$F_j = -\left(R + \Gamma' L_j \Gamma\right)^{-1} \Gamma' L_j \Psi U_j C' \left(C U_j C'\right)^{-1}, \qquad (23)$$

$$L_{j+1} = \left(\Psi + \Gamma F_j C\right)' L_j \left(\Psi + \Gamma F_j C\right) + Q + C' F_j'' R F_j C, \qquad (24)$$

$$U_{j+1} = \left(\Psi + \Gamma F_j C\right) U_j \left(\Psi + \Gamma F_j C\right)' + X_0, \qquad (25)$$

Проиллюстрируем работоспособность алгоритма в нижеследующих примерах.

Пример 1[1] . Исходные данные взяты из примера [1], где матрицы F, G имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -79.2851 & -0.113 & 0 \\ 28.564 & 0.041 & 0 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0410 & -0.0047 \\ -0.0300 & -0.0016 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad (26)$$

Фигурирующие в (2) матрицы Q и R приняты $Q = CC'$, $R = DD'$.

Наблюдаемый вектор имеет вид

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = Nx .$$

В работе [1] приводится коэффициент оптимального регулятора

$$K_G = \begin{bmatrix} -2.4448 & -1.3049 \\ -0.5232 & -0.2921 \end{bmatrix};$$

а градиент функционала по формуле (7) для данного случая имеет вид

$$\left\| \frac{\partial J}{\partial K_G} \right\| = 0.3172 \qquad (27)$$

соответствующий ей минимум функционала $J_G = 56.1632$

В качестве начальных условий принимается $S_0 = E; U_0 = E$, где E -единичная матрица соответствующей размерности. В результате решения задачи (1)-(3) получен коэффициент оптимального регулятора

$$K_A = \begin{bmatrix} 6.421582 & 0.29845 \\ -0.052946 & 0.113614 \end{bmatrix},$$

где минимальное значение функционала, соответствующий этому регулятору, будет $J_A = 45.989114$, а градиент функционала по формуле (7) для данного случая имеет вид

$$\left\| \frac{\partial J}{\partial K_A} \right\| = 0.555512e-11 \tag{28}$$

Близость градиента функционала к нулю свидетельствует о достаточной эффективности предлагаемого алгоритма.

Пример 2 [2] Пусть

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; R = 1$$

Применяя вышеуказанный алгоритм , получаем коэффициент оптимального регулятора $K = -0.8165$, где минимальное значение функционала, соответствующий этому регулятору, будет $J = 2.4495$, а собственные значения матрицы $(F + GKC)$ следующие $(-0.4082 \pm 0.9129i)$.

Все эти собственные значения отрицательные и следовательно замкнутая система является асимптотически устойчивым. В работе [2] $J = 2.46$

Пример 3 [8] матрицы F, G имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; Q, R -единичные матрицы соответствующих размерностей.

Применяя вышеуказанную алгоритму, получаем коэффициент оптимального регулятора

$$K = \begin{bmatrix} -1.62369 \\ 6.49341 \end{bmatrix},$$

где минимальное значение функционала, соответствующий этому регулятору, будет $J = 13.31453$, собственные значения матрицы $(F + GKC)$.

$(-45.0169 \ -0.0869 \ -0.2963 \pm 1.1024i)$. А это показывает, что замкнутая система асимптотически устойчива. В работе [8] минимальное значение функционала $J_G = 15.3190$ Автор оценивает , что значение функционала $J_M = 13.3428$.Отсюда видно , что $J < J_M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.L.D. Peres and J.C.Geromel An alternate numerical solution to the linear quadratic problem IEEE Trans.Autom. Control V.39 N1 January 1994
2. Levine W.S. , Athans M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems IEEE Trans.Autom. Control, 1970 V.AC-15, N1
3. J. Bernussou, P.L.D. Peres, and J.C.Geromel, A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. Syst. Contr.Lett., vol. 13, pp.65-72, July 1989.
4. S. Boyd and Q. Yang, Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems, Int.J.Contr., vol. 49, N 6, pp. 2215-2240,1989.
5. J.C.Geromel, P.L.D.Peres, and J. Bernussou, On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. SIAM J. Contr. Optimz. vol. 29, N2, pp.381-402, Mar.1991.
6. Larin V.B.Stabilization of the system by static output feedback. An Int. Journal ACM, 2003, Vol.2, No.1, p. 47-51.
7. F.A.Aliev, N.I.Velieva, V.B.Larin On the safe stabilization Problem, J. of Automation and Sciences.- Information 1997.- 29, N 4{\&}5.- P. 31-41
8. J.C.Geromel,de C.C.Souza R.E.skelton Static output feedback controllers stability and convexity.IEEE Trans.Autom.Control 1998,43(1) pp.120-125
9. J.C.Geromel, A.Yamakami Armentano Structural constrains controllers for discrete time linear systems J.of Optimization Theory and Applications V.61,N1 april 1989
10. *Алиев Ф.А.*Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку, Элм, 1989, 320 с
11. Велиева Н.И., Нифтили А.А. Вычислительный алгоритм решения периодической дискретной задачи оптимального регулятора по выходу. Известия НАН Азербайджан, серия физико-технических и математических наук, 2007,№2-3, с.106-111

ÇIXIŞA NƏZƏRƏN OPTİMAL TƏNZİMLƏMƏ MƏSƏLƏSİNİN KƏSİLMƏZ HALDA İTERATİV HƏLL ALQORİTMİ

N.İ.VƏLİYEVA, A.A.NİFTİLİ, S.Y.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə Kelli çevirməsindən istifadə edərək kəsilməz halda çıxışa nəzərən optimal tənzimləmə məsələsinin iterativ həll alqoritmi verilib. Bir neçə misallarla təklif olunan alqoritmin effektivliyi göstərilib.

ITERATIVE ALGORITHMS FOR THE SOLUTION OF THE OPTIMAL FEEDBACK REGULATOR PROBLEM IN THE CONTINUES CASE

N.I.VELIEVA, A.A.NIFTILI, S.Y.ALIEV

SUMMARY

In the work an iterative algorithms is given of the optimal feedback regulator problem in the continues case using Kelli transformation .Efficiency of the offered algorithms is shown on examples.