

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ И НЕОДНО-  
РОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
СО СРЕДОЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ**

**И.Т.ПИРМАМЕДОВ**

*Бакинский Государственный Университет*

*Опыт создания оптимальных конструкций, накопленный в различных отраслях машиностроения, авиастроения, судостроения и т.д., приводит все больше к расширению использования конструкционных материалов. Это в свою очередь приводит к необходимости более полного учета особенностей материалов и конструкций с целью рационального конструирования и проведения надежного расчета на прочность. Для более полного описания несущей способности конструкции целесообразно учитывать силы внешнего воздействия со стороны заполнителя. Одним из таких воздействий является контакт ее с упругой средой, которую можно моделировать как заполнитель. Силы внешнего воздействия со стороны заполнителя, по сути, являются поверхностными силами и обусловлены контактом между оболочкой и заполнителем. Контакт носит сложный характер и он зависит от разных факторов: механических параметров заполнителя, поверхности оболочки и т.д. Одним из основных факторов являются силы трения, обусловленной взаимодействием оболочки с заполнителем. Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая углубляется учетом динамических эффектов, что необходимо в задачах сейсмостойкости, вибрации, которые часто встречаются в технике. Поэтому требуются разработки приближенного метода. Одним из приближенных методов является вариационный. Это объясняется еще тем, что он позволяет получить непротиворечивые приближенные теории тонкостенных конструкций типа оболочек и стержней.*

*В данной статье с помощью вариационного принципа исследуются параметрические колебания тонкой неоднородной нелинейной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с заполнителем, находящейся под действием внешнего давления, и с учетом трения в контакте. Рассматривается случай линейной вязкоупругости. Построены зависимости зоны динамической устойчивости колебаний цилиндрической оболочки с заполнителем от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота, где учтено трение между оболочкой и заполнителем.*

Рассмотрим цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса  $R$ , толщиной  $2h$ , длиной  $l$ , заполненной средой. Действие среды на обо-

лочку заменим силой  $q_0 = k_0(1 - \omega_0^2 \beta_0^2)W$  (модель типа «Винклера»), распределенной по боковой поверхности оболочки и действующей против движения точек поверхности оболочки.

Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены: при  $x = 0, l$

$$N_{xx} = 0; M_{xx} = 0; W = 0; v = 0,$$

где  $N_{xx}$  - усилия,  $M_{xx}$  - моменты,  $v, \omega$  - компоненты вектора перемещений точки оболочки.

Для исследования параметрических колебаний тонких цилиндрических вязкоупругих оболочек, заполненной средой, будем применять вариационный принцип. В физических проекциях функционал примет вид [1]:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{l/\omega} \int_0^l \int_0^k \left\{ \dot{N}_{xx} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{N}_{x\varphi} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{N}_{\varphi\varphi} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{w}}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \dot{M}_{xx} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \dot{M}_{x\varphi} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x \partial \varphi} - \right. \\ & \left. - \dot{M}_{\varphi\varphi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{8h^2} \dot{N}_{xx} \left[ \frac{1}{E_0} (\dot{N}_{xx} - \nu N_{\varphi\varphi}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{E_1} (\dot{M}_{xx} - \nu \dot{M}_{\varphi\varphi}) \frac{3}{h^2} \right] - \frac{3}{8h^4} \dot{M}_{xx} \left[ \frac{1}{E_1} (\dot{N}_{xx} - \nu N_{\varphi\varphi}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_2} (\dot{M}_{xx} - \nu \dot{M}_{\varphi\varphi}) \right] - \frac{1}{8h^2} \dot{N}_{\varphi\varphi} \left[ \frac{1}{E_0} (\dot{N}_{\varphi\varphi} - \nu N_{xx}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{E_1} \frac{3}{h^2} (\dot{M}_{\varphi\varphi} - \nu \dot{M}_{xx}) \right] - \frac{3}{8h^4} \dot{M}_{\varphi\varphi} \left[ \frac{1}{E_1} (\dot{N}_{\varphi\varphi} - \nu N_{xx}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{E_2} \frac{3}{h^2} (\dot{M}_{\varphi\varphi} - \nu \dot{M}_{xx}) \right] - \frac{1+\nu}{4h^2} \dot{N}_{x\varphi} \left[ \frac{1}{E_0} \dot{N}_{x\varphi} + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_1} \dot{M}_{x\varphi} \right] - \right. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4h^4} \dot{M}_{x\varphi} \left[ \frac{1}{E_1} \dot{N}_{\varphi x} + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_2} \dot{M}_{x\varphi} \right] (1+\nu) - \frac{1}{4h^2} \dot{N}_{xx} \cdot \\
& \cdot \left[ \int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) (2N_{xx} - N_{\varphi\varphi}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2M_{xx} - M_{\varphi\varphi}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{xx} \left[ \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2N_{xx} - N_{\varphi\varphi}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) (2M_{xx} - M_{\varphi\varphi}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{1}{4h^2} \dot{N}_{\varphi\varphi} \left[ \int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) (2N_{\varphi\varphi} - N_{xx}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2M_{\varphi\varphi} - M_{xx}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{\varphi\varphi} \left[ \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2N_{\varphi\varphi} - N_{xx}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) (2M_{\varphi\varphi} - M_{xx}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& - \frac{1}{2h^2} \dot{N}_{x\varphi} \left[ \int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) N_{x\varphi} d\tau + \frac{3}{h^2} \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) M_{x\varphi} d\tau \right] - \\
& - \frac{3}{2h^4} \dot{M}_{x\varphi} \left[ \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) N_{x\varphi} d\tau + \frac{3}{h^2} \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) M_{x\varphi} d\tau \right] \Big\} R dx d\varphi dt + \\
& + \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} R \dot{q} \dot{W} dx d\varphi dt - \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} R k_0 (1 - \omega_0^2 \beta_0^2) \dot{W}^2 dx d\varphi dt + \\
& + \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} f q_0 R u d\varphi dx dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{\pi/k} \rho_0 \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 R d\varphi dx dt.
\end{aligned}$$

В функционале (1) принимается, что  $\frac{1}{E_i} = \int_{-h}^h \frac{z^i}{E(z)} dz$ ,

$$K_i = \int_{-h}^h z^i K(z, t) dz, \quad \rho_i = \int_{-h}^h \rho(z) z^i dz \quad i = 0, 1, 2.$$

Кроме того,  $f$  - коэффициент трения скольжения,  $q_0$  - нормальное давление на оболочку со стороны заполнителя и принято, что

$$K(z, t) = \frac{a}{E(z)} e^{-\beta t}, \quad (2)$$

где  $a$  — механический параметр,  $\beta$  — показатель экспоненты. Такая зависимость (зависимость от  $Z$ ) продиктована тем, что для однородного случая коэффициент при экспоненте берут пропорциональным модулю Юнга. В этом случае образы Фурье имеют вид:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} dy = \frac{a}{\beta}; \\ \Phi_s &= a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sin \omega y dy = a \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}; \\ \Phi_c &= a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \cos \omega y dy = a \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Варьируемыми величинами являются  $\dot{u}$ ,  $\dot{W}$ ,  $\dot{v}$ ,  $\dot{N}_{xx}$ ,  $\dot{N}_{x\varphi}$ ,  $\dot{M}_{xx}$ ,  $\dot{M}_{\varphi\varphi}$ ,  $\dot{M}_{x\varphi}$ . Определим стационарное значение функционала (1). Для этого применим метод Ритца. Исходя из ожидаемой физической картины, колебания цилиндрической оболочки, неизвестные величины ищем в виде:

$$\begin{aligned}u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t), \\ v &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (v_0 \cos \omega t + v_1 \sin \omega t), \\ W &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (W_0 \cos \omega t + W_1 \sin \omega t), \\ N_{xx} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{10} \cos \omega t + N_{11} \sin \omega t), \\ N_{x\varphi} &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (N_{30} \cos \omega t + N_{31} \sin \omega t), \\ N_{\varphi\varphi} &= -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{20} \cos \omega t + N_{21} \sin \omega t), \\ M_{xx} &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{10} \cos \omega t + M_{11} \sin \omega t), \\ M_{\varphi\varphi} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{20} \cos \omega t + M_{21} \sin \omega t), \\ M_{x\varphi} &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (M_{30} \cos \omega t + M_{31} \sin \omega t),\end{aligned}\quad (4)$$

где  $k$  - число волн в окружном направлении. Отметим, что это число должно быть четным в виду периодичности задачи. Член в выражении для окружного напряжения указывает на аналог аппроксимации с аппроксимацией для статики. Подставим аппроксимации (3) в функционале (1) и проинтегрируем по  $x$  и  $t$ . Тогда вместо функционала (1) получаем функцию от  $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{W}_i, \dot{N}_{3i}, \dot{M}_{3i}, \dot{N}_{1i}, \dot{N}_{2i}, \dot{M}_{1i}, \dot{M}_{2i}$ . Из-за их громоздкости эти функции здесь не приводим. Стационарное значение полученной функции определяется из следующей системы:

$$\begin{aligned}
 & 1) \frac{\partial J}{\partial \dot{u}_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial \dot{u}_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \dot{v}_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \dot{v}_1} = 0; \\
 & 5) \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_0} = 0; \quad 6) \frac{\partial J}{\partial \dot{W}_1} = 0; \quad 7) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{10}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{11}} = 0; \\
 & \quad 9) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{30}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{31}} = 0; \quad 11) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{20}} = 0; \\
 & 12) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{10}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{11}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{20}} = 0; \quad (5) \\
 & 15) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{21}} = 0; \quad 16) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{30}} = 0; \quad 17) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{31}} = 0.
 \end{aligned}$$

Начальные значения для решения этой системы, основываясь на вариационном принципе следующее: при отсутствии нагрузки в оболочке имеет естественное состояние, т.е., при  $q_i = 0$  имеем

$$u_j = v_j = W_j = 0; \quad N_{ij} = M_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Итак, приведенная система приближенно описывает параметрические колебания нелинейной вязкоупругой оболочки неоднородной по толщине с учетом нелинейности прогиба, где учтены силы трения между оболочкой и наполнителем.

Полученные системы уравнений являются квазилинейными дифференциальными. Для решения системы сигнала разрешим ее относительно производных  $\dot{u}_0, \dot{u}_1, \dot{v}_0, \dot{v}_1, \dot{W}_0, \dot{W}_1, \dot{N}_{10}, \dot{N}_{11}, \dot{N}_{30}, \dot{N}_{31}, \dot{N}_{20}, \dot{N}_{21}, \dot{M}_{10}, \dot{M}_{11},$

$\dot{M}_{20}, \dot{M}_{21}, \dot{M}_{30}, \dot{M}_{31}$ , а потом, применяя метод Рунге-Кутты, решим задачу Коши при выше поставленных начальных условиях. Для реализации задачи численно введены безразмерные величины:

$$C_i = W_i/h; \quad V_i = v_i/h; \quad U_i = u_i/h; \quad n_{1i} = N_{1i}/(E_x h);$$

$$m_{1i} = M_{1i}/(E_x h^2); \quad n_{2i} = N_{2i}/(E_x h); \quad n_{3i} = N_{3i}/(E_x h);$$

$$m_{2i} = M_{2i}/(E_x h^2); \quad m_{3i} = M_{3i}/(E_x h^2) \quad (i = 0,1).$$

Все параметры, входящие в систему, описывают конструкцию кроме  $k$ . Задавая  $k = 4$  находим при всех заданных параметрах и  $\omega$ , наименьшее  $\tau_{ikp}$ , где  $\tau_{inp} = q_1 R$ . На рис.1 приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота.

Для удобства счета были введены, наряду с вышеприведенными безразмерными параметрами, следующие величины:

$$W_0 = c_0 h; \quad W_1 = c_1 h; \quad \omega = \omega_0 \beta;$$

$$\frac{1}{E_i} = h^{i+1} \frac{1}{E_x} \frac{1}{l_i}; \quad \rho_0 = \frac{\rho E_x h^3}{\beta^2}; \quad \rho_i = \tau_i E_x h^3.$$

Для параметров задачи приняты:

$$\tau_0 = 0,03; 0,09; \quad \alpha = 0,5; 0,9; 0; \quad \rho = 0,3; 1;$$

$$\alpha_0 = 0,05; 0,1; 0; \quad k_0 = 24 \cdot 10^3 \text{ кз/м}^3, \quad f = 0,25$$

Функции неоднородности взяты следующие:

линейная -  $E(z) = E_x \left[ 1 + \alpha \left( \frac{z}{h} \right) \right],$

параболическая -  $E(z) = E_x \left[ 1 + \alpha \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right],$

где  $E_x$  — характерный модуль Юнга,  $\alpha$  - параметр неоднородности.

Отметим, что в случае линейной функции  $|\alpha| < 1$ , а в случае параболической функции  $\alpha$  может быть любой, но в случае отрицательного,  $\alpha$  по модулю меньше единицы.

На рис.1 штриховыми линиями соответствуют колебания цилиндрической оболочки с заполнителем, моделирующимся в форме модели типа «Винклера», без учета силы трения, а сплошные линии соответствуют колебаниям цилиндрической оболочки с заполнителем, моделирующимся в форме типа модели «Винклера», с учетом силы трения. Счет показывает, что учет трения между оболочкой и заполнителем приводит к уменьшению критической силы потери устойчивости оболочки. Кроме того, учет динамических действий заполнителя на процесс параметрических колебаний рассмотренной системы (модель типа «Винклера») приво-

дит снижению критической силы по сравнению с критической силой, полученной для модели «Винклера».

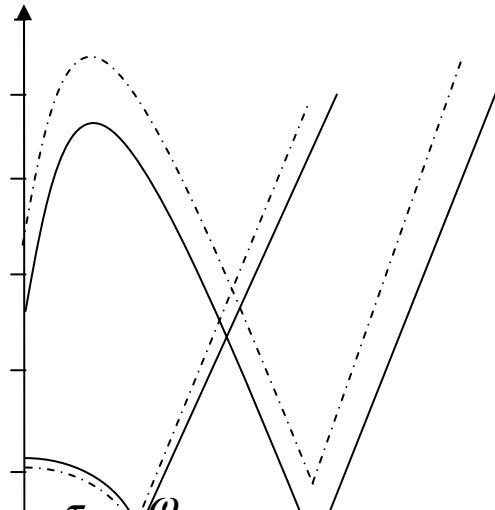


Рис.1. Зависимость  $\tau_1$  от  $\omega$  для линейного закона при следующих значениях параметров:  
 $h_0 = 0,02$ ;  $\alpha = 0,4$ ;  $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ ;  $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$ ;  
 $\beta_0 = 1$ ;  $f = 0,25$  ( $1 - k = 2$ ;  $2 - k = 4$ )

Во всех случаях волнообразованию соответствует  $k = 2$ . Отметим, что расчет показывает, что при  $k = 4$  характерная кривая сдвигается и не представляет практический интерес.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ализде А.Н., Амензаде Р.Ю. Вариационный принцип нелинейно-вязкоупругости с учетом геометрической нелинейности. ДАН СССР, т.230, №6, 1976, с.1303-1305.
2. Беляев Н.М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Сб. статей «Инженерные сооружения и строительная механика», Изд-во Путь, Л., 1924.
3. Юсифов М.О. Параметрические колебания трубопроводов с учетом покрытия. Деп. в ВИНТИ, 20.06.87, №796-Аз., 7с.

**SÜRTÜNMƏ QÜVVƏSİ NƏZƏRƏ ALINAN MÜHİTLƏ DİNAMİK  
QARŞILIQLI TƏSİRDƏ OLAN QEYRİ- XƏTTİ, QALINLIĞI BOYU  
QEYRİ-BİRCİNS, ÖZLÜ-ELASTİKİ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN  
PARAMETRİK RƏQSLƏRİ**

**İ.T. PİRMƏMMƏDOV**

**ANNOTASIYA**

Təqdim olunan məqalədə sürtünmə qüvvəsi nəzərə alınan mühitlə dinamik qarşılıqlı təsirdə olan qeyri-xətti, qalınlığı boyu qeyri-bircins, özlü-elastiki silindrik örtüyün parametrik rəqsləri tədqiq olunmuşdur. Qüvvə-tezlik müstəvisində xarakterik əyriyə qurulmuşdur. Sürtünmə əmsalının böhran qüvvəsinə təsiri öyrənilmişdir.

**PARAMETRIC OSCILLATIONS OF A NON-LINEAR, IN HOMOGENEOUS  
ON THICKNESS, CYLINDRICAL SHELL BEING AT DYNAMIC  
INTERACTION WITH A MEDIUM WITH REGARD FOR FRICTIONAL  
FORCES**

**I.T. PIRMAMEDOV**

**ABSTRACT**

Parametric oscillations of a non-linear, in homogeneous on thickness visco-elastic cylindrical shell being of dynamic interaction with a medium with regard to frictional forces are studied in the paper.

The characteristic curves are structured on force-frequency plane. The influence of friction coefficient on critical force is studied.