BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ

**Т.Г.РАМАЗАНОВ, Г.М.АББАСОВ**
***Институт Прикладной Математики БГУ***

*В данной работе рассматривается задача вытеснения одной жидкости другой в пористой среде. Применяются метод расщепления по пространственным координатам и метод конечных разностей. Чтобы повысить точность, сделать непрерывным и гладким решения задачи, в дифференциальном уравнении вводится член с малым параметром при второй производной, имеющий смысл малой вязкости. Проведены численные расчеты и анализ полученных результатов.*

Как известно, математическое моделирование движения жидкостей в капиллярно-пористой среде обосновывается на законе сохранения, импульса и эмпирическом законе Дарси, связывающий скорость движения жидкости $\upsilon(x,t)$ с градиентом давления $\operatorname{grad} p(x,t)$ [1-4].При точной постановке математическая модель задачи описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых возможны пульсации и разрывы в решениях. Для устранения этих дефектов применятся метод малого параметра [5].

Область фильтрации для одномерной задачи состоит из трех областей:

$D_1 = \{x,t : 0 \le x(t) \le x_1(t),\ \ t \in [0,T]\}$ – водяная область,

$D_2 = \{x,t : x_1(t) \le x(t) \le x_2(t),\ \ t \in [0,T]\}$ – область смеси,

$D_3 = \{x,t : x_2(t) \le x(t) \le L,\ \ t \in [0,T]\}$ – нефтяная область, где $L$ длина пласта, T- время обводнения, $x_1(t), x_2(t)$ - точки соприкосновения фаз первой и второй жидкости. Пусть область фильтрации и соответствующая дискретная область будут соответственно $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \times [0,T]$ и $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \times W_4$.

Здесь

$$W_1 = [x_{m_1}(t_n) : x_{m_1}(t_n) = x_0(t_n) + \frac{x_1(t_n)}{n_1} \cdot (m_1 - 1),\ m_1 = 1,2,\dots,n_1+1],$$

$$W_2 = [x_{m_2}(t_n) : x_{m_2}(t_n) = x_1(t_n) + \frac{x_2(t_n) - x_1(t_n)}{n_2} \cdot (m_2 - 1),\ m_2 = 1,2,\dots,n_2+1],$$

$$W_3 = [x_{m_3}(t_n) : x_{m_3}(t_n) = x_2(t_n) + \frac{L - x_2(t_n)}{n_3} \cdot (m_3 - 1),\ m_3 = 1,2,\dots,n_3+1],$$

$W_4 = [t_n : t_n = n\tau, \quad n = 1,2,\dots,[\frac{T}{\tau}]$, $x_m$ соответствует значению x в $m$-ой узловой точке сеточной области, $\tau$ -постоянный шаг по времени $t, n_1, n_2 -$ число разбиений соответственно водной области и области смеси первой и второй жидкости, $n_3$- число разбиений нефтяной области, $M = n_1 + n_2 + n_3 + 1$ число разбиений области фильтрации $D$. В одномерной задаче насыщенность водою пласта $\rho(x,t)$ и подвижных границ $F_i(x,t), F_2(x,t)$ определяется как решения следующих дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\chi \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Phi(\rho) \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\chi_r \cdot \frac{\partial F_r}{\partial t} = \Phi_r(\rho) \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial F_r}{\partial x} = 0, r = 1,2, \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями

$$\rho(x,0) = \varphi_0(x) \text{ при } t = 0 \text{ и } 0 < x < L, \tag{3}$$

$$\rho(x,t) = \varphi_1(t) \text{ при } x = 0 \text{ и } 0 < t \le T, \tag{4}$$

$$\rho(x,t) = \varphi_2(t) \text{ при } x = L \text{ и } 0 < t < T, \tag{5}$$

где $\Phi_r(\rho) = \frac{\partial F_r(\rho)}{\partial \rho}, r = 1,2,$ $F(\rho) = \frac{\rho}{\rho + \mu_0(1-\rho)}$, $\Phi(\rho) = \frac{\mu_0}{[\mu_0 + \rho(1-\mu_0)]^2}$,

$\Phi_1(\rho) = \Phi(1)$ при $\rho = 1$ и $x = x_1(t),$ $\Phi_2(\rho) = \Phi(0)$ при $\rho = 0$ и $x = x_2(t),$ $\chi_r$ $(r = 1,2) -$ коэффициент пористости на подвижных границах, $\varepsilon -$ малый параметр $(\varepsilon > 0); \mu_1, \mu_2$ вязкости воды и нефти, $\varphi_0(x) \in C^{[3]}[0,L]$ гладкая функция, для которой выполняется условие согласования $\varphi(0) = \varphi_1(0)$ и ограниченность $\varphi_1(t) < 1,$ $\varphi_2(t) < 1, t \in [0,T]$, функция Бакелея-Леверетта $\Phi(\rho)$ проведен в работе [3],уравнение давления исследовано в [2].

Дискретные уравнения, соответствующие уравнениям (1)-(2) с помощью комбинации явной и неявной разностной схемы после замены производных через конечно-разностные соотношения на узловых точках неравномерной сеточной области (в двумерном случае $W = W^{\tau}_{h_x,h_y}$ ) имеют вид:

$$\chi \cdot \frac{\rho_m^{n+1} - \rho_m^n}{\tau} = \nu^* L_1 \rho_m^{n+1} + (1-\nu^*) L_1 \rho_m^n, \qquad (6)$$

$$\chi_r \cdot \frac{F_{1,m}^{n+1} - F_{1,m}^n}{\tau} = \Phi_r(\rho_m^n) \cdot \frac{P_m^n - P_{m-1}^n}{x_m - x_{m-1}} \cdot \frac{F_{1m}^n - F_{1m-1}^n}{x_m - x_{m-1}}. \qquad (7)$$

Здесь $0 < \nu^* \le 1$- числовой параметр. Разностные схемы (6) и (7) аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения (1) и (2) со вторым порядком по h и с первым порядком по $\tau$ .Начальные и граничные условия задачи (3) и (4) аппроксимируются на границах сетки точно.

Перепишем уравнение (6) в операторном виде

$$(I - \frac{\tau\nu^*}{\chi})\rho_m^{n+1} - \left[\frac{\tau(1-\nu^*)}{\chi} L_1 + I\right]\rho_m^n = 0, \qquad (8)$$

где I единичный оператор, $L_1$ является линейным разностным оператором для водонасыщенности. Совместное применение комбинации разных разностных схем дает возможность расширить область устойчивости решения, при этом шаги сеточной области можно подобрать большими.

Для решения двумерной задачи фильтрации двухфазной жидкости применяется метод переменных направлений (методы расщепления), успешно применяемый в задачах метрологии, океанологии и гидродинамики. При использовании переменных направлений требуемое арифметическое действие пропорционально числу переменных в уравнении, а при использовании метода исключения число действий пропорционально кубу числа переменных.

Математическая модель задачи фильтрации двухфазной жидкости в двумерном случае имеет вид:

$$\chi \cdot \cdot \rho_t = \upsilon_x \cdot \rho_x + \upsilon_y \cdot \rho_y + \varepsilon, \qquad (9)$$

$$\chi_r (F_r)_t = \upsilon_x (F_r)_x + \upsilon_y (F_r)_y, \; r = 1,2,..., \qquad (10)$$

где $v_x = \Phi(\rho).\frac{\partial p}{\partial x}$, $v_y = \Phi(\rho).\frac{\partial p}{\partial y}$, $\Delta\rho -$ оператор Лапласа,. $\upsilon_x, \upsilon_y$ - скорости вытеснении жидкостей по направлению x и y.

Начальные и граничные условия задаются в виде

$$\rho(x,y,t)\Big|_{t=0} = \varphi_0^*(x,y), \quad x \in [0,L], \; y \in [0,H], \qquad (11)$$

$$\rho(x,y,t)\Big|_{x=0} = \varphi_1^*(y,t), \quad y \in [0,H], \; t \in [0,T], \qquad (12)$$

$$\rho(x,y,t)\ \Big|_{x=L} = \varphi_2^*(y,t), \quad y \in [0,H], \ t \in [0,T], \tag{13}$$

где H мощность пласта, $\varphi_0^*, \varphi_1^* -$ заданные функции. Для получения сеточных уравнений, соответствующих уравнениям (9) и (10) будем предполагать, что решения $\rho(x,y,t)$ и $F_r(x,y,t)$, $(r=1{,}2)$ имеют частные производные и ограничены. Тогда по свойству операции дифференцирования в каждой точке неравномерной двумерной сетки $(x_m, y_n, t_{k+0,5}), (x_m, y_n, t_{n+1}) \subset W_{h_x,h_y}^{\tau}$ можем написать сеточные уравнения в виде:

$$A_{m,n}^k \rho_{m,n}^{k+0,5} = B_{m,n}^k, \tag{14}$$

$$A_{m,n}^{k+0,5} \rho_{m,n}^{k+1} = B_{m,n}^{k+0,5}, \tag{15}$$

$$D_{m,n}^k F_{m,n,r}^{k+0,5} = C_{m,n}^k, \tag{16}$$

$$D_{m,n}^{k+0,5} F_{m,n,r}^{k+1} = C_{m,n}^{k+0,5}. \tag{17}$$

Трехточечные трехслойные сеточные системы алгебраических уравнений (14)-(17) имеют матрицы трехдиагонального типа. Для них выполняются условия преобладания диагональных элементов. Решения в любом значении $\dfrac{\tau}{h_x^2}$ и $\dfrac{\tau}{h_y^2}$ безусловно устойчивые.

$$\rho_{mn}^k = u(x_m, y_n, t_k) + \delta\rho_{mn}^k, \tag{18}$$

где $\rho_{mn}^k, u(x_m, y_n, t_k)$ приближенное и точное решение в сетке, $\delta\rho_{mn}^k -$ погрешность аппроксимации. Погрешность аппроксимации $\delta\rho_{mn}^k = \delta\rho(x_m, y_n, t_k)$, для двумерной задачи стремится к нулю при стремлении параметров сетки к нулю: $\tau \to 0,\ h_x \to 0,\ h_y \to 0.$

Разработаны алгоритмы решения задачи и программы на алгоритмическом языке PASKAL. С помощью программы были проведены вычислительные эксперименты на ПК. Для ведения численного эксперимента начально-краевые условия и параметры задачи выбраны в следующем виде

$$\mu_1 = 10^{-3}\,Па.сек,\ \mu_2 = 2\cdot 10^{-3}\,Па.сек.,L = 100m,\ p(x_0,t) = 1,\ P(x_m,t) = 0.1,\ \ \varepsilon = 10^{-6},$$

$$f_1(\rho) = \left(\frac{\rho - 0{,}1}{0{,}9}\right)^3,\ f_2(\rho) = \left(\frac{0{,}9 - \rho}{0{,}8}\right)^3,\ \ x_1 = 0{,}1;\ x_2 = 0{,}3;\ \tau = 0{,}01;\ n_1 = 10;$$

$$n_2 = 10;\ n_3 = 10;\ M = n_1 + n_2 + n_3 + 1 = 31.$$

Результаты вычислительного эксперимента показаны в следующей таблице.

| $x(t)$ | $p_i(x,t)$ | $\rho_i(x,t)$ | $F_1(x,t)$ | $F_2(x,t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | -0.2150 | -0.7620 |
| 0.0717 | 0.9355 | 1.0000 | -0,1433 | -0,6903 |
| 0,1433 | 0,8710 | 1.0000 | -0,0717 | -0,6187 |
| 0,2150 | 0,8065 | 1.0000 | 0 | -0,5470 |
| 0,2931 | 0,7362 | 0,8571 | 0,0781 | -0,4684 |
| 0,03713 | 0,6658 | 0,7143 | 0,1563 | -0,3907 |
| 0,4494 | 0,5955 | 0,5714 | 0,2344 | -0,3126 |
| 0,5276 | 0,5252 | 0,4286 | 0,3126 | -0,2344 |
| 0,6057 | 0,4549 | 0,2857 | 0,3907 | -0,1563 |
| 0,6839 | 0,3845 | 0,1429 | 0,4689 | -0,0781 |
| 0,7620 | 0,3142 | 0 | 0,5470 | 0 |
| 0,8413 | 0,2428 | 0 | 0,6263 | 0,0793 |
| 0,9207 | 0,1714 | 0 | 0,7057 | 0,1587 |
| 1 | 0,1 | 0 | 0,7850 | 0,2380 |

Анализ полученного результата позволяет сделать следующие выводы:

а) область устойчивости решения расширяется;

б) капиллярное давление с течением времени стремится к нулю, когда малый параметр стремится нулю.

в) применение комбинации разных разностных схем и метода дробных шагов повышает порядок аппроксимации и сходимости приближенного решения к точному решению, уменьшается оперативная память и время решения задачи на ПК.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Вахитов Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. М., Недра, 1970., 249 с.
2. Abbacov H .M. Corrects a non-lintar parabolic problem with unknovnmovig boundary discribing displacement of two weakly compressible viscousfluids in the porous medium. National Academy of sciences of Azerbaijan Proceedings of institute of mathematics and mechanics, Volume XX(XXVIII), Baku, 2004.
3. Аббасов А.Н. Анализ кривых фазовых проницаемостей и уточнений их аппроксимации. М. ВНИИОЭНГ, 1976 г., № 324 Деп., 11 с.
4. Рамазанов Т.К. Нелинейные волны в двухфазных системах. Прикладная механика, 1995, №9, т.31, стр. 38-45.
5. Самарский А.А. Попов Ю.Л. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975, 352 с.

## MƏSAMƏLİ MÜHİTDƏ BİR MAYENİN DİGƏRİ İLƏ SIXIŞDIRILMA PROSESİNİ TƏSVİR EDƏN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

**T.Q.RAMAZANOV, H.M.ABBASOV**

**ANNOTASIYA**

İşdə məsaməli mühitdə bir mayenin digəri ilə sıxışdırılması məsələsinə baxılır. Fəza koordinatlarına görə, budaqlanma və sonlu fərqlər üsulları tətbiq olunur. Məsələnin həllinin dəqiqliyini artırmaq, onu hamar etmək üçün diferensial tənlikdə ikinci tərtib törəmənin iştirak etdiyi həddə kiçik parametr daxil edilir (kiçik özlülük). Ədədi hesablamalar aparılır və alınan nəticələr təhlil olunur.

## NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM, DESCRIBING THE PROCESS OF DISPLACEMENT OF ONE LIQUID BY ANOTHER IN POROUS MEDIUM TAKING INTO ACCOUNT CAPILLARY PRESSURE

**T.Q.RAMAZANOV, H.M.ABBASOV**

**ABSTRACT**

In the work the problem of displacement the tone attics in the porous medium is considered. The separation by phase coordinates and difference methods are used. To raise the accuracy and make the solution of the problem continuous and smooth, a term with small parameter at the second introduced is introduced in the differential equation, which describes the little viscosity. The analyses and numerical calculations are carried out.