

УДК 539.3

**О КОЛЕБАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ  
НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

**Г.М.ГАСЫМОВ\*, А.И.ШИРИЕВ\*\***

**\*Бакинский Государственный Университет,**

**\*\*ИММ НАНА**

***husameddinqasimov@gmail.com***

*В работе рассматривается собственное колебание прямоугольной пластинки переменной толщины, лежащей на неоднородной вязкоупругом основании. Решение задачи строится методами разделения переменных и Бубнова-Галеркина. Предполагая, что толщина пластинки, плотность и характеристики основания вдоль пластинки меняются по линейному закону, проведен численный расчет. Результаты расчета представлены в виде таблиц и графиков зависимости между характерными параметрами.*

**Ключевые слова:** колебание, пластинка, частота.

При строительстве современных инженерных сооружений, машино- и приборостроении и ряда других отраслях техники широко используются пластинки и оболочки постоянной толщины, изготовленные из естественных и искусственных ортотропных материалов. Среди них наиболее распространенными являются прямоугольные пластинки и цилиндрические оболочки кругового поперечного сечения.

В инженерной практике нередко появляется необходимость использование пластинки переменной толщины.

В данной работе рассматривается собственное колебание ортотропной прямоугольной пластинки с учетом внешнего неоднородно вязкоупругого сопротивления.

Координатная система выбрана следующим образом: Оси  $X$  и  $Y$  расположены на срединной плоскости,  $a$  ось  $Z$  перпендикулярна к ним. Предполагается, что толщина пластинки  $h$  и плотность  $\rho$  являются непрерывными функциями координаты длины пластинки:

$$h = h_0(1 + \varepsilon f(x)); \quad \rho = \rho_0 \psi(x); \quad \varepsilon = \frac{\bar{h} - h}{h + h}$$

здесь  $h_0$  - толщина пластинки постоянной толщины,  $\rho_0$  - плотность однородной пластинки,  $\bar{h}$  и  $h$  - соответственно, наибольшее и наименьшее значения толщины пластинки.

Реакция основания  $F$  с прогибом  $W$  связана следующим соотношением [1, 2]:

$$F = K_1(x)W + K_2(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

здесь  $K_1(x)$  и  $K_2(x)$  характеризуют, соответственно, упругие и вязкие свойства основания,  $t$  - время.

Связь между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  имеет следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}); & \sigma_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}); & (1) \\ \sigma_{12} &= G\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

Здесь  $E_1, E_2$  - модули упругости,  $G$  - модуль сдвига,  $\nu_1, \nu_2$  коэффициенты Пуассона.

$\varepsilon_{11} = e_1 + \chi_1 z$ ;  $\varepsilon_{22} = e_2 + \chi_2 z$ ;  $\varepsilon_{12} = e_0 + \chi_0 z$ , (2)  
где  $e_1, e_2, e_0$  - деформации,  $\chi_1, \chi_2, \chi_0$  - кривизны срединной поверхности

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \chi_0 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

С учетом (1)-(3), получим выражение моментов относительно прогиба в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{11} &= D_1(1 + \varepsilon f(x))^3(\chi_1 + \nu_2\chi_2); \\ M_{22} &= D_2(1 + \varepsilon f(x))^3(\chi_2 + \nu_1\chi_1); \\ M_{12} &= D_3(1 + \varepsilon f(x))^3\chi_0, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь

$$D_1 = \frac{E_1 h_0^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h_0^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_3 = \frac{h_0^3}{12}G.$$

С учетом (4) уравнение движения записывается в следующем виде [4,5]:

$$\begin{aligned} &D_1(1 + \varepsilon f(x))^3 \frac{\partial W}{\partial x^4} + D_4(1 + \varepsilon f(x))^3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ &+ D_2(1 + \varepsilon f(x))^3 \frac{\partial^4 W}{\partial y^2} + 3\varepsilon(1 + \varepsilon f(x)) \left[ 2\varepsilon \left( \frac{df}{dx} \right)^2 + (1 + \varepsilon f(x)) \frac{d^2 f}{dx^2} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_5 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 6D_1 \varepsilon \frac{df}{dx} (1 + \varepsilon f(x))^2 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \\ & + D_6 \varepsilon \frac{df}{dx} (1 + \varepsilon f(x))^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_1(x)W - K_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_0 \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

здесь

$$D_4 = D_1 \nu_2 + D_2 \nu_1 + 2D_3; \quad D_5 = D_1 \nu_2; \quad D_6 = 6(D_1 \nu_2 + D_3).$$

Уравнение (5) является сложным и при решении появляется необходимость использования приближенно-аналитических методов. В данном случае будем использовать метод разделения переменных и метод ортогонализации Бубнова – Галеркина.

Отметим, что при  $f(x) = \bar{x}$  ( $\bar{x} = \alpha a^{-1}$ ), решение задачи и анализ результатов гораздо упрощается. В этом случае уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (1 + 3\varepsilon \bar{x}) \left[ D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right] + 6D_1 \varepsilon a^{-1} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \\ & + D_6 \varepsilon a^{-1} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} - K_1(x)W - K_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_0 \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Для решения (6) в первом этапе примем метод разделения переменных и функцию  $W(x, y, t)$  ищем в следующем виде:

$$W(x, y, t) = V(x, y) \sin(i\omega t), \quad (7)$$

где функция  $V(x, y)$  должна удовлетворять соответствующим краевым условиям,  $\omega$  - частота колебания. Подставляя (7) в (6) получим:

$$\begin{aligned} & (1 + 3\varepsilon \bar{x}) \left[ D_1 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \right] + 6D_1 \varepsilon a^{-1} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \\ & + D_6 \varepsilon a^{-1} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} - K_1(x)V - \omega^2 [K_2(x)V + \rho_0 \psi(x)V] = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Решение уравнение (8) можно искать с помощью метода ортогонализации Бубнова – Галеркина.

В качестве примера рассмотрим случай для цилиндрической формы изгибного колебания. В этом случае уравнение упрощается и принимает следующий вид:

$$D_1 (1 + 3\varepsilon \alpha a^{-1}) \frac{d^4 V}{dx^4} + 6D_1 \varepsilon a^{-1} \frac{d^3 V}{dx^3} - K_1(x)V - \omega^2 [K_2(x) + \rho_0 \psi(x)]V = 0. \quad (9)$$

Решение (9) будем искать в виде:

$$V = \sum_{i=1}^n C_i \theta_i(x),$$

здесь  $C_i$  - неизвестные постоянные и подлежат определению, а каждый  $\theta_i(x)$  должен удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Функция ошибки в данном случае записывается следующим образом:

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^n C_i \left\{ D_1 (1 + 3\varepsilon \alpha^{-1}) \frac{d^4 \theta_i}{dx^4} + 6D_1 \varepsilon \alpha^{-1} \frac{d^3 \theta_i}{dx^3} - K_1(x) \theta_i - \omega^2 [K_2(x) + \rho_0 \psi(x)] \theta_i \right\} \neq 0. \quad (10)$$

Условие ортогонализации имеет вид:

$$\int_0^a \eta(x) \theta_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В произвольном приближении значение  $\omega^2$  определяется из системы однородных линейно алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_i$ . Для существования нетривиальных решений главный определитель системы должен равняться нулю:

$$\|\omega^2\| = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) является уравнением  $n$ -ой степени относительно  $\omega^2$ . Однако для практических расчетов обычно пренебрегается с определением основного тона частоты, хотя при произвольном приближении определение значений  $\omega^2$  не вызывает особого труда. Основной тон определяется из условия

$$\int_0^a \eta(x) \theta_1(x) dx = 0. \quad (12)$$

Принимая  $\theta_1 = \sin \pi \bar{x}$ ;  $\psi(x) = 1 + \mu \bar{x}$ ;  $K_1 = k_1^0 (1 + \alpha \bar{x})$ ;  $K_2 = k_2^0 (1 + \alpha \bar{x})$ ,  $\mu \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  и используя (10), (12) после некоторых преобразований, получим:

$$\omega^2 = \frac{D_1 (\pi a^{-1})^4 (1 + 1,5\varepsilon) - k_1^0 (1 + 0,5\alpha)}{\rho_0 (1 + 0,5\mu) + k_2^0 (1 + 0,5\alpha)}. \quad (13)$$

Из (13) при  $\varepsilon = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\alpha = 0$  получим решение аналогичной задачи для однородно ортотропной пластинки, лежащей на однородной вязкоупругой среде. Отметим, что из (13) можно получить ряд частных задач. При некоторых случаях произведен численный расчет, результаты которых представлены в виде таблиц и графиками зависимостями между характерными параметрами.

1) При  $k_1^0 = 0$ ,  $k_2^0 = 0$  получаем:

$$\omega_0^2 = \frac{A_0(1+1,5\varepsilon)}{1+0,5\mu}, \quad (14)$$

Здесь

$$A_0 = \frac{D_1(\pi a^{-1})^4}{\rho_0}.$$

Соотношение (14) можно представить в следующем виде:

$$\bar{\omega}_0^2 = \frac{\omega_0^2}{A_0} = \frac{1+1,5\varepsilon}{1+0,5\mu}$$

2) При  $k_1^0 = 0$ ,  $\mu = \alpha$  получим:

$$\omega_1^2 = \frac{A_1(1+1,5\varepsilon)}{(1+0,5\mu)}, \quad (15)$$

где

$$A_1 = \frac{D_1(\pi a^{-1})^4}{\rho_0 + k_2^0}.$$

Соотношение (15) можно представить в следующем виде:

$$\bar{\omega}_0^2 = \frac{\omega_1^2}{A_1} = \frac{1+1,5\varepsilon}{1+0,5\mu}.$$

Таблица 1

$\varepsilon = 0$	$\mu$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\bar{\omega}_0^2$	1	0,91	0,83	0,77	0,71	0,67
$\varepsilon = 0,4$	$\mu$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\bar{\omega}_0^2$	1,6	1,45	1,33	1,23	1,14	1,07
$\varepsilon = 0,8$	$\mu$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\bar{\omega}_0^2$	2,2	2,0	1,83	1,69	1,57	1,47

Таблица 2

$\mu = 0$	$\varepsilon$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\bar{\omega}_0^2$	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5
$\mu = 0,4$	$\varepsilon$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\bar{\omega}_0^2$	0,83	1,08	1,33	1,58	1,83	2,08
$\mu = 0,8$	$\varepsilon$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\bar{\omega}_0^2$	0,71	0,93	1,14	1,36	1,57	1,79

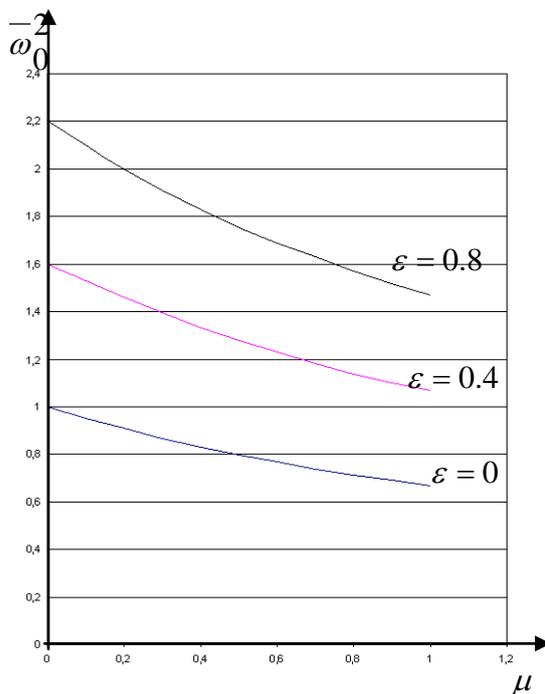


Рис. 1

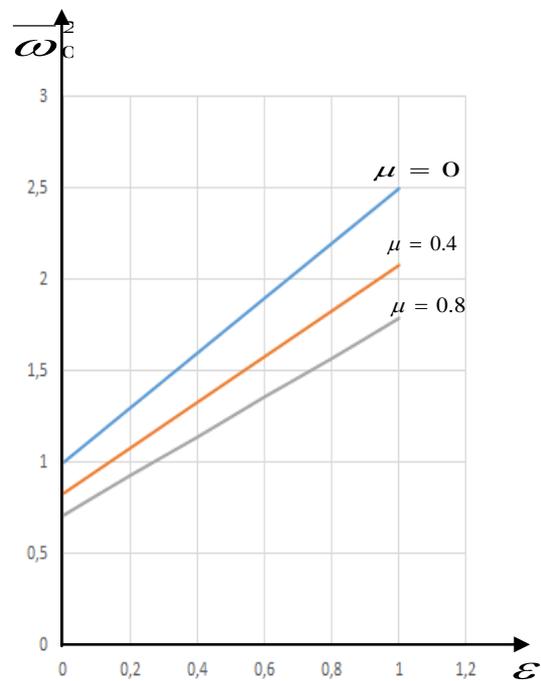


Рис. 2

Как видно из проведенных расчетов учёт вязкоупругого сопротивления и переменности плотности существенным образом влияют на значение круговой частоты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаныцин А.Р. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1982, 399 с.
2. Carnet H., Lievvy L. Free Vibrations of Reinforced Elastic Shells. Conference of ASME, November 16-20, 1969, Los-Angeles.
3. Лехницкий С.П. Теория анизотропных пластин. М., 1977, 445 с.
4. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1963, 376 с.

5. Гаджиев В.Д., Гасымов Г.М., Фархадов А.С. Собственные колебания ортотропной прямоугольной пластинки переменной толщины. Механика машиностроение, № 2, Баку, 2006, с. 13-14.

## **ÖZLÜ-ELASTİK ƏSAS ÜZƏRİNDƏ YERLƏŞƏN DƏYİŞƏN QALINLIQLI DÜZBUCAQLI LÖVHƏNİN RƏQSİ HAQQINDA**

**H.M.QASIMOV, A.İ.ŞİRİYEV**

### **XÜLASƏ**

Məqalədə qeyri-bircins özlü-elastik əsas üzərində yerləşən dəyişən qalınlıqlı düzbucaqlı lövhənin sərbəst rəqsləri öyrənilir. Məsələnin həlli dəyişənlərinə ayırma və Bubnov-Qalyorkin metodlarının köməyi ilə qurulur. Silindrik formada eninə rəqslər üçün, lövhənin qalınlığının, sıxlığının, həmçinin əsasın xarakteristikalarının uzunluq boyunca xətti qanunla dəyişməsi halında hesablama aparılmışdır.

**Açar sözlər:** rəqs, lövhə, tezlik.

## **ON THE OSCILLATION OF A VARIABLE THICKNESS OF THE RECTANGULAR PLATE LYING ON VISCOELASTIC FOUNDATION**

**H.M.GASYMOV, A.I.SHIRIYEV**

### **SUMMARY**

In the paper we consider the eigen oscillation of a variable thickness of a rectangular plate lying on a nonhomogeneous visco-elastic foundation. The solution of the problem is constructed by the method of separation of variables and Bubnov-Galerkin method. Assuming that the plate thickness, density and characteristics of the foundation along the plate change according to linear law, numerical calculation is carried out. The results of the calculation are represented in the form of tables and dependence graphs between the typical parameters.

**Key words:** oscillation, plate, frequency.

*Поступила в редакцию: 04.06.2015 г.*

*Подписано к печати: 17.11.2015 г.*