BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Р.Г.УМАРАТОВ
Бакинский Государственный Университет

Известно, что существуют два различных типа автомодельных решений задач для сверхзвуковой газовой динамики. Решения первого рода характеризуются тем, что параметр автомодельности и показатель степени по времени (или координате) для всех масштабов определяются из соображений размерности. Однако существует довольно широкий класс задач, в которых невозможно определить соответствующие параметры отмеченным выше образом.

В этом случае вводятся в рассмотрение автомодельные течения газа второго рода, при которых параметр автомодельности определяется в ходе решения, как собственное значение задачи. К автомодельным движениям второго рода можно отнести задачу о схождении ударной волны к центру симметрии. Рассмотрим задачу о неустановившемся движении идеального газа со сходящейся к центру симметрии плоской ударной волной. Среда принимается неоднородной по плотности, а начальное давление не учитывается. Для этого случая найден параметр автомодельной переменной и исследовано влияние этого параметра на распространение ударной волны.

Запишем систему уравнений, описывающих одномерное адиабатическое течение идеального совершенного газа с постоянной теплоемкостью в неоднородной среде, обладающей симметрией. Она в переменных ρ, υ, c^2 имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+(\nu-1)\rho\frac{\upsilon}{r}=0,\\ &\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+\frac{c^2}{k}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{1}{k}\frac{\partial c^2}{\partial r}=0,\\ &\frac{\partial\rho}{\partial t}\ln c^2\rho^{1-k}+\upsilon\frac{\partial}{\partial r}\ln c^2\rho^{1-k}=0, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь ρ - плотность среды, υ - скорость, а $c^2=k\dfrac{p}{\rho}$ - квадрат скорости звука, r - пространственная координата. Величина k определяется посредством соотношения $k=C_p/C_V$, здесь в свою очередь C_p - теплоемкость при постоянном давлении, а C_V - теплоемкость при постоянном объеме. Причем $\nu=1,2,3$ соответствуют плоскому, цилиндрическому и сферическому случаям симметрии.

Нашей дальнейшей целью является отыскание автомодельного решения задачи II – го рода о схождении ударной волны к центру симметрии в неоднородной среде, когда начальная плотность меняется по экспоненциальному закону во времени. Подобная задача для степеней неоднородности исследована в [1] для сферической симметрии. Ищем решение уравнения (1) в виде:

$$p = \rho_0 \dot{R} h(\lambda), \qquad \rho = \rho_0 g(\lambda), \qquad \upsilon = \dot{R} f(\lambda), \qquad c^2 = k\frac{p}{\rho} = k\dot{R}^2 \frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}, \quad (2)$$

где g, f, h безразмерные функции, зависящие только от автомодельной переменной λ. Причем $\lambda = r/R$.

Подставив (2) в (1), принимая во внимание определение автомодельной переменной λ и воспользовавшись правилами дифференцирования типа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln\rho}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho}\left[\dot{\rho}_0 g - \rho_0 g' \dfrac{r}{R^2}R\right] = \dfrac{1}{\rho}\left[\dot{\rho}_0 g - \rho_0 g' \lambda \dfrac{\dot{R}}{R}\right] \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial r} = \rho_0 \dfrac{g'}{R} \end{cases},$$

в которых под точкой обозначено дифференцирование по времени, а штрихом – дифференцируемость по λ, в результате ряда преобразований, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} + \frac{\dot{R}}{R}\left[f' + (f-\lambda)(\ln g)' + (\nu-1)\frac{f}{\lambda}\right] = 0, \\ &\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} f + (f-\lambda)f' + \frac{1}{g}h' = 0, \\ &\frac{R}{\dot{R}}\frac{d}{dt}\left(\ln \rho_0^{1-k}\dot{R}^2\right) + (f-\lambda)\left(\ln R g^{-k}\right)' = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Из физических соображений, чтобы представление (2) имело смысл, и тем самым можно было получить решение дифференциальных уравнений (3) необходимо, чтобы переменные t и λ разделились, для этого следует принять:

$\dfrac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = 1$, что как будет видно ниже, приводит к скачкообразному изменению как плотности, так и радиуса ударной волны. Интегрируя записанное выше условие, получим закон распространения радиуса ударной волны:

$$R = Ae^{\alpha t}, \qquad (4)$$

Принимая далее $\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} = const \cdot \frac{\dot{R}}{R}$, обозначая $\alpha \cdot const = \beta$ и учитывая (4), получим:

$$\rho_0 = B\, e^{\beta t}\,, \tag{5}$$

где A и B размерные величины, а α, β постоянные, подлежащие определению в ходе решения задачи.

Показатель β определяется через известный показатель α. Таким образом, в систему уравнений для функций f, g, h входит только один новый параметр – показатель автомодельности α.

Итак, автомодельная переменная имеет следующий вид:

$$\lambda = \frac{r}{R} = \frac{1}{A} r\, e^{-\alpha t}\,. \tag{6}$$

Таким образом, множители, зависящие от масштабов, определяются следующими константами:

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = 1 \qquad \frac{R}{\dot{R}}\frac{d}{dt}\left(\ln \rho_0^{1-k} \dot{R}^2\right) = \frac{(1-k)\beta + 2\alpha}{\alpha}\,. \tag{7}$$

Система уравнений (3) приводится к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций f, g, h.
Учитывая (2), (5), (6) и (7) в (1) приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
(f - \lambda)(\ln g)' + f' + (\nu - 1)\frac{f}{\lambda} = -\frac{\beta}{\alpha}, \\
f + (f - \lambda)\cdot f' + \frac{g'}{h} = 0\,, \\
(f - \lambda)\left(\ln h g^{-k}\right)' + \frac{(1-k)\beta + 2\alpha}{\alpha}\,.
\end{gathered} \tag{8}$$

В целях упрощения системы (8), проделаем ряд преобразований. Перейдем к новым функциям P, G, V, которые связаны со старыми f, g, h формулами:

$$P(\lambda) = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} h(\lambda), \qquad G(\lambda) = g(\lambda), \qquad V(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} f(\lambda). \tag{9}$$

отметим, что масштаб распределения новых функций меняется со временем пропорционально $\exp(\alpha t)$, также как и масштаб r.

Таким образом, новые искомые безразмерные функции P, G, V можно представить в виде:

$$P = \rho_0 \left(\lambda A \exp(\alpha t) \right)^2 P(\lambda), \qquad \rho = \rho_0 G(\lambda), \qquad \upsilon = \lambda A \exp(\alpha t) V(\lambda). \qquad (10)$$

Введем вместо давления новую неизвестную функцию – квадрат скорости звука:

$$c^2 = k\dot{R}^2 \frac{h}{g} = \dot{R}^2 z, \quad \text{где} \quad z = k\frac{h}{g}.$$

Аналогично примем $Z = k\dfrac{P}{G} = k\dfrac{\alpha^2}{\lambda^2}\dfrac{h}{g} = \dfrac{\alpha^2}{\lambda^2} z$.

Итак, имеем

$$Z = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} z. \qquad (11)$$

Учитывая формулы (9), (10), (11) в (8) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых новых функций P, G, V в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{d\ln\lambda} + (V-\alpha)\frac{d\ln G}{d\ln\lambda} = -\nu V - \beta \\
&(V-\alpha)\frac{dV}{d\ln\lambda} + \frac{z}{k}\frac{d\ln G}{d\ln\lambda} + \frac{1}{k}\frac{dZ}{d\ln\lambda} = -\frac{2}{k}Z - V^2 \\
&(k-1)Z\frac{d\ln G}{d\ln\lambda} - \frac{dZ}{d\ln\lambda} = \left[\frac{2(\alpha-1)+\beta(1-k)}{\alpha(V-\alpha)} + 2\right]Z.
\end{aligned} \qquad (12)$$

В начальный момент времени перед ударной волной, т.е. в невозмущенной области скорость газа $\upsilon_0 = 0$, давление $p_0 = 0$, а начальная плотность изменяется по формуле (5).

Тогда граничные условия на фронте ударной волны имеют вид [2]:

$$\rho_1 = \frac{k+1}{k-1}\rho_0, \qquad p_1 = \frac{2}{k+1}\rho_0 D^2, \qquad \upsilon_1 = \frac{2}{k+1}D, \qquad c_1^2 = \frac{2k(k-1)}{(k+1)^2}D^2. \qquad (13)$$

Здесь, $p_1, \rho_1, \upsilon_1, c_1^2$ значения давления, плотности, скорости и квадрат скорости звука, соответственно, на ударной волне, а D - скорость ударной волны.

Подставляя сюда выражения размерных величин из (2) и имея в виду, что на фронте ударной волны $r = R$, $\lambda = 1$, а также принимая во внимание, что $D = \dot{R} = \alpha R$ из (9) получим начальное и граничные условия в безразмерной форме для функций P, G, V, Z:

$$V(0)=0, V(1)=\frac{2}{k+1}\alpha, \qquad G(1)=\frac{k+1}{k-1}, \qquad P(1)=\frac{2\alpha^2}{k+1}, \qquad Z(1)=\frac{2k(k-1)\alpha^2}{(k+1)^2}. \qquad (14)$$

В момент $t=0$, скорость, давление и скорость звука на любом конечном радиусе r ограничены, но при $t=0$ и конечном r, $\lambda \to \infty$. Чтобы при $t=0$ и конечном r величины υ и c^2 были ограниченными, необходимо, чтобы V и Z обращались в нуль при $\lambda \to \infty$,

$$V(\infty)=0, \qquad Z(\infty)=0. \tag{15}$$

Систему уравнений (12) можно свести к одному дифференциальному уравнению относительно переменных V и Z.

Разрешим систему (12) относительно производных $\dfrac{dV}{d\ln\lambda}$, $\dfrac{d\ln G}{d\ln\lambda}$, $\dfrac{dZ}{d\ln\lambda}$ по формулам Крамера:

$$\frac{dV}{d\ln\lambda}=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{d\ln G}{d\ln\lambda}=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{dZ}{d\ln\lambda}=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{16}$$

где

$$\Delta=-Z+(V-\alpha)^2. \tag{17}$$

Величины $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ получаются после замены соответствующих столбцов в детерминанте правыми частями уравнений (12) и являются функциями только V и Z.

Разделив третье из уравнений (16) на первое, получим обыкновенное, однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

$$\frac{dZ}{dV}=\frac{\Delta_3(Z,V)}{\Delta_1(Z,V)}. \tag{18}$$

После того как найдено решение этого уравнения $Z(V)$, его можно подставить в первое уравнение (16) и путем квадратуры определить функцию $V(\lambda)$, а затем, подставляя $V(\lambda)$ и $Z\,[V(\lambda)]$ во второе уравнение, путем квадратуры найти функцию $G(\lambda)$.

Итак, основная задача сводится к решению уравнения (18) с условиями (14) и (15) в области $0 \le \lambda \le 1$.

Рассмотрим, как проходит искомая интегральная кривая $Z(V)$ на плоскости V, Z для плоской симметрии, т.е. $\nu=1$, $k=1{,}4$. При $\lambda=0$, имеем $V(0)=0$, а когда $\lambda=1$, то имеем $V=V(1)$, $Z=Z(1)$ определяемые по формулам (15).

Интегральная кривая $Z(V)$ должна проходить через точку $\lambda=1$ и начало координат.

В области изменения переменной $1 < \lambda < \infty, \quad 0 < \ln\lambda < \infty$ решения нигде не обращаются в нуль, но детерминант $\Delta = -Z + (V - \alpha)^2$ равен нулю на параболе $Z = (V - \alpha)^2$. Чтобы при этом производные $\dfrac{d\ln\lambda}{dV}$ и $\dfrac{d\ln\lambda}{dZ}$ не обратились в нуль, необходимо, чтобы в точке пересечения интегральной кривой с параболой определители Δ_1 и Δ_3 обращались в нуль. При $\Delta = 0, \quad \Delta_1$ и Δ_2 обращаются в нуль одновременно.

Таким образом, точка пересечения интегральной кривой $Z(V)$ с параболой есть особая точка уравнения (18).

Отметим, что при непосредственном вычислении получается, что особая точка лежит выше параболы $Z = (V - \alpha)^2$, т.е. искомой интегральной кривой надо пересечь параболу. Точка пересечения истинной интегральной кривой $Z(V)$ с параболой $Z = (V - \alpha)^2$ есть особая точка уравнения (18).

Интегральная кривая, выходящая из точки соответствующей фронту $\lambda = 1$, непременно должна пройти через особую точку для того, чтобы достичь точки, соответствующей бесконечности $\lambda \to \infty$.

Условие прохождения интегральной кривой через особую точку и определяет показатель автомодельности α. В особой точке, Z и V принимают определенные значения.

Для того, чтобы выражение $Z - (V - \alpha)^2$ не обращалось в нуль в точке пересечения интегральной кривой с параболой $Z = (V - \alpha)^2$, должно одновременно выполняться условие:

$$3V - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha k} Z = V(V-1)\left(\frac{1}{\alpha} - V\right),$$

из которого определяется параметр α. Для $\nu = 1$ и $k = 1{,}4$ получено $\alpha = 0{,}69$.

Практически, показатель автомодельности α находят методом попыток. Задаваясь каким-то значением α, численно интегрируют уравнение (18) от начальной точки $\lambda = 1$ и проверяют, как идет интегральная кривая $Z = Z(V)$. После того как найдены показатель α и функция $Z(V)$, отыскание функций $V(\lambda), \quad Z(\lambda), \quad G(\lambda)$ не составляет труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1966 г.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. Наука, 1972 г.

QAZIN QEYRİ-BİRCİNS MÜHİTDƏ HƏRƏKƏTİ

R.H.UMARATOV

XÜLASƏ

Qaz dinamiкasının yüкsəк sürətli hərəкəti məsələlərinin öyrənilməsində iкi növ avtomodel həll mövcuddur. Birinci növ avtomodel məsələni həll etdiкdə avtomodel dəyişən кəmiyyətin parametri ölçülər nəzəriyyəsinə əsasən əvvəlcədən təyin olunur. İкinci növ avtomodel məsələni həll etdiкdə isə bu parametri əvvəlcədən müəyyən etməк mümкün olmadığından, bu кəmiyyət sərbəst parametr кimi məsələnin həlli prosesində təyin olunur.

İşdə ideal qazın başlanğıc sıxlığı eкsponensial qanunla dəyişən qeyri-bircins mühitdə simmetriya mərкəzinə yığılan zərbə dalğası ilə birliкdə qərarlaşmamış hərəкətinin iкinci növ avtomodel həllinin araşdırılmasına baxılır. Müstəvi simmetriyalı hərəкət üçün avtomodel dəyişən кəmiyyətin parametri təyin olunmuşdur.

MOTION OF THE GAZ IN NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

R.H.UMARATOV

SUMMARY

It is known that there exist two types of automodel solutions in the investigation of the high speed motion of gaz dynamics. In the case of first solution the parameters of the automodel variable is defined accordingly theory of measures. But for the second case it becomes impossible. So, in this case this parameter is usually defined as a free variable during the solving process of the problem.

In the work is considered the investigation of the second type automodel solution of the non-stabilized motion of the ideal gaz in the medium with initial exponsial density law together with the wave converging to the symmetrics origin. The parameter of the automodel variable quantity is defined for the motion with plane symmetrics.