

**О ПОСТРОЕНИИ МИНИМИЗИРУЮЩИХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

М.Ф.МЕХТИЕВ, Р.А.САРДАРОВА, Я.А.ШАРИФОВ
Бакинский Государственный Университет

В данной работе устанавливаются достаточные условия на элементы минимизирующих последовательностей для задачи оптимального управления с многоточечными граничными условиями. Изучается связь этих условий с принципом максимума Понтрягина. Рассматривается конкретный пример.

1. **Постановка задачи.** Пусть некоторый управляемый объект описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t = [t_0, t_f] = T, \quad (1)$$

с граничным условием

$$\sum_{k=1}^m Ax(t_k) = B. \quad (2)$$

Управления (управляющие функции) $u: [t_0, t_f] \rightarrow R^2$ — измеримые ограниченные функции. Допустимыми назовем управления, принимающие значения из ограниченного множества $U \subset R^r$.

На решениях задачи (1), (2) и на множестве всех допустимых управлений будем рассматривать минимизацию функционала

$$J(u) = \Phi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt. \quad (3)$$

Множество всех допустимых управлений обозначим через D_U .

В (1), (3) функции $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): [t_0, t_f] \times R^n \times R^r \rightarrow R^n, F: [t_0, t_f] \times R^n \times R^r \rightarrow R^1$,

и их производные $\nabla_x f = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \nabla_x F = \frac{\partial F}{\partial x_j}$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, составляющие

соответственно, матрицу f_x и вектор F_x удовлетворяют условиям Каратеодори, т.е. измеримы по совокупности (t, x, u) и непрерывны по совокупности (x, u) при почти всех $t \in [t_0, t_f]$. Функция $\Phi: R^n \times R^n \rightarrow R^1$

также непрерывно дифференцируема. В (2) A_1, A_2, \dots, A_m - матрицы порядка $n \times n$ и $\det \sum_{k=1}^m A_k \neq 0$. Предполагается, что отрезок $[t_0, t_f]$ фиксирован и $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq t_f$.

Для многих физико-технических проблем весьма существенно, что управляемый динамический процесс описывается краевой задачей (1), (2). Например, к задаче (1) – (3) сводится проблема оптимизации многослойных конструкций [1], а также задача синтеза слоистых структур при различных волновых и температурных воздействиях [2] и др.

Отметим, что в частном случае ($A_1=I, A_2=A_3=\dots=A_m=0, I$ – единичная матрица) задача (1), (2) превращается в широко известную задачу оптимального управления со свободным правым концом (управление задачей Коши), которая имеет многочисленные приложения и для ее решения созданы достаточно эффективные методы.

При управлении задачей Коши вопрос о существовании и единственности решения этой задачи при выбранном управлении решался достаточно просто. Однако, в общем случае задача разрешимости краевой задачи (1), (2) при допустимых управлениях не поддается простому анализу. Поэтому в настоящей работе будем предполагать, что краевая задача (1), (2) разрешима при любом допустимом управлении. В частном случае, когда условие (2) имеет вид $A_1x(t_0)+A_2x(t_f)=B, \det(A_1+A_2) \neq 0$, условие разрешимости получено в работе [3]. В работе [4] получено необходимое условие оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина.

В данной статье устанавливаются достаточные условия на элементы минимизирующих последовательностей для задачи оптимального управления с многоточечными граничными условиями, выполнение которых гарантирует сходимость значений критерия качества на элементах данной последовательности управлений к нижней грани этих значений, соответствующей всему множеству допустимых управлений.

2. Основные результаты. Для формулировки достаточных условий на элементы минимизирующих последовательностей в задаче (1)–(3) определим [5,6] обобщенные E-функции Вейерштрасса $E_f : [t_0, t_f] \times R^n \times R^n \times R^r \times R^r \rightarrow R^n, E_F : [t_0, t_f] \times R^n \times R^n \times R^r \times R^r \rightarrow R^1, E_\Phi : R^{2n} \times R^{2n} \rightarrow R^1$ по формулам

$$E_f(t, y, x, v, u) \equiv f(t, y, v) - f(t, x, v) - \nabla_x f(t, x, u)(y - x)$$

$$E_F(t, y, x, v, u) \equiv F(t, y, v) - F(t, x, v) - \langle \nabla_x F(t, x, y), y - x \rangle$$

$$E_\Phi(x', y', x, y) \equiv \Phi(x', y') - \Phi(x, y) - \langle \nabla_x \Phi(x, y), x' - x \rangle - \langle \nabla_y \Phi(x, y), y' - y \rangle.$$

Следующая теорема представляет собой δ - оптимальность в задаче минимизации функционала $J(u)$.

Теорема 1. Для того, чтобы управление $u \in D$ удовлетворяло неравенству

$$J(u) \leq \inf_{v \in D} J(v) + \delta \quad , \quad \delta \geq 0 \quad (4)$$

достаточно выполнение следующих неравенств при всех $v \in D$:

$$\int_{t_0}^{t_f} [\langle \Psi_u(t), \Delta_u f(t, x_u(t), v(t), u(t)) \rangle + \Delta_u F(t, x_u(t), v(t), u(t))] dt \geq -\frac{\delta}{2}, \quad (5)$$

$$E(v, u) = \int_{t_0}^{t_f} [\langle \Psi_u(t), E_f(t, y_v(t), x_u(t), v(t), u(t)) \rangle + E_F(t, y_v(t), x_u(t), v(t), u(t))] dt + \\ + E_{\Phi}(x_v(t_0), x_v(t_f), x_u(t_0), x_u(t_f)) \geq -\frac{\delta}{2}, \quad (6)$$

где $\Psi_u(t) \in L_{\infty}[t_0, t_f]$ - решение сопряженной системы

$$\Psi_u(t) = \left\{ \left(\sum_{k=1}^m A_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^m A_k \chi(t - t_k) - I \right\}^T \nabla_{x(t_0)} \Phi(x_u(t_0), x_u(t_f)) + \\ + \left\{ \left(\sum_{k=1}^m A_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^m A_k \chi(t - t_k) \right\}^T \times \nabla_{x(t_f)} \Phi(x_u(t_0), x_u(t_f)) - \\ - \int_{t_0}^t [\nabla_x F(\tau, x_u(\tau), u(\tau)) + \Psi_u(\tau) \nabla_x f(\tau, x_u(\tau), u(\tau))] d\tau + \\ + \left\{ \left(\sum_{k=1}^m A_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^m A_k \chi(t - t_k) \right\}^T \int_{t_0}^{t_f} [\nabla_x F(t, x_u(t), u(t)) + \Psi_u(t) \nabla_x f(t, x_u(t), u(t))] dt \quad (7)$$

$$\chi(t - t_k) = \begin{cases} 0, & t \geq t_k, \\ 1, & t < t_k, \end{cases}$$

$$\Delta_u f(t, x_u(t), v(t), u(t)) = f(t, x_u(t), v(t)) - f(t, x_u(t), u(t));$$

$$\Delta_u F(t, x_u(t), v(t), u(t)) = F(t, x_u(t), v(t)) - F(t, x_u(t), u(t));$$

$x_u(t)$ - решение краевой задачи (1), (2) соответствующее допустимому управлению $u(t)$, T - означает транспонирование.

Доказательство: Пусть $u \in D$ и $v \in D$ - два допустимых управления.

Тогда

$$\begin{aligned}
J(v) - J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x_v(t), v(t)) - F(t, x_u(t), u(t))] dt + \Phi(x_v(t_f)) - \Phi(x_u(t_0), x_u(t_f)) dt = \\
&= \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [E_F(t, x_v(t), x_u(t), v(t), u(t)) + \Delta_u F(t, x_u(t), v(t), u(t))] dt + E_\Phi(x_v(t_0), x_v(t_f), x_u(t_0), x_u(t_f)) \right\} + \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \langle \nabla_x F(t, x_u(t), u(t)), x_v(t) - x_u(t) \rangle dt + \langle \nabla_x \Phi(x_u(t_0), x_u(t_f)), x_v(t_0) - x_u(t_0) \rangle + \\
&+ \langle \nabla_y \Phi(x_u(t_0), x_u(t_f)), x_v(t_f) - x_u(t_f) \rangle. \tag{8}
\end{aligned}$$

Так как $u(t)$ и $v(t)$ допустимые управления, то имеет место

$$\begin{aligned}
\dot{x}_v(t) - \dot{x}_u(t) &= f(t, x_v(t), v(t)) - f(t, x_u(t), u(t)), \text{ n.b. } t \in [t_0, t_f] \\
\sum_{k=1}^m A_k [x_v(t_k) - x_u(t_k)] &= 0 \tag{9}
\end{aligned}$$

Теперь, умножая равенство (9) скалярно на некоторую функцию $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, интегрируя по t на $[t_0, t_f]$ и слагая почленно с равенством (8), для приращения функционала $J(u)$ получим

$$\begin{aligned}
J(v) - J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} [E_F(t, x_v(t), x_u(t), v(t), u(t)) + \langle \Psi_u(t), E_f(t, x_u(t), v(t), u(t)) \rangle] dt + \\
&+ E_\Phi(x_v(t_0), x_v(t_f), x_u(t_0), x_u(t_f)) + \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} [\Delta_u F(t, x_u(t), v(t), u(t)) + \langle \Psi_u(t), \Delta_u f(t, x_u(t), v(t), u(t)) \rangle] dt,
\end{aligned}$$

где $\Psi_u(t)$ - решение системы (7). Замечая теперь, что

$$J(v) - J(u) = E(v, u) + \int_{t_f}^{t_u} [\langle \Psi_u(t), \Delta_u f(t, x_u(t), v(t), u(t)) \rangle + \Delta_u F(t, x_u(t), v(t), u(t))] dt$$

и учитывая неравенства (5), (6) получаем окончательно $J(v) - J(u) \geq -\delta$

для всех $v \in D$, откуда и следует (4). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

Теорема 2. Для того чтобы последовательность управлений $u_i \in D, i=1,2,\dots$ была минимизирующей, т.е.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J(u_i) = \inf_{v \in D} J(v) > -\infty$$

достаточно существование последовательности чисел $\delta_i, i=1,2,\dots, \delta_i \geq 0, \delta_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$, и множеств $T_i \subset T = [t_0, t_f], i=1,2,\dots, \text{meas} T_i \rightarrow \text{meas} T, i \rightarrow \infty$, таких, что при всех $v \in D$ выполняются неравенства $\langle \Psi_{u_i}(t), f(t, x_{u_i}(t), u_i(t)) \rangle + F(t, x_{u_i}(t), u_i(t)) \leq \inf_{u \in v} \langle \Psi_u(t), f(t, x_u(t), u) \rangle + F(t, x_u(t), u) + \delta_i$ при почти всех $t \in T_i, i=1,2,\dots$ и неравенство

$$\int_{T_i} \left[E_f(t, x_v(t), x_u(t), v(t), u(t)) + \langle \Psi_u(t), E_f(t, x_u(t), v(t), u(t)) \rangle \right] dt + E_\Phi(x_v(t_0), x_v(t_f), x_u(t_0), x_u(t_f)) \geq -\delta_i$$

3. Пример. Дана система

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + \cos \pi u(t),$$

$$\dot{x}_2 = cx_2 + \sin \pi u(t),$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(1) = 0, \quad U = [-1, 1], \quad a, b, c \in R^1.$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt.$$

Сопряженное уравнение в данном случае имеет следующий вид:

$$\Psi_1(t) = a \int_t^1 \Psi_1(\tau) d\tau + 2 \int_t^1 x_1(\tau) d\tau,$$

$$\Psi_2(t) = -b \int_0^t \Psi_1(\tau) d\tau - c \int_0^t \Psi_2(\tau) d\tau - 2 \int_0^t x_2(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим следующую последовательность допустимых управлений:

$$v_s(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left(\frac{i-1}{2s}, \frac{i}{2s} \right), \quad i = 1, 3, \dots, 2s-1 \\ 1 & t \in \left(\frac{i-1}{2s}, \frac{i}{2s} \right), \quad i = 2, 4, \dots, 2s \end{cases}$$

Очевидно, что по данной последовательности $\cos \pi v_i$ и $\sin \pi v_s$ слабо сходятся к нулю в $L_2[0,1]$. Отсюда следует что, $\|x\|_{C^2[0,1]} \rightarrow 0$ и $\|\Psi\|_{C^2[0,1]} \rightarrow 0$.

Так как $E_F \geq 0$ и $E_f \equiv 0$, то необходимым и достаточным условием того, чтобы данная последовательность управлений $v_s(t)$, $s = 1, 2, \dots$ была минимизирующей, является условие существования последовательности чисел δ_s , $\delta_s \geq 0$, $\delta_s \rightarrow 0$, $s \rightarrow +\infty$ и множеств $T_s \subset [t_0, t_f]$ $meas T_s \rightarrow meas T$ при $s \rightarrow +\infty$ таких, что

$$\Psi_{1v_s}(t) \cos \pi v_s(t) + \Psi_{2v_s}(t) \sin \pi v_s(t) \leq \inf_{u \in U} \{ \Psi_{1v_s}(t) \cos \pi u + \Psi_{2v_s}(t) \sin \pi u \} + \delta_s,$$

при почти всех $t \in T_s$, $s = 1, 2, \dots$, которые тривиально выполняются. Отсюда следует, что данная последовательность является минимизирующей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабе Г.Б., Каниблотский М.А., Уржумцев Ю.С. Оптимизация многослойных конструкций, подверженных периодическим температурным воздействиям. ДАН СССР. – 1983. – Т 269. -№ 2 – С. 311-314.
2. Гусев Е.Л. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993.
3. Шарифов Я.А. К теории нелинейных задач оптимального управления с неразделенными граничными условиями. Материалы научной конференции «Вопросы функционального анализа и математической физики» посвященной 80-летию Бакинского Государственного Университета им. М.А.Расулзаде. Баку, 1998, с. 452-458.
4. Сардарова Р.А., Шарифов Я.А. О необходимых условиях оптимальности для систем с многоточечными условиями. Известия Национальной Академии Наук Азербайджана. 2004, Том XXIV, №2, с.66-70.
5. Плотников В.И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функции для управляемых систем общего вида – Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1972, т.36, №3, с.652-679
6. Плотников В.И., Сумин М.И. О построении минимизирующих последовательностей. Дифференц. Ур-ния. 1983, т.19, №4, с.551-588.

**ÇOXNÖQTƏLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ İLƏ
VERİLMİŞ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ
MİNİMALLAŞDIRICI ARDICILLIĞIN QURULMASI HAQQINDA**

M.F.MEHDİYEV, R.A.SƏRDAROVA, Y.Ə.ŞƏRİFOV

ANNOTASIYA

İşdə çox nöqtəli sərhəd məsələsi ilə verilmiş optimal idarəetmə məsələsində minimallaşdırıcı ardıcılıq üçün kafi şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlərlə Pontryağının maksimum prinsipi arasında əlaqə verilmişdir. Konkret misala baxılmışdır.

**ABOUT BUILDING MINIMIZING
SEQUENCES IN THE PROBLEM OF OPTIMAL
CONTROL WITH MULTIPOINT BOUNDARY CONDITIONS**

M.F.MECHDIEV, R.A.SARDAROVA, Y.A.SHARIFOV

ABSTRACT

In this paper sufficient conditions on elements of minimizing sequences for the problem of optimal control with multipoint boundary conditions are established. A connection of this conditions with the principle of maximum of Pontryagin is investigated. The concret example is considered.