BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Х.ШАФИЕВА

Бакинский Государственный Университет

В работе исследуются вопросы существования и единственности классического решения одной несамосопряженной одномерной обратной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Рассмотрим следующую одномерную обратную задачу:

$$u_t(x,t)-a(t)u_{xx}(x,t)-bu_{txx}(x,t)+c(t)u(x,t)=F(x,t),$$

$$(x,t)\in Q_T=\{(x,t): 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\ \ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ \ 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$\beta u(1,t)+\int_0^1 u(x,t)dx=h(t)+\int_0^t æ(\tau)u(1,\tau)d\tau,\quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $b>0,\ \beta$ – постоянные, $F(x,t),a(t),\varphi(x),h(t),æ(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $c(t)$ – искомые функции, причем под классическим решением задачи (1)-(4) понимаем следующее

Определение. Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4) назовем пару $\{u(x,t),c(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $c(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функция $u(x,t)$ непрерывна в Q_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

б) функция $c(t)$ непрерывна и положительна на $[0,T]$;

в) уравнение (1) и условия (2)-(4) выполняются в обычном смысле.

Лемма 1. Пусть выполняется условие согласования

$$\beta\varphi(1)+\int_0^1 \varphi(x)dx=h(0)$$

и $h(t)\in C^2[0,T]$. Тогда задача (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$, $c(t)$ из (1)-(3) и

$$h'(t)+æ(t)u(1,t)-a(t)\beta u_{xx}(1,t)-b\beta u_{txx}(1,t)+$$
$$+c(t)\left(h(t)+\int_0^t æ(\tau)u(1,\tau)d\tau\right)=g(t),\quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

где

$$g(t)=\beta F(1,t)+\int_0^1 F(x,t)dx. \tag{6}$$

Из [1] известно, что последовательности функций

$$X_0(x)=x,\ X_{2k-1}(x)=x\cos\lambda_k x,\quad X_{2k}(x)=\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k=2\pi k, \tag{7}$$

$$Y_0(x)=2,\ Y_{2k-1}(x)=4\cos\lambda_k x,\ Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin\lambda_k x \tag{8}$$

образуют в $L_2(0,1)$ биортогональную систему и система (7) образует базис в $L_2(0,1)$. Тогда произвольная функция $\psi(x)\in L_2(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд:

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x),$$

где

$$\psi_k=\int_0^1\psi(x)Y_k(x)dx\quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Кроме того, для любой функции $\psi(x)\in L_2(0,1)$ справедлива оценка

$$\frac{3}{4}\|\psi(x)\|^2_{L_2(0,1)}\le\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k^2\le 16\|\psi(x)\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{9}$$

В работе [2], при предположениях

$$\psi(x)\in C^{i-1}[0,1],\quad \psi^{(i)}(x)\in L_2(0,1)$$

$$\psi^{(2s)}(0)=0\ \left(s=\overline{0,\left[\frac{i-1}{2}\right]}\right),\ \ \psi^{(2s-1)}(0)=\psi^{(2s-1)}(1)\quad \left(i=\overline{1,\left[\frac{i}{2}\right]}\right)$$

устанавливается справедливость оценок:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(k^i\psi_{2k-1})^2\le\frac{8}{(2\pi)^{2i}}\|\psi^{(i)}(x)\|^2_{L_2(0,1)},\\ &\sum_{k=1}^{\infty}(k^i\psi_{2k})^2\le\frac{8}{(2\pi)^{2i}}\|\psi^{(i)}(x)(1-x)-i\psi^{(i-1)}(x)\|_{L_2(0,1)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Так как система (7) образует базис в $L_2(0,1)$, а системы (7) и (8) образуют биортогональную систему функций, то первую компоненту $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),c(t)\}$ задачи (1)-(4) можно искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{11}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,2,\ldots) \tag{12}$$

являются решением следующей задачи:

$$u_0'(t)+c(t)u_0(t)=F_0(t), \tag{13}$$

$$(1+b\lambda_k^2)u_{2k-1}'(t)+(a(t)\lambda_k^2+c(t))u_{2k-1}(t)=F_{2k-1}(t), \quad k=1,2,\ldots, \tag{14}$$

$$(1+b\lambda_k^2)u_{2k}'(t)+(a(t)\lambda_k^2+c(t))u_{2k}(t)=F_{2k}(t)-2\lambda_k(bu_{2k-1}'(t)+$$
$$+a(t)u_{2k-1}(t)), \quad k=1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$u_k(0)=\varphi_k, \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{16}$$

причем

$$\varphi_k=\int_0^1 \varphi(x)Y_k(x)dx, \quad F_k(t)=\int_0^1 F(x,t)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Отсюда, получаем:

$$u_0(t)=\varphi_0 e^{-\int_0^t c(s)ds}+\int_0^t F_0(\tau)e^{-\int_\tau^t c(s)ds}d\tau, \tag{17}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^t \frac{F_{2k-1}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau, \quad (k=1,2,\ldots) \tag{18}$$

$$u_{2k}(t)=\varphi_{2k}\cdot e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^t \frac{F_{2k}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau-$$

$$-2\lambda_k\varphi_{2k-1}\cdot\int_0^t \frac{a(\tau)-bc(\tau)}{(1+b\lambda_k^2)^2}\cdot e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau-$$

$$-\frac{2\lambda_k}{(1+b\lambda_k^2)^2}\int_0^t\left[a(\tau)-bc(\tau)\int_0^\tau \frac{F_{2k-1}(\xi)}{1+b\lambda_k^2}\cdot e^{-\int_\xi^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\xi\right]d\tau-$$

$$-\frac{2b\lambda_k}{1+b\lambda_k^2}\int_0^t \frac{F_{2k-1}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}\cdot e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau \quad (k=1,2,\ldots). \tag{19}$$

Подставив выражения $u_0(t), u_{2k-1}(t), u_{2k}(t)$ соответственно из (17), (18), (19) в (11) находим первую компоненту решения $\{u(x,t),c(t)\}$ в виде ряда:

$$u(x,t)=\left(\varphi_0 e^{-\int_0^t c(s)ds}+\int_0^t F_0(\tau)e^{-\int_\tau^t c(s)ds}d\tau\right)X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^t \frac{F_{2k-1}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau\right)X_{2k-1}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k}e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^t \frac{F_{2k}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau-\right.$$

$$-2\lambda_k\varphi_{2k-1}\int_0^t \frac{a(\tau)-bc(\tau)}{(1+b\lambda_k^2)^2}\cdot e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau-$$

$$-\frac{2\lambda_k}{(1+b\lambda_k^2)^2}\int_0^t\left[a(\tau)-bc(\tau)\int_0^\tau \frac{F_{2k-1}(\xi)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\xi^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\xi\right]d\tau-$$

$$\left.-\frac{2b\lambda_k}{1+b\lambda_k^2}\int_0^t \frac{F_{2k-1}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau\right)X_{2k}(x). \qquad (20)$$

Теперь выберем $c(t)$ таким образом, чтобы удовлетворялось и дополнительное условие (5).

Учитывая (7), получим

$$u(1,t)=u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(t),$$

$$u_{xx}(1,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 u_{2k-1}(t),$$

следовательно,

$$h'(t)+æ(t)\left(u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(t)\right)+a(t)\beta\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 u_{2k-1}(t)+$$

$$+b\beta\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 u'_{2k-1}(t)+c(t)\left(h(t)+\int_0^t æ(\tau)\left(u_0(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(\tau)\right)d\tau\right)=g(t). \qquad (21)$$

Из (14), имеем:

$$u'_{2k-1}(t)=\frac{F_{2k-1}}{1+b\lambda_k^2}-\frac{a(t)\lambda_k^2+c(t)}{1+b\lambda_k^2}u_{2k-1}(t). \qquad (22)$$

Подставив (22) в (21), находим:

$$h'(t)+\text{æ}(t)\left(u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(t)\right)+a(t)\beta\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2u_{2k-1}(t)+$$

$$+b\beta\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(\frac{F_{2k-1}(t)}{1+b\lambda_k^2}-\frac{a(t)\lambda_k^2+c(t)}{1+b\lambda_k^2}u_{2k-1}(t)\right)+$$

$$+c(t)\left(h(t)+\int_0^t\text{æ}(\tau)\left(u_0(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(\tau)\right)d\tau\right)=g(t)$$

или

$$h'(t)+\text{æ}(t)u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\text{æ}(t)+\frac{\beta\lambda_k^2a(t)}{1+b\lambda_k^2}\right)u_{2k-1}(t)+b\beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}F_{2k-1}(t)+$$

$$+c(t)\left[h(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b\beta\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}u_{2k-1}(t)+\int_0^t\text{æ}(\tau)\left(u_0(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(\tau)\right)d\tau\right]=g(t).$$

Поэтому

$$c(t)=\left\{g(t)-h'(t)-\text{æ}(t)u_0(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\text{æ}(t)+\frac{\beta\lambda_k^2a(t)}{1+b\lambda_k^2}\right)u_{2k-1}(t)-\right.$$

$$\left.-b\beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}F_{2k-1}(t)\right\}\left\{h(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b\beta\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}u_{2k-1}(t)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\text{æ}(\tau)\left(u_0(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(\tau)\right)d\tau\right\}^{-1}. \qquad (23)$$

Далее, подставив выражения (17), (18) в (23), для определения второй компоненты решения задачи (1)-(4), получаем следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$c(t)=\left\{g(t)-h'(t)-b\beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}F_{2k-1}(t)-\text{æ}(t)\left(\varphi_0e^{-\int_0^t c(s)ds}+\int_0^t F_0(\tau)e^{-\int_\tau^t c(s)ds}d\tau\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\text{æ}(t)+\frac{\beta\lambda_k^2a(t)}{1+b\lambda_k^2}\right)\left(\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^t\frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^t\frac{F_{2k-1}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t\frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{h(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b\beta\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}\left(\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^t\frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^t\frac{F_{2k-1}(\tau)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\tau^t\frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\tau\right)+\right.$$

$$+\int_0^t æ(\tau)\left[\varphi_0 e^{-\int_0^\tau c(s)ds}+\int_0^\tau F_0(\xi)e^{-\int_\xi^\tau c(s)ds}d\xi+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^\tau \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}+\int_0^\tau \frac{F_{2k-1}(\xi)}{1+b\lambda_k^2}e^{-\int_\xi^\tau \frac{a(s)\lambda_k^2+c(s)}{1+b\lambda_k^2}ds}d\xi\right)\right]d\tau\right\}^{-1}. \qquad (24)$$

Итак, решение задачи (1)-(4) сводится к решению системы (20), (24) при некоторых достаточных условиях, налагаемых на данные задачи, которые будут сформулированы ниже.

Решив уравнение (24) и подставив его решение в правую часть (20), получим явное выражение для первой компоненты решения $\{u(x,t),c(t)\}$ задач (1)-(4) и, тем самым, окончательно решим задачу (1)-(4).

Имеет место следующая

Лемма 2. Пусть $\{u(x,t),c(t)\}$ – любое классическое решение задачи (1)-(4). Тогда коэффициенты Фурье

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,2,\dots)$$

функции $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x)$ определяются формулами (17), (18), (19), а функция $c(t)$ удовлетворяет на $[0,T]$ уравнению (24).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1. $\varphi(x)\in C[0,1],\ \varphi''(x)\in L_2(0,1),\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1);$
2. $F(x,t)\in L_2(Q_T)$;
3. $a(t)\in C[0,T],\ a(t)>0;\ h(t)\in C^1[0,T],\ h(t)\ge 1;$
   $æ(t)>0,\ æ(t)\in C[0,T];\ b>0$;
4. $\beta<-\dfrac{(1+b\lambda_k^2)}{\lambda_k^2}\dfrac{æ(t)}{a(t)}, \quad t\in[0,T]$;
5. $g(t)-h'(t)-æ(t)\left(\varphi_0+\int_0^t F_0(\tau)d\tau\right)>0,\ t\in[0,T]$;
6. $\varphi_0>0,\ \varphi_{2k-1}>0$;
   $F_0(t)>0,\ F_{2k-1}(t)>0,\ t\in[0,T]$;

Тогда уравнение (24) имеет в $C[0,T]$ единственное положительное решение.

Далее, доказывается, что при некотором усилении условий теоремы 1 функция $u(x,t)$, определенная формулой (20), представляет собой первую компоненту классического решения задачи (1)-(4), а пара

$\{u(x,t), c(t)\}$ является единственным классическим решением задачи (1)-(4). А именно имеем

Теорема 2. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^2[0,1],\ \varphi'''(x) \in L_2(0,1)$ и $\varphi(0) = \varphi''(0) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(1)$;
2. $F(x,t) \in C(Q_T),\ \dfrac{\partial F(x,t)}{\partial x} \in L_2(Q_T)$;
3. $\beta\varphi(1) + \int_0^1 \varphi(x)dx = h(0)$;
4. Выполняются условия 3-6 теоремы 1.

Тогда задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение $\{u(x,t), c(t)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием – ДУ, 1977, т.13, №2, с.294-304.
2. Намазов Г.К., Мегралиев Я.Т. Задача об определении неизвестного коэффициента и свободного члена дифференциального уравнения с частными производными высокого порядка. Вестник Бакинского Университета, 2003, №1, с.44-56.
3. Шафиева Г.Х. Обратная задача об определении неизвестного коэффициента и правой части псевдопараболического уравнения при несамосопряженных краевых и нелокальных дополнительных условиях. Тезисы научной конференции, посвященной 70-летию члена-корреспондента НАНА, заслуженного деятеля науки, доктора физико-математических наук, профессора Арифа Алигейдар оглы Бабаева.

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB PSEVDOPARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN BİRÖLÇÜLÜ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN KLASSİK HƏLLİNİN TƏDQİQİ

G.X.ŞƏFİYEVA

ANNOTASİYA

İşdə üçüncü tərtib psevdoparabolik tənliklər üçün bir öz-özünə qoşma olmayan birölçülü tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi tədqiq edilir.

INVESTIGATION OF THE CLASSIC SOLUTION OF A NONSELF-ADJOINT ONE DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

G.Kh.SHAFIEVA

ABSTRACT

In this work the questions of the existence and uniqueness of the classic solution of a nonself-adjoint one dimensional inverse boundary value problem for pseudoparabolic equation of the third order are investigated.