BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2005*

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

С.Н.МУРАДАЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет

В работе исследуется вопрос о сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных элементов полиномиального пучка

$$T(\lambda) = I - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^{\alpha k} A_k T^{(1-\alpha)k} - \lambda^n T^n , \qquad (1)$$

действующего в гильбертовом пространстве H *. Здесь* $0 < \alpha < 1$*,* λ *– комплексный параметр,* A_k *– ограниченные операторы и* T *– спектральный компактный оператор в некоторой положительной степени.*

Пучок вида (1) впервые был изучен Дж.Э.Аллахвердиевым [1], где T является компактным нормальным оператором. В дальнейшем условия на оператор T были ослаблены в работах [2] и [3].

В настоящей работе невозмущенный оператор T выбирается из более широкого класса операторов. Приведем некоторые факты и предложения, которые будут использованы нами в дальнейшем.

Лемма. Пусть оператор T действует в гильбертовом пространстве H , T^m является компактным спектральным оператором при некотором m и начиная с некоторого номера j_0 точки λ_j $(j = j_0, j_{0+1}, \ldots)$ из спектра оператора T являются простыми полюсами резольвенты этого оператора. Кроме того, пусть P_j $(j = 1,2,\ldots)$ – соответствующий собственный проектор оператора T^m . Тогда для любого k $(k=1,2,\ldots,m-1)$ оператор T^k в пространстве $\bigcup\limits_{j=j_0}^{\infty} P_j(H)$ представим в виде

$$T^k = \sum_{j=j_0}^{\infty} \lambda_j^k \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k E_{ji} \right) P_j ,$$

где $\alpha_i^m = 1$, $E_{ji} E_{jl} = \delta_{il} E_{ji}$, $P_j = \sum_{i=1}^{m} E_{ji}$.

Доказательство. По условию теоремы оператор T^m является компактным спектральным оператором. Обозначим

$$T^m = S_m + N_m,$$

где S_m – спектральная, а N_m – квазинильпотантная части оператора T^m. Из свойства на резольвенты оператора T следует, что

$$T^m = S_m$$

на подпространстве $\bigcup_{j=j_0}^{\infty} P_j(H)$.

В дальнейшем применяя доказательства леммы 1 из [2] получаем утверждение настоящей леммы.

Пусть $F(T)$ – класс скалярнозначных функций, аналитических на спектре $\sigma(T)$ оператора T. Тогда с помощью вышеуказанной леммы легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть оператор T удовлетворяет условия вышеуказанной леммы. Тогда для оператора T верно соотношение

$$f(T^k) = \sum_{j=j_0}^{\infty} f(\lambda_j^k) \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k E_{ji} \right) P_j,$$

где $f \in F(T)$, $k = 1,2,\ldots,m-1$, $\alpha_i^m = 1$, а E_{ji} и P_j – проекторы из вышеуказанной леммы.

Определение 1 ([4], стр. 380). Оператор A называется дискретным, если в его резольвентном множестве найдется такая точка λ, что резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ компактна.

Дискретный оператор A обладает следующими важными свойствами ([4], стр. 380):

1) его спектр есть счетное множество, не имеющее конечных предельных точек;
2) резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ компактна для всех $\lambda \notin \sigma(A)$;
3) любая точка $\lambda_0 \in \sigma(A)$ является полюсом конечного порядка резольвенты оператора A и подпространство, порожденное системой собственных и присоединенных элементов соответствующей точке $\lambda_0 \in \sigma(A)$, конечномерно.

Основным является следующая

Теорема 2. Пусть T^α, T^n и $T^{\alpha\beta}$ являются компактными спектральными операторами и $\beta > 0$. Предположим, что все, за исключением быть может конечного числа, точки λ_t $(t = 1,2,\ldots)$ из спектра T являются простыми полюсами резольвенты этого оператора. Кроме того, пусть $\overline{T(H)} = \mathrm{H}$, $(I - A_0)^{-1}$ существует и ограничен, и характеристические числа λ_t^{-1} оператора T занумерованы в порядке неубывания модулей, лежат на лучах γ_s $(s = 0,1,\ldots,s_0)$, выходящих из начала координат.

Предположим, что операторы $T^{-\beta}A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ ограничены и выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

1) $\varliminf\limits_{r\to\infty} n(r,T)/r^{\beta} = 0$,

где $n(r,T)$ – число характеристических числа μ_t оператора T содержащихся в круге $|\lambda| \le r$;

2) $\varliminf\limits_{t\to\infty} t\,|\mu_t|^{-\beta} = 0$;

3) $\varlimsup\limits_{t\to\infty}(|\mu_{t+1}| - |\mu_t|)\cdot|x_t|^{\beta-1} = \infty$,

где $x_t = \mu_{t+1}$, если $\beta \le 1$; $x_t = \mu_t$, если $\beta > 1$.

При компактности операторов $T^{-\beta}A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

1′) $\varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r,T)}{r^{\beta}} < \infty$;

2′) $\varliminf\limits_{t\to\infty} t\cdot|\mu_t|^{-\beta} < \infty$;

3′) $\varlimsup\limits_{t\to\infty}(|\mu_{t+1}| - |\mu_t|)\cdot|x_t|^{\beta-1} > 0$,

где x_t и β определяются как и в 3).

Тогда верны следующие утверждения:

а) система собственных и присоединенных элементов пучка $T(\lambda)$, соответствующая характеристическим числам из областей

$$G(r,s,\varphi,\psi) = \{\lambda : |\lambda| \ge r; \alpha_s - \varphi \le \arg\lambda \le \alpha_s + \psi\},$$

$$\varphi,\psi < \frac{\varepsilon}{2},\ \arg\gamma_s = \alpha_s\ (s = 0,1,\ldots,s_0),$$

почти полная и образует базис Рисса со скобками в своей линейной оболочке подпространств H_s.

б) для достаточно больших r подпространства H_s и подпространство, порожденное собственными элементами, соответствующими характеристическим числам μ_t^n, $|\mu_t| < r$, $\arg\mu_t = \alpha_s$, вместе образуют базис Рисса со скобками во всем пространстве H.

Доказательство. По условию теоремы T^n является компактным спектральным оператором. Тогда из обобщенной теории Рисса-Шаудера следует, что спектр оператора T состоит из собственных значений. Характеристические числа оператора T обозначим через μ_t. Ясно, что $\mu_t = \lambda_t^{-1}$.

Пусть S_n – скалярная часть оператора T^n, $N_n = T^n - S_n$ и $E(\cdot)$ – разложение единицы оператора T^n. Тогда из известных свойств спектрального оператора ([4]), XVIII.2.27, леммы XVIII.2.13 и XVIII.2.25) следует, что операторы S_n и T^n имеют одинаковый спектр.

Ясно, что $T^n\big/_{E(\lambda)H} = \lambda I\big/_{E(\lambda)H}$ и $T^n\big/_{E(\lambda)H} = S\big/_{E(\lambda)H}$, если λ – простой полюс резольвенты оператора T^n. Пусть σ_0 – конечное множество тех точек λ из $\sigma(T)$ для которых λ не является простым полюсом резольвенты оператора T, и $\sigma_0' = \sigma(T) \setminus \sigma_0$. Кроме того $T^n = S_n$ вне $E(\sigma_0)H$.

Этот факт доказывается с помощью метода Н.Данфорда, указанной в ([4], стр. 444). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $T^n = S_n$ в подпространстве $E(\sigma_0')H$.

Теперь для завершения доказательства настоящей теоремы повторяем доказательство теоремы указанной в работе ([3], стр. 3) при $\lambda \in \sigma_0'$. Этим теорема доказана.

Пусть некоторая положительная степень оператора G является дискретным оператором. Кроме того, пусть A_k $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ – пока лишь ограниченные операторы.

Рассмотрим следующий неограниченный пучок

$$G(\lambda) = G^n - A_0 G^n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k G^{\alpha(n-k)} A_k G^{(1-\alpha)(n-k)} - \lambda^n I . \qquad (2)$$

G^{-1} обозначим через T.

Ясно, что оператор $G^{\alpha(n-k)} A_k G^{(1-\alpha)(n-k)}$ можно представить следующим образом:

$$G^{\alpha(n-k)} A_k G^{(1-\alpha)(n-k)} = G^{\alpha n} \cdot G^{-\alpha k} A_k \cdot G^{(1-\alpha)n} \cdot G^{-(1-\alpha)k} =$$
$$= G^{\alpha n} T^{\alpha k} A_k G^{(1-\alpha)n} T^{(1-\alpha)k}.$$

Итак,

$$G^{\alpha(n-k)} A_k G^{(1-\alpha)(n-k)} = G^{\alpha n} T^{\alpha k} A_k G^{(1-\alpha)n} T^{(1-\alpha)k} .$$

Теперь на оператор $G^{\alpha n} T^{\alpha n} A_k T^{(1-\alpha)k} G^{(1-\alpha)n}$ подействуем оператором $G^{-\alpha n}$

слева, оператором $G^{-(1-\alpha)n}$ справа. Тогда получим оператор $T^{\alpha k} A_k T^{(1-\alpha)k}$.

Таким образом, мы показали, что $G^{-(\alpha n)} G(\lambda) G^{-(1-\alpha)n} = T_1(\lambda)$, где

$$T_1(\lambda) = I - T^{\alpha n} A_0 T^{(1-\alpha)n} - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k T^{\alpha k} A_k T^{(1-\alpha)k} - \lambda^n T^n . \qquad (3)$$

Верна следующая

Теорема 3. Пусть G^{α}, G^{n} и $G^{\alpha\beta}$ являются дискретными спектральными операторами и $\beta > 0$.

Предположим, что все, за исключением быть может, конечного числа, точки $\lambda_t \; (t = 1,2,\ldots)$ из спектра оператора G являются простыми полюсами резольвенты этого оператора. Кроме того, пусть $(I - G^{-\alpha n} A_0 G^{-(1-\alpha)n})^{-1}$ существует и ограничен, и собственные значения λ_t оператора G занумерованы в порядке неубывания модулей, лежат на лучах $\gamma_s \; (s = 0,1,\ldots,s_0)$, выходящих из начала координат. Предположим, что операторы $G^{\beta} \; A_k \; (k = 1,2,\ldots,n-1)$ ограничены и выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

1) $\varliminf\limits_{r\to\infty} n(r,G)/r^{\beta} = 0$,

   где $n(r,G) \; (0 < r < \infty)$ – число собственных значений λ_t оператора *G*, содержащихся в круге $|\lambda| \le r$;

2) $\varliminf\limits_{t\to\infty} t\,|\mu_t|^{-\beta} = 0$;

3) $\varlimsup\limits_{t\to\infty} (|\mu_{t+1}| - |\mu_t|) \cdot |x_t|^{\beta-1} = \infty$,

   где $x_t = \lambda_{t+1}$, если $\beta \le 1$; $x_t = \lambda_t$, если $\beta > 1$.

При компактности операторов $G^{\beta} A_k \; (k = 1,2,\ldots,n-1)$ выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

1′) $\varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r,G)}{r^{\beta}} < \infty$;

2′) $\varliminf\limits_{t\to\infty} t \cdot |\lambda_t|^{-\beta} < \infty$;

3′) $\varlimsup\limits_{t\to\infty} (|\lambda_{t+1}| - |\lambda_t|) \cdot |x_t|^{\beta-1} > 0$, где x_t и β определяются как и в 3).

Тогда верны следующие утверждения:

а) система собственных и присоединенных элементов пучка $G(\lambda)$, соответствующая собственным значениям из области

$$\{z : |z| \ge r;\ \alpha_s - \varphi \le \arg z \le \alpha_s + \psi\},\ \varphi, \psi < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\arg \gamma_s = \alpha_s\ (s = 0,1,\ldots,s_0),$$

почти полная и образует базис Рисса со скобками в своей линейной оболочке подпространств H_s;

б) для достаточно больших r подпространства H_s и подпространство, порожденное собственными элементами, соответствующим собственным значениям λ_t^n, $|\lambda_t| < r$, $\arg \lambda_t = \alpha_s$, вместе образуют базис Рисса со скобками во всем пространстве H .

Доказательство. Нетрудно проверить, что условия налагаемые на операторы G и A_k $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ обеспечивают выполнения утверждений теоремы 2 относительно пучка $T_1(\lambda)$. Отсюда прямо следует утверждения настоящей теоремы.

В конце хочу выразить признательность своему научному руководителю проф. А.М.Ахмедову за постановку задач и помощь при получении результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж.Э.Аллахвердиев. Оценки резольвент и теоремы полноты операторов, зависящих от спектрального параметра. – Изв. АН Аз. ССР, серия физ.-тех. и мат. наук, 1964, №3, с.3-36.
2. Дж.Э.Аллахвердиев и А.М.Ахмедов. Некоторые классы обобщенных спектральных операторов и их приложения. –Мат. сборник, том 180, №5, 1989, с.603-624.
3. А.М.Ахмедов, С.Н.Мурадалиева. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных элементов операторного пучка Аллахвердиева. –Вестник Бак. Университета, №4, 2003, с.14-24.
4. Н.Данфорд и Дж.Т.Щварц. Линейные операторы (спектральные операторы). – Изд. «Мир», Москва, 1974, 661с.

BİR SİNİF ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN OPERATOR DƏSTƏLƏRİNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA ELEMENTLƏR SİSTEMİNİN BAZİSLİYİ HAQQINDA

S.N.MURADƏLİYEVA

ANNOTASİYA

Bu işdə H Hilbert fəzasında təsir edən

$$T(\lambda) = I - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^{\alpha k} A_k T^{(1-\alpha)k} - \lambda^n T^n$$

polinomial operator dəstəsinin məxsusi və qoşma elementləri sistemi üzrə çoxqat

ayrılışların yığılması tədqiq olunur. Burada $0 < \alpha < 1$, λ – kompleks parametr, A_k xətti məhdud operatorlar, T isə müəyyən müsbət dərəcəsi spektral kompakt olan operatordur.

ON A BASISITY OF THE SYSTEM OF EIGEN – AND ADJOINT ELEMENTS OF A CLASS NONSELFADJOINT OPERATOR PENCILS

S.N.MURADALIYEVA

ABSTRACT

In this work the problem of the convergence of multiple expansions in the system of eigen – and adjoint elements of polynomial pencil

$$T(\lambda) = I - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^{\alpha k} A_k T^{(1-\alpha)k} - \lambda^n T^n$$

acting in the Hilbert spase H is investigated. Here $0 < \alpha < 1$, λ – complex parameter, A_k are the linear bounded operators and T is a spektral compact operator in some positive power.