BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2005*

О РЕГУЛЯРНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л.А.РУСТАМОВА

Бакинский Государственный Университет

В работе исследуется разрешимость операторно-дифференциального уравнения второго порядка с разрывным коэффициентом в главной части. Главная часть операторно-дифференциального уравнения содержит нормальный оператор. Найдены условия регулярной разрешимости, которые выражаются только коэффициентами данного уравнения.

В сепарабельном Гильбертовом пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$-u''(t)+\rho(t)A^2u(t)+A_1u'(t)+A_2u(t)=f(t), \quad t\in R=(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где $f(t),u(t)$ - вектор-значные функции со значениями из H , $A,$ A_1 и A_2 линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, а

$$\rho(t)=\begin{cases}\alpha^2, & t<0,\\ \beta^2, & t>0,\end{cases} \tag{2}$$

причем $\alpha>0,\ \beta>0.$

Предположим, что A - нормальный обратимый оператор. Тогда его можно представить в виде $A=UC=CU$, где U - унитарный, а C - положительно определенный самосопряженный оператор. Обозначим через H_γ –шкалу Гильбертовых пространств, порожденной оператором C, т.е. $H_\gamma=D(C^\gamma),(x,y)_\gamma=(C^\gamma x,C^\gamma y),\ x,y,\in H_\gamma$. Обозначим через $L_2(R;H)$ Гильбертово пространство вектор –функций, определенных в $R=(-\infty,\infty)$ со значениями из H с нормой

$$\|f\|_{L_2(R;H)}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|^2\,dt\right)^2.$$

Определим Гильбертово пространство

$$W_2^2(R;H)=\left\{u:\ C^2u\in L_2(R;H)\ ,\ u''\in L_2(R;H)\ \right\}$$

с нормой (см . [1])

$$\|u\|_{W_2^2(R;H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2(R;H)} + \|C^2 u\|^2_{L_2(R;H)}\right)^{1/2}.$$

Как известно, множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями всюду плотно в пространстве $W_2^2(R;H)$ [1].

Определение 1. Если существует вектор–функция $u(t) \in W_2^2(R;H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R ,то ее будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2(R;H)$ существует регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(R;H)} \le const\|f\|_{L_2(R;H)} ,$$

то уравнение (1) будем называть регулярно разрешимым.

В данной работе мы находим условия на коэффициенты операторно–дифференциального уравнения, которые обеспечивают регулярную разрешимость уравнения (1) .

Отметим, что при $\rho(t) = 1$ уравнение (1) при положительно определенном операторе A рассмотрено в [2], когда $\rho(t)$ определяется как (2), а A самосопряженный оператор, некоторая краевая задача для уравнения (1) исследована в [3].

Обозначим через

$$P_0 u = -u'' + \rho(t) A^2 u, \quad P_1 u = A_1 u' + A_2 u, \quad u \in W_2^2(R;H).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть A – нормальный обратимый оператор со спектром в секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon\},\ 0 \le \varepsilon < \pi/4.$$

Тогда оператор P_0 отображает пространство $W_2^2(R;H)$ в $L_2(R;H)$ изоморфно.

Доказательство. Очевидно, что вектор функции

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\zeta^2 E + \alpha^2 A^2\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i(s-\zeta)t} d\zeta ds , \quad t \in R ,$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\zeta^2 E + \beta^2 A^2\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i(s-\zeta)t} d\zeta ds , \quad t \in R$$

соответственно удовлетворяют уравнению $u'' + \alpha^2 A^2 u = f$ и $-u'' + \beta^2 A^2 u = f$ в R .

Покажем, что $u_1(t)$ и $u_2(t)\in W_2^2(R;H)$. Действительно по теореме Планшарелья

$$\|u_1\|_{W_2^2}^2=\|u_1''\|_{L_2}^2+\left\|C^2u_1\right\|_{L_2}^2=\left\|\zeta^2\hat{u}_1(\zeta)\right\|_{L_2}^2+\left\|C^2\hat{u}_1(\zeta)\right\|_{L_2}^2$$

здесь $\hat{u}_1(\zeta)$ - преобразование Фурье вектор-функции $u_1(t)$.
Так как

$$\left\|C^2\hat{u}_1(\zeta)\right\|_{L_2}^2=\left\|C^2\left(\zeta^2E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\hat{f}(\zeta)\right\|_{L_2}^2\le\sup_{\zeta\in R}\left\|C^2\left(\zeta^2E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\right\|_{H\to H}^2\left\|\hat{f}(\zeta)\right\|_{L_2}^2\ ,\quad (3)$$

то из спектрального разложения оператора следует ,что при любом $\zeta\in R$ имеет место неравенство:

$$\begin{gathered}\left\|C^2\left(\zeta^2E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\hat{f}(\zeta)\right\|_{L_2}^2=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\lambda\left(\zeta^2+\alpha^2\lambda^2\right)^{-1}\right|\le\\ \le\sup_{\substack{\mu>0\\|\varphi|\le\varepsilon}}\left|\mu^2\left(\zeta^2+\alpha^2\mu e^{2i\varphi}\right)^{-1}\right|\le\sup_{\mu>0}\left|\mu^2\left(\zeta^2+\alpha^4\mu^4+2\zeta^2\alpha^2\mu^2\cos 2\varepsilon\right)^{-1/2}\right|.\end{gathered}\quad (4)$$

Так как $\cos 2\varepsilon\ge 0$ при $0\le\varepsilon\le\dfrac{\pi}{4}$, то из неравенства (4) следует, что

$$\left\|C^2\left(\zeta^2E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\right\|_{L_2}^2\le\sup_{\mu>0}\left|\mu^2\left(\zeta^2+\alpha^4\mu^4\right)^{-1/2}\right|=\sup_{\mu>0}\frac{1}{\alpha^2}\left|\alpha^2\mu^2\left(\zeta^2+\alpha^4\mu^4\right)\right|\le\frac{1}{\alpha^2}.\qquad (5)$$

Далее отметим что $\cos 2\varepsilon\le 0$ при $\dfrac{\pi}{4}\le\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$, поэтому из неравенства (4) получаем

$$\begin{gathered}\left\|C^2\left(\zeta^2E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\right\|_{L_2}^2\le\frac{1}{\alpha^2}\sup_{\mu>0}\left|\alpha^2\mu^2\left(\zeta^4+\alpha^4\mu^4+2\zeta^2\alpha^2\mu^2\cos 2\varepsilon\right)^{-1/2}\right|\le\\ \le\frac{1}{\alpha^2}\sup_{\mu>0}\left|\alpha^2\mu^2\left(\zeta^4+\alpha^4\mu^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\cos 2\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right|\le\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\ .\end{gathered}\qquad (6)$$

Таким образом, из неравенства (4) с учетом неравенства (5) и (6) следует, что

$$\left\|C^2\left(\zeta^2E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\right\|_{L_2}^2\le\frac{1}{\alpha^2}c_0(\varepsilon),\qquad (7)$$

где

$$c_0(\varepsilon)=\begin{cases}1 \quad , & 0\le\varepsilon<\pi/4,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \le\varepsilon<\pi/2.\end{cases} \tag{8}$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\zeta^2\hat{u}_1(\zeta)\right\|_{L_2}^2=c_0(\varepsilon)\left\|\hat{f}(\zeta)\right\|_{L_2}^2, \tag{9}$$

где $c_0(\varepsilon)$ определяется формулой (8).Из равенства (9) следует, что $\zeta^2\hat{u}(\zeta)\in L_2(R;H)$.

Таким образом, $u_1(t)\in W_2^2(R;H)$. Аналогично показываем, что $u_2(t)\in W_2^2(R;H)$.

Теперь обозначим через $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ сужения вектор функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на полупрямые $R_-=(-\infty,0]$ и $R_+=[0,\infty)$ соответственно. Так как $u_1(t),u_2(t)\in W_2^2(R;H)$, то $\omega_1(t)\in W_2^2(R_-;H)$, а $\omega_2(t)\in W_2^2(R_+;H)$. Из теоремы о следах [1] следует, что существуют следы $\omega_1(0),\omega_1'(0),\omega_2(0),\omega_2'(0)$ и $\omega_1(0)\in H_{3/2}$, $\omega_1'(0)\in H_{1/2}$, $\omega_2(0)\in H_{3/2}$, $\omega_2'(0)\in H_{1/2}$.

Теперь общее решение уравнения $P_0u=f$ будем искать в виде

$$u(t)=\begin{cases}\omega_1(t)+e^{tA}\varphi_1 \ , & t<0\\ \omega_2(t)+e^{-tA}\varphi_2\,, & t>0,\end{cases} \tag{10}$$

где φ_1 и φ_2 неизвестные векторы из $H_{3/2}$. Выберем векторы φ_1 и φ_2 таким образом, чтобы $u(t)\in W_2^2(R;H)$. Для этого φ_1 и φ_2 должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{cases}\omega_1(0)+\varphi_1=\omega_2(0)+\varphi_2\\ \omega'_1(0)+A\varphi_1=\omega'_2(0)-A\varphi_2\end{cases}.$$

Отсюда находим , что

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\big(\omega_2(0)-\omega_1(0)\big)+A^{-1}\big(\omega'_2(0)-\omega'_1(0)\big),$$

$$\varphi_2=\frac{1}{2}A^{-1}\big(\omega'_2(0)-\omega'_1(0)\big)-\big(\omega_2(0)-\omega_1(0)\big).$$

Очевидно, что $\varphi_1, \varphi_2 \in H_{3/2}$. Таким образом, $u(t) \in W_2^2(R;H)$.

Теорема доказана.

Теперь займемся решением уравнения (1). Сперва докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. При любом $u(t) \in W_2^2(R;H)$ имеет место равенство

$$\left\| -\rho^{-1/2}u'' + \rho^{1/2}A^2u \right\|_{L_2}^2 \geq \left\| \rho^{-1/2}u'' \right\|_{l_2}^2 + \left\| \rho^{1/2}A^2u \right\|_{L_2}^2 + 2\cos 2\varepsilon \left\| A^2u' \right\|_{L_2}^2 . \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in W_2^2(R;H)$. Тогда

$$\left\| -\rho^{-1/2}u'' + \rho^{1/2}A^2u \right\|_{L_2}^2 = \left\| \rho^{-1/2}u'' \right\|_{L_2}^2 + \left\| \rho^{1/2}A^2u \right\|_{L_2}^2 - 2\mathrm{Re}\left(\rho^{-1/2}u''; \rho^{1/2}A^2u \right)_{L_2} =$$

$$= \left\| \rho^{-1/2}u'' \right\|_{L_2}^2 \left\| \rho^{1/2}A^2u \right\|_{L_2}^2 - 2\mathrm{Re}\left(u''; A^2u\right)_{L_2}. \qquad (12)$$

Так как спектр оператора содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : \left| \arg \lambda \right| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \pi/2 \right\},$$

то после интегрирования по частям получаем:

$$-2\mathrm{Re}\left(u'', A^2u\right)_{L_2} = -2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u'', A^2u\right)dt = 2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^*u', A\,u'\right)dt \geq$$

$$\geq 2\cos 2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty}\left(Au', A\,u'\right)dt = 2\cos 2\varepsilon \left\| Au' \right\|^2. \qquad (13)$$

Учитывая (12) в неравенство (13), получаем справедливость неравенства (11).

Лемма 2. При любом $u(t) \in W_2^2(R;H)$ имеет место следующее неравенство

$$\left\| Au' \right\|_{L_2} \leq \frac{1}{2\cos\varepsilon \cdot \min(\alpha;\beta)} \cdot \left\| P_0u \right\|_{L_2}, \quad \left\| A^2u \right\|_{L_2} \leq c_0(\varepsilon)\frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}, \qquad (14)$$

$c_0(\varepsilon)$ определяется из равенства (8).

Доказательство. Напишем уравнение

$$P_0u = -\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u = f$$

в виде

$$\rho^{-1/2}(t)P_0u=-\rho^{-1/2}(t)\frac{d^2u}{dt^2}+\rho^{1/2}(t)A^2u=\rho^{-1/2}(t)f\ .$$

Тогда по лемме 1 получаем

$$\left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2\geq\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|_{l_2}^2+\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2+2\cos2\varepsilon\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2. \qquad (15)$$

С другой стороны при любом $u(t)\in W_2^2(R;H)$ имеет место неравенство:

$$\|Au'\|_{L_2}^2=\|Cu'\|_{L_2}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(Cu',Cu')dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}(C^2u,u'')dt=-(C^2u,u'')_{L_2}=$$

$$=-\left(\rho^{1/2}C^2u;\rho^{-1/2}u''\right)_{L_2}\leq\left\|\rho^{1/2}C^2u\right\|_{L_2}^2\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|_{L_2}^2=\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|_{L_2}^2\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2.$$

Применяя неравенство Коши из последнего неравенства получаем:

$$\left\|A\ u'\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{2}\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2+\frac{1}{2}\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|_{L_2}^2. \qquad (16)$$

Из неравенства (15) с учетом неравенства (16) имеем:

$$\left\|A\ u'\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2-2\cos2\varepsilon\left\|Au'\right\|_{L_2}^2\right).$$

Отсюда имеем:

$$(1+\cos2\varepsilon)\left\|Au'\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{2}\left\|\rho^{-1/2}P_ou\right\|_{L_2}^2$$

или

$$\left\|Au'\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{4\cos^2\varepsilon}\cdot\left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{4\cos^2\varepsilon\cdot\min(\alpha^2;\beta^2)}\cdot\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2.$$

Следовательно, первое из неравенства (14) доказано. Теперь докажем второе неравенство. Пусть $0\leq\varepsilon\leq\pi/4$, тогда $\cos2\varepsilon\geq0$ и из неравенства (15) следует, что

$$\left\|A\ u'\right\|_{L_2}^2=\left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2\leq\frac{1}{\min(\alpha^4;\beta^4)}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2.$$

Таким образом, при $0\leq\varepsilon<\pi/4$ получаем верность второго неравенства из (14).

Теперь допустим, что $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2$. Тогда $\cos 2\varepsilon \le 0$ и из неравенства (15), с учетом первого неравенства из (14), следует, что

$$\left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|_{L_2}^2 \le \left\|\rho^{-1/2} P_0 u\right\|_{l_2}^2 - 2\cos 2\varepsilon \left\|A^2 u'\right\|_{L_2}^2 \left\|\rho^{-1/2} P_0 u\right\|_{l_2}^2$$

$$\le \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)} \left\|P_0 u\right\|_{L_2} -$$

$$-\frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon} \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)} \left\|P_0 u\right\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2) 2\cos^2\varepsilon} \left\|P_0 u\right\|_{L_2}^2 .$$

Отсюда получаем, что при $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2$ имеет место неравенство

$$\left\|A^2 u\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)} \left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{\min(\alpha^4;\beta^4) 2\cos^2\varepsilon} \left\|P_0 u\right\|_{L_2}^2 ,$$

следовательно, верно и второе неравенство из (14).

Теперь докажем основную теорему.

Теорема. Пусть A - нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon\}, 0 \le \varepsilon < \pi/2$, операторы $B_1 = A_1 A^{-1}, B_2 = A_2 A^{-2}$ ограничены в H и имеет место неравенство

$$K(\varepsilon) = \frac{1}{\min(\alpha;\beta)} \left[c_1(\varepsilon)\left\|B_1\right\| + \frac{c_0(\varepsilon)}{\min(\alpha;\beta)} \left\|B_2\right\| \right] < 1,$$

где

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\cos\varepsilon} \quad ,0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$c_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 \quad , & 0 \le \varepsilon < \pi/4 \quad , \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2 . \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Доказательство. Напишем уравнение (1) в виде

$$P_0 u + P_1 u = f \ ,$$

где $u(t) \in W_2^2(R;H)$, $f(t) \in L_2(R;H)$.

По теореме 1 оператор P_0 имеет ограниченный обратный P_0^{-1}, действующий из $L_2(R;H)$

в $W_2^2(R;H)$. Тогда, обозначая $P_0u=\vartheta$, получаем уравнение $\vartheta+P_1P_0^{-1}\vartheta=f$ в пространстве $L_2(R;H)$ так как для любого $\vartheta\in L_2(R;H)$

$$\left\|P_1P_0^{-1}\vartheta\right\|_{L_2}=\left\|P_1u\right\|_{l_2}=\left\|A_1\frac{du}{dt}+A_2u\right\|_{L_2}\le$$

$$\left\|A_1\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}+\left\|A_2u\right\|_{L_2}\le\left\|B_1\right\|\left\|Au'\right\|_{L_2}+\left\|B_2\right\|\left\|A_2u\right\|_{L_2},$$

то применяя лемму 2 получаем:

$$\left\|P_1P_0^{-1}v\right\|\le\left\|B_1\right\|\frac{c_1(\varepsilon)}{\min(\alpha;\beta)}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2+\left\|B_2\right\|\frac{c_0(\varepsilon)}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2=$$

$$K(\varepsilon)\left\|P_0u\right\|_{L_2}=K(\varepsilon)\left\|\vartheta\right\|_{L_2}.$$

Так как $K(\varepsilon)<1$, то оператор $E+P_1P_0^{-1}$ обратим в пространстве $L_2(R;H)$. Тогда можем найти, u: $u=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)f$. Очевидно, что имеет место неравенство

$$\left\|u\right\|_{W_2^2(R;H)}\le const\left\|f\right\|_{L_2}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., .Мир, 1971,-371 с.
2. Мирзоев С.С. Вопросы разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в Гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Автореф .доктор. дисс., 1994, Баку, 32 с.
3. Мирзоев С.С., Алиев А.Р. Об одной краевой задаче для операторно- диффе-ренциальных уравнений второго порядка с разрывном коэффициентом.Труды ИММ АН Азербайджана,1997, VI (XIV), с.11-16.

BİR SİNİF İKİ TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİYİN REQULYAR HƏLL OLUNMASI

L.Ə. RÜSTƏMOVA

ANNOTASİYA

Məqalədə iki tərtibli, baş hissəsi kəsilən əmsallı operator diferensial tənliyin həll olunması tədqiq edilir. Bu tənliyin baş hissəsində normal operator iştirak edir. Verilən tənliyin requlyar həll olunmasını təmin edən şərtlər tapılmışdır.Bu şərtlər operator-diferensial tənliyin əmsalları vasitəsilə ifadə olunur.

THE REGULAR SOLVABILITY OF ONE CLASS OF THE SECOND ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

L.A.RUSTAMOVA

ABSTRACT

In the work the regular solvability of the second order operator-differential equation with singular coefficients at the main part is investigated. The main part of the operator-differential equation contains normal operator. The condition of regular solvability is expressed only by the equation of the given equation.