BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ
№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2005*

RİYAZİYYAT

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ И СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА I.

С.К.АБДУЛЛАЕВ, Н.Р.КАРАМАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе, в частности, для сингулярных интегралов и потенциалов, порожденных оператором обобщенного сдвига (ООС), устанавливаются весовые L_p оценки.

Для решения этой задачи применяется метод локальных оценок.

Отметим, что для сингулярных интегральных операторов и потенциалов Рисса, порожденных ООС, ассоцированных с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, по настоящему времени, L_p весовые оценки были известны только для весов $\omega(|x|)$.

Операторы типа свертки, порожденные ООС, ассоцированных дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя

Пусть R_k - евклидово пространство размерности k ($k \geq 2$),

$$R_k^+ = \{(x_1,...,x_k) \in R^k : x_k > 0\},\ S_k^+ = \{x \in R_k^+ : |x| = 1\}.$$

T^y - оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа-Бесселя ([7])

$$\Delta_B = \Delta_B(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{2\nu}{x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}, \quad (\nu > 0),$$

действует по закону

$$T^s u(x) = C_\nu \int_0^\pi u\left(x' - s', \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cos\alpha + s_m^2}\right) \sin\alpha d\alpha, \tag{1}$$

где

$$x = (x', x_m),\ s = (s', s_m),\ x', s' \in R_{m-1}, C_\nu = \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu).$$

Сингулярный интеграл (СИ)

$$Au(x) = V.p.\int\limits_{R_m^+} \frac{f(\theta)}{|s|^{m+2\nu}}\left[T^s u(x)\right] s_m^{2\nu} ds = \lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon u(x), \qquad (2)$$

где

$$A_\varepsilon u(x) = \int\limits_{\{s\in R_m^+ : |s|>\varepsilon\}} \frac{f(\theta)}{|s|^{m+2\nu}}\left[T^s u(x)\right] s_m^{2\nu} ds,\ \theta = s/|s|,\ \varepsilon > 0,$$

называется сингулярным интегралом, порожденным ООС T^s ([7]), а $f(\theta)$ называется характеристикой сингулярного интеграла (2).

О действии оператора А в пространстве

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(R_m^+) = \left\{ u : \|u\|_{L_{p,\nu}} = \left[\int\limits_{R_m^+} |u(x)|^p x_m^{2\nu} dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},\ 1 \le p < \infty,\ \nu > 0,$$

известна следующая

Теорема S ([8]). Пусть характеристика $f(\theta)$ сингулярного интеграла (2) удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{S_m^+} f(\theta)\cdot\theta_m^{2\nu} d\sigma(\theta) = 0 \text{ и } \left(\int\limits_{S_m^+} |f(\theta)|^q \theta_m^{2\nu} d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{q}} \equiv R_q < \infty$$

для некоторого q>0.

Тогда

$$\|Au\|_{L_{p,\nu}(R_m^+)} \le CR_q \|u\|_{L_{p,\nu}(R_n^+)},\ 1 < p < \infty.$$

Потенциал Рисса $(-\Delta_B)^{-\alpha}$, порождённый обобщенным сдвигом, ассоциированным дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, реализуется как интегральный оператор со слабой особенностью (обозначим его через I_B^α).

Доказывается, что ([5]) при $0 < \alpha < m + 2\nu$ в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$(-\Delta_B)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi = I_B^\alpha \varphi \overset{df}{=} C_\alpha(m,\nu)\int\limits_{R_m^+} \varphi(y) T^y\left(|x|^{-n-2\nu+\alpha}\right) y_n^{2\nu} dy,$$

где

$$C_\alpha(m,\nu) = 2^{1-\alpha}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{m+2\nu-\alpha}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}.$$

В дальнейшем, постоянные C, с различными индексами, обозначают действительное число, зависящее от этих индексов, точное значение которого нам безразлично.

Теорема P ([5]). При $1 < p < q < \infty$ неравенство

$$\left\| I_B^{\alpha} u \right\|_{q,\nu} \le C_{\alpha} \left\| u \right\|_{p,\nu} \quad \forall u \in L_{p,\nu}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\alpha = (m + 2\nu)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right).$$

Следуя ([2]) определим класс $K_{\nu}(p,q), \nu > 0, 1 < p \le q < \infty$.

По определению, при $1 < p < q < \infty$ $K_{\nu}(p,q)$ есть совокупность интегральных операторов вида

$$(Au)(x) \overset{df}{=} \int_{R_m^+} K(s) T^s u(x) s_m^{2\nu} ds, \qquad \text{(A)}$$

где

$$\left| K(s) \right| \le C_k \left| s \right|^{-(m+2\nu-\alpha)}, \; s \ne 0, \; \alpha = (m + 2\nu)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right),$$

ограниченно действующих из $L_{p,\nu}$ в $L_{q,\nu}$.

При $1 < p = q < \infty$ $K_{\nu}(p,q)$ определим как совокупность ограниченных в $L_{p,\nu}(R_m^+)$ операторов вида (A), таких, что

$$\left| K(s) \right| \le C_k \left| s \right|^{-(m+2\nu)}.$$

Очевидно что, $K(p,q)$ при $p \ne q$ содержит потенциалы Рисса - $\mathrm{I}_{\mathrm{B}}^{\alpha}$, а $K(p,p)$ - сингулярные операторы вида (2).

Оценки в терминах характеристик локально суммируемых функций

Всюду в дальнейшем $A_{p,\nu}(x_k), k = 1,2,...,m$, - совокупность измеримых функций, суммируемых в p-й степени с весом $x_m^{2\nu}$ на множестве $\{ x \in R_m^+ : \left| x_k \right| \ge \xi \}$ при любом $\xi > 0$.

Для функции $u \in A_{p,\nu}(x_k)$ введём характеристику

$$\Omega_{p,k}(u,\xi) = \left\{ \int_{\{R_m^+ : |x_n| \ge \xi\}} \left| u(x) \right|^p x_m^{2\nu} dx \right\}^{1/p}, \; \xi > 0, \; k = \overline{1,m}.$$

$\Omega_{p,k}(u,\xi)$ неотрицательна, не возрастает. Она неограничена, если $u \in A_{p,\nu}(x_k) \setminus L_{p,\nu}(R_m^+)$.

Для каждого $k = 1,2,...,m$ R_m^+ разобьём в прямую сумму пространств $R_{m-1,k}$, $R_{1,k}$, где

$$R_{1,k} = \begin{cases} (-\infty,\infty) & \text{если } k \neq m, \\ (0,+\infty) & \text{если } k = m, \end{cases}$$

а $R_{m-1,k}$ ортогональное дополнение $R_{1,k}$ в R_m^+.

Точки пространств $R_{m-1,k}$ *и* $R_{1,k}$ обозначим, соответственно, через $\hat{y}_k$ и y_k, так, что $y = \uparrow(\hat{y}_k, y_k)$.

Для простоты изложения, будем пользоваться записью

$$u(y_1,...,y_m) = u(\hat{y}_k, y_k), \; d\mu(y) = y_m^{2\nu} dy_1...dy_m.$$

Если обозначить

$$d\mu(y_i) = dy_i, \; i = \overline{1,m-1}, \; d\mu(y_m) = y_m^{2\nu} dy_m,$$

то

$$d\mu(y) = d\mu(\hat{y}_k) \cdot d\mu(y_k).$$

Всюду в дальнейшем $\chi_E(t)$ - характеристическая функция множества $E \subset R$.

Обозначим $u_{\xi,k}(y) = \chi_{[0,\xi]}(|y_k|)|u(y)|$,

$$\overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k) = \left\{ \int_{R_{m-1,k}} u^p_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k) d\mu(\hat{y}_k) \right\}^{\frac{1}{p}}, \; k = \overline{1,m}, \; \xi > 0.$$

Положим

$$i_{\beta,k}(u;\xi)(x) = \int_{R_m^+} \frac{u_{\xi,k}(y) d\mu(y)}{\left(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |x_k| + \xi\right)^{\beta}}, \; x \in R_m^+, \; \xi > 0.$$

Введём множество

$$J_{p,\nu}(x_k) = \left\{ u \in A_{p,\nu}(x_k) : \int_0 \Omega_{p,k}(u,t) t^{\frac{a_k+1}{p'}-1} dt < \infty \right\},$$

где

$$a_k = \begin{cases} 2\nu, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k = 1,2,...,m-1. \end{cases}$$

Пусть

$$b_k = 2\nu - a_k \,,\ k = \overline{1,m}\,.$$

Лемма 1. Пусть $u \in A_{p,\nu}(x_k),\ \beta p' > m-1$. Тогда

а) $\forall\, x \in \{ x \in R_m^+ : |y_k| \ge \xi \}$

$$i_{\beta,k}(u,\xi) \le C(|x_k| + \xi)^{\frac{m-1}{p'} - \beta} x_m^{\frac{b_k}{p'}} \int\limits_{\{R_{1,k} : |y_k| \le \xi\}} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)\, d\mu(y_k)\,;$$

б) $\left\| i_{\beta,k}(u,\xi) : L_{q,\nu}(R_m^+) \right\| \le C\xi^{-\frac{1+a_k}{p'}} \int\limits_{\{R_{1,k} : |y_k| \le \xi\}} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)\, d\mu(y_k)\,;$

с) $\left(\int\limits_{\{R_{1,k} : \eta \le |y_k| \le \xi\}} \left(\overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k) \right)^p d\mu(y_k) \right)^{\frac{1}{p}} \le C\Omega_{p,k}(u,\eta)\,.$

Лемма 2. Если $u \in J_{p,\nu}(x_k)$, то

$$\int\limits_{\{R_{1,k} : |y_k| \le \xi\}} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)\, d\mu(y_k) \le C \int\limits_0^{\xi} t^{\frac{a_k+1}{p'} - 1}\, \Omega_{p,k}(u,t)\, dt\,.$$

Докажем лемму 1. Пусть $x \in \{ x \in R_m^+ : |x_k| \ge \xi \}$.

Применив теорему Фубини и затем неравенство Гельдера, во внутреннем интеграле, с учетом неравенства

$$\left(\int\limits_{R_{m-1,k}} \frac{d\mu(\hat{y}_k)}{(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |x_k| + \xi)^{\beta p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \le C(|x_k| + \xi)^{\frac{m-1}{p'} - \beta}\ x_m^{\frac{b_k}{p'}},$$

получаем

$$i_{\beta,k}(u;\xi)(x) = \int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_{R_{m-1,k}} \frac{u_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k)\, d\mu(\hat{y}_k)}{(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |x_k| + \xi)^{\beta}} \right) d\mu(y_k) \le$$

$$\le C \int\limits_0^{\infty} \left[\int\limits_{R_{m-1,k}} \frac{d\mu(\hat{y}_k)}{(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |x_k| + \xi)^{\beta p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int\limits_{R_{m-1,k}} u^p_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k)\, d\mu(\hat{y}_k) \right]^{\frac{1}{p}} d\mu(y_k) \le$$

$$\le C x_m^{\frac{b_k}{p'}} (|x_k| + \xi)^{\frac{m-1}{p'} - \beta} \int\limits_0^{\infty} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)\, d\mu(y_k)\,.$$

Этим а) доказан.

Докажем б). Применяя теорему Фубини и затем неравенство Минковского, получаем

$$K \overset{df}{=} \left\| i_{\beta,k}(u,\xi) : L_{p,\nu}(R_m^+) \right\| = \left(\int_{R_m^+} \left(i_{\beta,k}(u,\xi) \right)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_{R_{1,k}} d\mu(x_k) \int_{R_{m-1,k}} d\mu(\hat{x}_k) \left(\int_{R_{1,k}} d\mu(y_k) \int_{R_{m-1,k}} \frac{u_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k) d\mu(\hat{y}_k)}{\left(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + x_k + \xi \right)^{\beta}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left\{ \int_{R_{1,k}} d\mu(\hat{x}_k) \left[\int_{R_{1,k}} A \, d\mu(y_k) \right]^q \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где

$$A = \left(\int_{R_{m-1,k}} \left(\int_{R_{m-1,k}} \frac{u_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k) d\mu(\hat{y}_k)}{\left(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + x_k + \xi \right)^{\beta}} \right)^q d\mu(\hat{x}_k) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применив неравенство Юнга, получаем

$$A \le (|x_k| + \xi)^{\frac{m-1+b_k}{r} - \beta} \left\{ \int_{R_{m-1}} |u_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k)| d\mu(\hat{y}_k) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где

$$r > 1, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}, \; \beta = m + 2\nu - \alpha = (m + 2\nu)\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right).$$

Тогда

$$\frac{m-1+b_k}{r} - \beta = (m - 1 + b_k - (m + 2\nu))\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) = -(1 + 2\nu - b_k)\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) < 0$$

.

Учитывая это, получаем

$$K \le C \left(\int_{R_{1,k}} |x_k| + \xi)^{\left(\frac{m-1+b_k}{r} - \beta \right) q} d\mu(x_k) \right)^{\frac{1}{q}} \int_{R_{1,k}} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k) d\mu(y_k) \le$$

$$\leq C\xi^{-\frac{1+a_k}{p'}} \int\limits_{R_{1,k}} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)d\mu(y_k)\,.$$

Этим доказан б).

Докажем с).

Действительно

$$\left(\int\limits_{\{R_{1,k}:\eta\leq y_k\leq\xi\}} \left(\overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)\right)^p d\mu(y_k)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{\{R_{1,k}:\eta\leq y_k\leq\xi\ \}} \left(\int u^p_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k)d\mu(\hat{y}_k)\right) d\mu(y_k)\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\{R_{1,k}:|y_k|\geq\eta\}} d\mu(y_k) \int\limits_{R_{m-1,k}} u^p_{\xi,k}(\hat{y}_k, y_k)d\mu(\hat{y}_k)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Omega_{p,k}(u;\eta)\,.$$

Докажем лемму 2. Положим

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{если } k\neq m, \\ 0 & \text{если } k = m; \end{cases} \qquad A_k(t) = \gamma_k \overset{o}{u}_{\xi,k}(-t) + \overset{o}{u}_{\xi,k}(t), t>0.$$

Имеем:

$$\int\limits_{\{R_{1,k}:|y_k|\leq\xi\}} \overset{o}{u}_{\xi,k}(y_k)d\mu(y_k) = \int\limits_0 \left(\gamma_k \overset{o}{u}_{\xi,k}(-t) + \overset{o}{u}_{\xi,k}(t)\right) t^{a_k} dt =$$

$$= C\int\limits_0^\xi A_{\xi,k}(t)\left(t^{a_k-1-\varepsilon}\int\limits_0^t \tau^\varepsilon d\tau\right)dt \leq C\int\limits_0^\xi \tau^\varepsilon \cdot \tau^{\frac{a_k}{p'}-1-\varepsilon+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_\tau^\xi A^p_{\xi,k}(t)t^{a_k}dt\right)^{\frac{1}{p}} d\tau \leq$$

$$\leq C\int\limits_0^\xi \tau^{\frac{a_k+1}{p'}-1} \Omega_{p,k}(u,\tau)d\tau\,.$$

Ограниченность в пространствах с весом

В дальнейших построениях важную роль играет

Лемма 3. Если $u\in J_{p,k}(R^+_m)$ и $A\in K_\nu(p,q)$, то для почти всех $x\in R^+_m$ существует $\upsilon(x) = Au(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega_{q,k}(\upsilon,\xi) \leq C\xi^{-\frac{1+a_k}{p'}} \int\limits_0^\xi \Omega_{p,k}(u,t) t^{\frac{1+a_k}{p'}-1} dt, \qquad (\Omega)$$

где $k = 1,2,...,m,\ C$ независит от u и ξ.

Доказательство. Пусть $u\in J_{p,k}(R^+_m)$ и $A\in K_\nu(p,q)$. Докажем, что $\upsilon(x)$ существует для почти всех $x\in R^+_m$.

Возьмём произвольное фиксированное $\xi \in (0,\infty)$ и представим функцию u (y) в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где $u_1(y) = \chi_{[0,\xi/2]}(|y_k|)u(y)$, $u_2(y) = u(y) - u_1(y)$ (Очевидно, тогда $u_2(x) = \chi_{[\xi/2,+\infty)}(|x_k|)u(x)$).

Тогда $u_2 \in L_{p,\nu}(R_m^+)$ и $Au_2(x)$ существует почти для всех $x \in R_m^+$. Теперь докажем, что $Au_1(x)$ сходится абсолютно для всех $x \in \{R_m^+ : |y_k| > \xi\}$.

Отметим, что если $\beta > 0$, то

$$T^y(|x|^{-\beta}) \le C|x-y|^{-\beta},$$

и кроме того, если $x \in \{R_m^+ : |x_k| < \xi\}$ и $|y_k| \le \xi/2$, то $|x_k - y_k| \ge |x_k| - |y_k| \ge C(|x_k| + \xi)$,

и потому

$$u_{\xi,k}(y)|x-y|^{-\beta} \le Cu_{\xi,k}(y)(|\hat{x}-\hat{y}| + |x_k| + \xi)^{-\beta}.$$

Учитывая это и самосопряженность оператора T^s, получаем:

$$|Au_1(x)| \le \int_{R_m^+} |T^y k(x)||u_1(y)| y_m^{2\nu} dy \le$$

$$\le C \int_{R_m^+} \frac{u_{\xi,k}(y)}{(|\hat{x}-\hat{y}| + |x_k| + \xi)^{\beta}} = Ci_{\beta,k}(u,\xi)(x).$$

Так как $R_m^+ = \bigcup_{\xi>0} \{R_m^+ : |x_k| \ge \xi\}$ и $Au(x) = Au_1(x) + Au_2(x)$, то, в силу лемм 1 и 2, из последнего следует абсолютная сходимость $Au_1(x)$ в любой точке $x \in R_m^+$ и существование $Au(x)$ для почти всех в $x \in R_m^+$.

А теперь докажем справедливость оценки (Ω).Возьмём $\xi > 0$ и переобозначим $u_1(x) = u_{1,\xi}(x), u_2(x) = u_{2,\xi}(x)$.

Имеем

$$\Omega_{q,k}(\upsilon;\xi) \le \left(\int_{\{R_m^+ : |x_k| \ge \xi\}} |Au_{1,\xi}(x)|^p x_m^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\{R_m^+ : |x_k| \ge \xi\}} |Au_{2,\xi}(x)|^p x_m^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} = i_1 + i_2$$

.

В силу условия $A \in K(p,q)$, получаем

$$i_2 \le \left(\int_{\{R_m^+ : |x_k| \ge \xi\}} |Au_{2,\xi}(x)|^p x_m^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} \le C_A \Omega_{p,k}(u,\xi/2).$$

Для i_1, используя оценку

$$\left|Au_{1,\xi}(x)\right| \le Ci_{\beta,k}(u;\xi)(x),$$

и применив лемму 1 и лемму 2, получаем

$$i_1 \le C\xi^{-\frac{1+a_k}{p'}} \int_0^{\xi} t^{\frac{1+a_k}{p'}-1} \Omega_{p,k}(u,t)dt .$$

Лемма 3 доказана.

Весовые $L_{p,\nu}$ пространства в терминах $\Omega_{p,k}(u,\xi)$ характеристики

По определению (см.[2]), функция $\alpha(t),\ 0<t<\infty$, принадлежит множеству N_1, если $\alpha \in L(0,\xi]\ \ \forall \xi>0;\ \alpha(t)\ge 0,$ причём $\alpha(t)>0$ для почти всех $t\in(0,\varepsilon)$ при котором $\varepsilon>0$.

Для $\alpha \in N_1$ введём B-пространство

$$I_{p,k}(\alpha,R_m^+) = \{u - изм.: \|u\|^p \overset{df}{=} \int_0^{\infty} \Omega_{p,k}^p(u,\xi)\alpha(\xi)d\xi\}.$$

Легко доказывается

Лемма 4. Пусть $\mu \in N_1,\ \omega(t) = \left(\int_0^{\xi}\alpha(\xi)dt\right)^{\frac{1}{p}}$. Тогда

$$I_{p,k}(\alpha,R_m^+) = L_{p,\nu}(\omega,R_m^+) \overset{df}{=} \left\{u - изм.: \|u\|^p_{L_{p,\nu}(\omega,R_m^+)} \overset{df}{=} \int_{R_m^+}\left(|u(x)|\omega(|x_k|)\right)^p x_m^{2\nu}dx_m < +\infty\right\}$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Введём множество

$$\alpha_{p,k} = \left\{\alpha \in \mathrm{N}_1 : \int_0^{\infty}\left[\alpha^{-\frac{1}{p'}}(t)t^{\left(1-\frac{a_k+1}{p'}\right)}\right]^{-p'} dt\right\} < \infty .$$

Лемма 5. Пусть $\alpha \in \alpha_{p,k}$. Тогда

$$\mathrm{I}_{p,k}(\alpha,R_m^+) \subset J_{p,k}(x_k)..$$

При доказательстве основных теорем, важную роль будет играть следующее обобщение теоремы Харди (см.[6]).

Теорема X. Пусть $1\le p\le q\le\infty$. Для того, чтобы существовала константа С, не зависящая от функции g и такая, что

$$\left(\int_0^\infty \left|\nu(t)\int_0^t g(\tau)d\tau\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty |\gamma(t)g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

необходимо и достаточно:

$$\widetilde{A} = \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty |\nu(\tau)|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t |\gamma(\tau)|^{-p'} d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty, \qquad \text{(X)}$$

где $p' = p/(p-1)$.

Применением теоремы X доказывается

Теорема 1. Пусть $A \in K_\nu(p,q),\ k = 1,2,...,m$. Если $\varphi, \psi \in N_1$ такие, что

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty \left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p'}}\psi^{\frac{1}{q}}(\xi)\right]^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t \left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p'}}\varphi^{\frac{1}{p}}(\xi)\right]^{-p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \qquad (3)$$

то оператор А действует из $I_{p,k}(\varphi, R_m^+)$ в $I_{q,k}(\psi, R_m^+)$ и ограничен.

Эту теорему, в силу леммы 4, можно сформулировать в терминах весовых $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\nu}$ пространств. Точнее, имеет место

Теорема 1′. Пусть $A \in K_\nu(p,q),\ \varphi, \psi \in N_1$ и $\omega(t) = \left(\int_0^t \varphi(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$, $\omega_1(t) = \left(\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$. Тогда оператор А действует из $L_{p,\nu}(\omega(|x_k|), R_m^+)$ в $L_{q,\nu}(\omega_1(|x_k|), R_m^+)$ и ограничен.

Пусть φ и ψ такие, что выполняется условие (4) и

$$\omega(t) = \left(\int_0^t \varphi(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \approx (t\varphi(t))^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_1(t) = \left(\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \approx (t\psi(t))^{\frac{1}{q}},$$

здесь «$\varphi(\tau) \approx \psi(t)$» означает, что существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от t, такие, что $C_1\ \psi(t) \le \varphi(t) \le C_2\psi(t)$.

Тогда $\varphi(\tau) \approx \dfrac{\omega^p(t)}{t},\ \psi(t) \approx \dfrac{\omega_1^p(t)}{t}$ и условие (3) примет вид:

$$C = \sup_{t>0}\left(\int_t^{\infty}\left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p'}}\omega_1(\xi)\right]^q \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t\left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p'}}\omega(\xi)\right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi}\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty \ . \qquad (3')$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть $A \in K_\nu(p,q),\ k = 1,2,...,m$, а ω и ω_1 - положительные возрастающие функции, удовлетворяющие условию (3′). Тогда оператор А действует из $L_{p,\nu}(\omega(|x_k|),R_m^+)$ в $L_{q,\nu}(\omega_1(|x_k|),R_m^+)$ и ограничен.

Теорема 1, Теорема 1′ и Теорема 2 в случае обычного сдвига доказаны в ([3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью. ДАН СССР, 1969, т.188, №2, с.263-265.
2. Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций. ДАН СССР, 1985, т.283.№4,стр. 777- 780.
3. Абдуллаев С.К. Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гельдера с весом. Автореферат докторской диссертации, Тбилиси, 1990.
4. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. Весовые оценки сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига. Математический сборник, 1992, т.183, №9, с.45-66.
5. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. О классах операторов типа потенциала, порожденных обобщенным сдвигом. Док.расш.засед.сем.инт.-та приклад.матем. им. И.Н.Векуа, том 3, №2, 1988.
6. Bradley J.C. Hardy inequalities with mixed/// Canad.Math.Bull.-1978, v.21, №2,стр.405-408.
7. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. Успехи матем.наук,6, №2 (1951), стр.102-143.
8. Кипрянов И.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига II. Сибирский матем.журнал, 1970, т.XI, №5, с.1061-1083.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏ OPERATORUNUN DOĞURDUĞU SİNQULYAR VƏ ZƏİF SİNQULYAR İNTEQRALLAR ÜÇÜN ÇƏKİLİ QİYMƏTLƏNDİRMƏLƏR

S.K.ABDULLAYEV, N.R.KƏRƏMƏLİYEV

ANNOTASİYA

İşdə xüsusi halda ümumiləşmiş sürüşmə ilə sinqulyar inteqrallar və potensiallar üçün çəkili L_p - qiymətləndirmələr alınmışdır.

WEIGHTED ESTIMATION OF SINGULAR AND WEAKLY SINGULAR INTEGRALS GENERATED BY GENERALIZED SHIFT OPERATOR

S.K.ABDULLAYEV, N.R.KARAMALIYEV

ABSTRACT

In this work, particularly the weighted L_p estimations for the singular integrals and potentials generated by generalized shift operator are established.