МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ $P_2^{\otimes 2}$

Р.Д.МИРЗОЕВ
Институт Математики и Механики НАНА

Пусть $P_2^{(n)}$ *- множество всех* n *-арных булевых функций и* $P_2 := \left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_2^{(n)};\ \{\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *\}\right\rangle$ *- клон всех булевых функций, где алгебраические операции* $\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *$ *адекватно описывают процесс построения суперпозиций и вынуждают принадлежность селекторных функций* e_i^n $(1 \le i \le n < \omega)$ *всем подклонам* $C \le P_2$. *В настоящей работе описываются все минимальные подалгебры алгебры* $P_2^{\otimes 2} := P_2 \otimes P_2 := \left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(P_2^{(n)} \times P_2^{(n)}\right); \{\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *\}\right\rangle$, *где сигнатурные операции* $\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2$ *определены покомпонентно на каждом* $P_2^{(n)} \times P_2^{(n)}$ $(n = 1,2,...)$ *и операция* $*$ *- на каждом* $\left(P_2^{(n)} \times P_2^{(n)}\right) \times \left(P_2^{(m)} \times P_2^{(m)}\right), n, m = 1,2....$

Основные понятия и определения

Пусть P_k и P_l - клоны всех функций $k-$ и $l-$ значной логики [6] $(k, l \ge 2)$,

$$P_k = \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)}; \xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, * \right\rangle;\ P_l = \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} P_l^{(n)}; \xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, * \right\rangle,$$

где $P_k^{(n)}$ и $P_l^{(n)}$ - все n-арные функции, действующие на множествах $E_k = \{0,1,..., k-1\}$ и $E_l = \{0,1,..., l-1\}$; $\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *$ - алгебраические операции, эквивалентные суперпозиции. В работе [1] были исследованы подалгебры градуированного произведения

$$P_k \otimes P_l = \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)} \times P_l^{(n)}; \xi, \tau, \Delta, \nabla, * \right\rangle,$$

где операции суперпозиции определяются как синхронная суперпозиция компонент. В работе [2] алгебра $P_{k_1} \otimes \ldots \otimes P_{k_m}$ была определена классическим подходом, т.е. как некая подалгебра в $P_{k_1 \cdot \ldots \cdot k_m}$, и было получено разложение элементов (2-функций) этой алгебры.

Через $\left(P_{k_l} \times \ldots \times P_{k_m}\right)^{(n)}$ обозначим множество всех m-функций арности n, действующих на множестве $E_{k_1} \times \ldots \times E_{k_m}$ (где $E_{k_i} = \{0,1,\ldots,k_i - 1\}$, $k_i > 1$) и удовлетворяющих условию

$$-(*) f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = < f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_m(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}) >$$

где $X_i = < x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im} >$, $x_{ij} \in E_{k_j}; i = 1,2,\ldots,n;$ $f_j\left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}\right)$ - n-арные функции алгебры k_j-значной логики P_{k_j} $\left(j = 1,2,\ldots,m\right)$, по которым однозначно конструируется m-функция f.

В результате алгебру $P_{k_1} \otimes \ldots \otimes P_{k_m}$, определенную в [1], мы можем определить в виде

$$P_{k_1} \otimes \ldots \otimes P_{k_m} = \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(P_{k_1} \times \ldots \times P_{k_m}\right)^{(n)}, \xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, * \right\rangle,$$

где операции суперпозиции определяются, как в алгебре $P_{k_1 \cdot \ldots \cdot k_m}$.

В настоящей работе мы будем использовать 2-функции из множества $\left(P_2 \times P_2\right)^{(n)} = \left(P_2^{\times 2}\right)^{(n)}$, т.е. функции, действующие на множестве $E_2^2 = \left\{\overset{\leftrightarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{1}, \overset{\rightarrow}{1}, \bar{1}\right\}$, где $\overset{\leftrightarrow}{1} = <0,0>$, $\overset{\leftarrow}{1} = <0,1>$, $\overset{\rightarrow}{1} = <1,0>$, $\bar{1} = <1,1>$.

Отметим, что каждая n-арная 2-функция однозначно определяется своими значениями в точках $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$, где

$$X_i \in \left\{\overset{\leftrightarrow}{1}, \bar{1}\right\},\ i = 1,2,\ldots,n. \qquad (*)$$

Специальные обозначения и названия

0) Селекторы алгебры $P_2^{\otimes 2}$ будем называть тривиальными функциями (т.е. $f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$).

1) Унарные 2-функции будем обозначать символом $u_{n',n''}$, где

$$\left(n', n''\right) = 2 f\left(\overset{\leftrightarrow}{1}\right) + f\left(\bar{1}\right).$$

2) Идемпотентные бинарные 2-функции (т.е. $f(X,X)=X$).

Согласно условию (*) получим, что каждая бинарная 2-функция алгебры $P_2^{\otimes 2}$ однозначно определяется своими значениями в точках $<\overset{\leftrightarrow}{1},\overset{\leftrightarrow}{1}>, <\overset{\leftrightarrow}{1},\overline{1}>$, $<\overline{1},\overset{\leftrightarrow}{1}>$ и $<\overline{1},\overline{1}>$. Следовательно, для бинарных идемпотентных 2-функций можно однозначно использовать обозначение $b_{n',n''}$, где $(n',n'')=2f\left(\overset{\leftrightarrow}{1},\overline{1}\right)+f\left(\overline{1},\overset{\leftrightarrow}{1}\right)$.

3) Мажоритарные и миноритарные 2-функции.

Если тернарная 2-функция m удовлетворяет условию $m(X,X,Y)=m(X,Y,X)=m(Y,X,X)=X$ для всех $X,Y\in\left\{\overset{\leftrightarrow}{1},\overset{\leftarrow}{1},\overset{\rightarrow}{1},\overline{1}\right\}$, то 2-функцию m назовем мажоритарной.

Если тернарная 2-функция $\widetilde{m}$ удовлетворяет условию

$$\widetilde{m}(X,X,Y)=\widetilde{m}(X,Y,X)=\widetilde{m}(Y,X,X)=Y,$$

то $\widetilde{m}$ назовем миноритарной 2-функцией.

Согласно условию (*) и определениям 2-функций m и $\widetilde{m}$, очевидно, что в алгебре $P_2^{\otimes 2}$ имеется одна мажоритарная $m(X,Y,Z)=XY+XZ+YZ(\mathrm{mod}\,2)$ и одна миноритарная функция $\widetilde{m}(X,Y,Z)=X+Y+Z(\mathrm{mod}\,2)$.

4) Полуселекторные 2-функции.

Тернарную 2-функцию $S(X_1,X_2,X_3)$ будем называть полуселекторной, если

$$S\left(X_{j_1},X_{j_2},X_{j_3}\right)=X_{j_i}$$

для всех $j_1,j_2,j_3\in\{1,2\}$ при некотором фиксированном $i\in\{1,2,3\}$.

Учитывая условие (*), получим, что в алгебре $P_2^{\otimes 2}$ число полуселекторных 2-функций равно 3 и все они, как видно из таблицы 1, являются селекторами из $P_2^{\otimes 2}$.

Таблица 1

	$\overset{\leftrightarrow}{1}\overset{\leftrightarrow}{1}\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}\overset{\leftrightarrow}{1}\overline{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}\overline{1}\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}\overset{\leftrightarrow}{1}\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}\overline{1}\overline{1}$	$\overline{1}\overset{\leftrightarrow}{1}\overline{1}$	$\overline{1}\overline{1}\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}\overline{1}\overline{1}$
S_1	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
S_2	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
S_3	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overset{\leftrightarrow}{1}$	$\overline{1}$

Список минимальных подалгебр алгебры $P_2^{\otimes 2}$

Напомним, что каждая нетривиальная алгебра имеет термальную операцию одного из следующих типов [4]:

1) Нетождественную ($f \neq id$) унарную операцию,
2) бинарную идемпотентную операцию не являющуюся селектором,
3) тернарную мажоритарную операцию,
4) тернарную миноритарную операцию,
5) n-арную ($n \geq 3$) полуселекторную операцию, не являющуюся селектором.

Напомним, также, что если $f \neq id$ - унарная операция, для которой $f^2 = f$ или $f^q = id$ для некоторого простого числа q, то $[f]$ является минимальной подалгеброй. Из 16 унарных 2-функций в алгебре $P_2^{\otimes 2}$ условию $f^2 = f$ удовлетворяют 2-функции $u_{0,0}; u_{0,3}; u_{3,0}; u_{3,3}; u_{0,1}; u_{1,3}; u_{1,0}; u_{3,1}$.

Условию $f^2 = id$ удовлетворяют 2-функции $u_{1,2}; u_{2,2}; u_{2,1}$. Далее, $u_{1,1}$-селектор, $u_{0,2}^2 = u_{0,1}$, $u_{1,2}^2 = u_{1,1}$, $u_{2,0}^2 = u_{3,0}$, $u_{2,3}^2 = u_{1,3}$, $u_{3,2}^2 = u_{3,1}$. Таким образом, получаем, что число минимальных подалгебр в алгебре $P_2^{\otimes 2}$, порожденных унарными 2-функциями равно 11. В таблице 2 показано, что в алгебре $P_2^{\otimes 2}$ с точностью до изоморфизма существуют только 3 минимальных подалгебры, порожденных унарными 2-функциями.

Таблица 2

	$\left(\overset{\leftrightarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{1}\right)$	$\left(\overset{\leftrightarrow}{1}, \overset{\rightarrow}{1}\right)$	$\left(\overset{\leftrightarrow}{1}, \overline{1}\right)$	$\left(\overset{\leftarrow}{1}, \overset{\rightarrow}{1}\right)$	$\left(\overset{\leftrightarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{1}\right)$ $\left(\overset{\leftarrow}{1}, \overline{1}\right)$
$u_{0,0}$	$u_{0,3}$	$u_{3,0}$	$u_{3,3}$		
$u_{0,1}$			$u_{1,3}$	$u_{1,0}$	$u_{3,1}$
$u_{1,2}$		$u_{2,2}$	$u_{2,1}$		

Число бинарных идемпотентных и не являющихся селекторами 2-функций в алгебре $P_2^{\otimes 2}$ равно 14 и из этих 2-функций дуальными парами (т.е. $(f(X,Y), f(Y,X))$) являются $(b_{0,0}; b_{0,0})$, $(b_{0,1}; b_{0,2})$, $(b_{1,0}; b_{2,0})$; $(b_{1,2}; b_{2,1})$, $(b_{1,3}; b_{2,3})$, $(b_{3,1}; b_{3,2})$, $(b_{3,3}; b_{3,3})$, $(b_{0,3}; b_{0,3})$, $(b_{3,0}; b_{3,0})$.

Итак, остается проверить минимальность следующих подалгебр:

$[b_{0,0}]$, $[b_{0,1}]$, $[b_{1,0}]$, $[b_{1,2}]$, $[b_{1,3}]$, $[b_{3,1}]$, $[b_{3,3}]$, $[b_{0,3}]$, $[b_{3,0}]$.

Нетрудно установить, что все они являются минимальными подалгебрами.

В итоге получаем 9 минимальных подалгебр алгебры $P_2^{\otimes 2}$, порожденных бинарными функциями, и среди них нет попарно сопряженных.

Множество $E_2^2 = \{\overleftrightarrow{1}, \overleftarrow{1}, \overrightarrow{1}, \overline{1}\}$ образует абелеву группу экспоненты 2 относительно покомпонентного сложения по модулю 2. Следовательно, $[\widetilde{m}] = [X + Y + Z]$ является минимальной подалгеброй в $P_2^{\otimes 2}$. По той же причине подалгебра $[m] = [XY + XZ + YZ]$ также является минимальной подалгеброй в $P_2^{\otimes 2}$.

Минимальных подалгебр, порожденных полуселекторными 2-функциями, в алгебре $P_2^{\otimes 2}$ не существует, так как согласно таблице 1 все они совпадают с тривиальной подалгеброй в $P_2^{\otimes 2}$. В результате получаем следующую теорему.

Теорема 1. *В алгебре $P_2^{\otimes 2}$ существует ровно 22 минимальных подалгебр, из которых 11 порождаются унарными, 9 - бинарными 2-функциями, 1 - мажоритарной и 1 - миноритарной 2-функцией.*

Эти подалгебры уже перечислены выше в ходе доказательства теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромов Б.А. О полноте на квадрате функций алгебры логики и в системе $P_k \times P_e$. Кибернетика - 1987, 4, с.9-14.
2. Мирзоев Р.Д. Разложение функций алгебры $P_{k_1} \otimes \ldots \otimes P_{k_m}$, алгебра $P(E_2^2)$ и алгебра двузначных функций над E_2. Материалы VII Республиканской Конференции Баку, 2003.
3. Марченков С.С. О предполных классах в декартовых произведениях P_2 и P_3. Дискретная математика 1994, том 6, выпуск 2, с. 21-43.
4. Szendrei A. - Clones in universal algebra, Montreal, 1986, 163 p.
5. Csakanay B. All minimal clones on the three-element set // Acta Cybernetica, 1983, 6, p.227-238.
6. Байрамов Р.А. - Исследование строения клонов и близких к ним алгебр финитарных функций. Избранные вопросы теории многообразий, Баку: ЭЛМ, 2000, 370 с.

$P_2^{\otimes 2}$ CƏBRİN MİNİMAL ALT CƏBRLƏRİ

R.C.MİRZƏYEV

ANNOTASİYA

Fərz edək ki, $P_2^{(n)}$ - bütün n-dəyişənli bul funksiyaları çoxluğudur və $P_2 := \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} P_2^{(n)};\ \{\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *\} \right\rangle$ - bütün Bul funksiyaları klonudur, harada ki, $\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *$ cəbri əməliyyatları superpozisiya prosesinin qurulmasını adekvat təsvir edir və e_i^n $(1 \le i \le n < \omega)$ selektor funksiyalarının ixtiyari $C \le P_2$ klonuna daxil olunmasını təmin edirlər.

İşdə $P_2^{\otimes 2} := P_2 \otimes P_2 := \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(P_2^{(n)} \times P_2^{(n)} \right); \{\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *\} \right\rangle$ cəbrinin minimal alt cəbrləri təsvir edilir (harada ki, siqnatur əməliyyatlar $P_2^{(n)} \times P_2^{(n)}$ hasilinin hər bir vuruğuna eyni ardıcıllıqla tətbiq edilir $(n = 1,2,...)$).

MINIMAL SUBALGEBRAS OF THE ALGEBRA $P_2^{\otimes 2}$

R.J.MIRZOYEV

ABSTRACT

Let $P_2^{(n)}$ be the set of all n-ary Boolean fucntions and $P_2 := \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} P_2^{(n)};\ \{\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *\} \right\rangle$ be the clone of all Boolean fucntions, where algebraic operations $\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *$ exactly describe the process of constructing of superpositions and force the belonging of all selector functions e_i^n $(1 \le i \le n < \omega)$ to each subclone $C \le P_2$. In this paper we describe all minimal subalgebras of the algebra $P_2^{\otimes 2} := P_2 \otimes P_2 := \left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(P_2^{(n)} \times P_2^{(n)} \right); \{\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2, *\} \right\rangle$, where signature operations $\xi, \tau, \Delta, \varepsilon_1^2$ are componentwise determined on each $P_2^{(n)} \times P_2^{(n)}$ $(n = 1,2,...)$ and ** on each* $\left(P_2^{(n)} \times P_2^{(n)} \right) \times \left(P_2^{(m)} \times P_2^{(m)} \right), (n, m \in N)$..