

**НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ЧИСЛА
ШАГОВ ДО ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ
НУЛЬ ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДЕНИЯ**

Ш.А.БАБАЕВ

Институт Кибернетики НАН Азербайджана

Данная статья посвящена нахождению производящей функции распределения числа шагов процесса полумарковского блуждания с отрицательным сносом, с неотрицательными скачками и с задерживающим экраном в нуле, при котором он впервые достигает уровня нуля. В частности найдены его математическое ожидание и дисперсия.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана последовательность независимых, одинаково распределенных пар случайных величин ξ_k, η_k и ζ_k , где $\xi_k > 0, \eta_k > 0, \zeta_k \geq 0, k = \overline{1, \infty}$.

Исходя из этих случайных величин построим процесс полумарковского блуждания с отрицательным сносом и с неотрицательными скачками (см. [1]):

$$x_1(t) = \begin{cases} z - t + \sum_{i=1}^{k-1} (\zeta_i + \eta_i); & \text{если } \sum_{i=1}^{k-1} (\xi_i + \eta_i) \leq t < \sum_{i=1}^{k-1} (\xi_i + \eta_i) + \xi_k \\ z - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i + \sum_{i=1}^{k-1} \zeta_i; & \text{если } \sum_{i=1}^{k-1} (\xi_i + \eta_i) + \xi_k \leq t < \sum_{i=1}^k (\xi_i + \eta_i) \end{cases}$$

где $P(x_1(0) = z) > 0$.

Этот процесс по методу Боровкова (см. [2]) задержим с экраном в нуле и его обозначим через $x(t)$:

$$x(t) = x_1(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} [0, x_1(s)].$$

Вводим случайную величину

$$v_1^0 = \min \left\{ k : z - \sum_{i=1}^k \xi_i + \sum_{i=1}^{k-1} \zeta_i \leq 0 \right\} -$$

число шагов процесса $x(t)$, при котором он впервые достигает уровня нуля.

Цель найти в статье производящую функцию случайной величины V_1^0 .

Предполагаем, что случайные величины ζ_1 и $x(0)$ независимы между собою.

Обозначим

$$\rho = P\{\zeta_1 > 0\}$$

и

$$\Psi(u, z) = M(u^{V_1^0} / x(0) = z), \quad 0 < u \leq 1.$$

В случае $\rho = 1$ в [3] найдена производящая функция случайной величины V_1^0 . Так же в работе [4] при $0 < \rho \leq 1$ для процесса с положительным сносом и отрицательными скачками, с задерживающим экраном в нуле найдена производящая функция числа скачков V_1^0 . Нами доказана следующая

Теорема. Условная производящая функция распределения случайной величины V_1^0 удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \Psi(u, z) = & uP\{\zeta_1 > z\} - u(1 - \rho) \int_{y=0}^z \Psi(u, y) d_y P\{\xi_1 < z - y\} + \\ & + u\rho \int_{y=0}^z \Psi(u, y) d_y \int_{x=z-y}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\} + \\ & + u\rho \int_{y=z}^{\infty} \Psi(u, y) d_y \int_{x=0}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. По формуле полной вероятности при $k \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} P\{V_1^0 = k / x(0) = z\} = & \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, \zeta_1 = 0, z - \xi_1 \in dy\} P\{V_1^0 = k - 1 / x(0) = y\} + \\ & + \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, \zeta_1 > 0, z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\} P\{V_1^0 = k - 1 / x(0) = y\}. \end{aligned}$$

Это равенство умножив на u^k и просуммировав при $k \geq 2$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} u^k P\{V_1^0 = k / x(0) = z\} = & u \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, \zeta_1 = 0, z - \xi_1 \in dy\} \Psi(u, y) + \\ & + u \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, \zeta_1 > 0, z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\} \Psi(u, y). \end{aligned}$$

Далее учитывая, что

$$P\{V_1^0 = 1 / x(0) = z\} = P\{z - \xi_1 \leq 0\},$$

последнее уравнение напишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi(u, z) = & uP\{\xi_1 > z\} + uP\{\zeta_1 = 0\} \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 \in dy\} \Psi(u, y) + \\ & + uP\{\zeta_1 > 0\} \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\} \Psi(u, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 \in dy\} \Psi(u, y) = & \int_{y=0}^{\infty} \Psi(u, y) d_y P\{\xi_1 > z - y\} = - \int_{y=0}^z \Psi(u, y) d_y P\{\xi_1 < z - y\}, \\ \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 \in dy\} \Psi(u, y) = & - \int_{y=0}^z \Psi(u, y) d_y P\{\xi_1 < z - y\}; \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\} \Psi(u, y) = & \int_{y=0}^{\infty} \psi(u, y) d_y P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 + \zeta_1 < y\} = \\ = \int_{y=0}^{\infty} \psi(u, y) d_y \int_{x=0}^z P\{z - x + \zeta_1 < y, \xi_1 \in dx\} = & \int_{y=0}^{\infty} \psi(u, y) d_y \int_{x=0}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\} = \\ = \int_{y=0}^{\infty} \psi(u, y) d_y \int_{x=\max(0, z-y)}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\} = & \int_{y=0}^z \psi(u, y) d_y \int_{x=z-y}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\} + \\ + \int_{y=z}^{\infty} \psi(u, y) d_y \int_{x=0}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\}; \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} P\{z - \xi_1 > 0, z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\} \Psi(u, y) = & \int_{y=0}^z \psi(u, y) d_y \int_{x=z-y}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\} + \\ + \int_{y=z}^{\infty} \psi(u, y) d_y \int_{x=0}^z P\{\zeta_1 < x + y - z\} d_x P\{\xi_1 < x\}; \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь, учитывая (3), (4) и $\rho = P\{\zeta_1 > 0\}$ в (2), получаем (1).

Теорема доказана.

Уравнение (1), при общих предположениях относительно распределений случайных величин ξ_1 и ζ_1 , решить можно только методом последовательных приближений. Но такое решение не пригодится для прило-

жений. Сузив класс распределений, можно получить явный вид производящей функции распределения случайной величины V_1^0 .

Следствие 1. Пусть ξ_k и ζ_k независимы между собою и имеют соответственно следующие распределения:

$$P\{\xi_1 < t\} = 1 - e^{-\mu t}, \mu > 0; \quad P\{\zeta_1 < t\} = 1 - \rho e^{-\lambda t}, \lambda > 0, t \geq 0.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(u, z) = & ue^{-\mu z} + \frac{\mu u}{\lambda + \mu} [\lambda + \mu(1 - \rho)] e^{-\mu z} \int_{y=0}^z e^{\mu y} \Psi(u, y) dy + \\ & + \frac{\lambda \mu \rho u}{\lambda + \mu} e^{\lambda z} \int_{y=z}^{\infty} e^{-\lambda y} \Psi(u, y) dy - \frac{\lambda \mu \rho u}{\lambda + \mu} e^{-\mu z} \int_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} \Psi(u, y) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство этого следствия получается с учетом выражений функции распределения случайных величин ξ_1 и ζ_1 в (1).

Продифференцировав интегральное уравнение (5) по z , получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\Psi_z''(u, z) - [\lambda - \mu + \mu(1 - \rho)u] \Psi_z'(u, z) - \lambda \mu(1 - u) \Psi(u, z) = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\Psi(u, z) = C_1(u) e^{K_1(u)z} + C_2(u) e^{K_2(u)z},$$

где

$$K_{1,2}(u) = \frac{[\lambda - \mu + \mu(1 - \rho)u] \pm \sqrt{[\lambda - \mu + \mu(1 - \rho)u]^2 + 4\lambda\mu(1 - u)}}{2}.$$

Из граничных условий

$$\begin{cases} \Psi(u, 0) = u, \\ \Psi_z'(u, 0) = -\mu u + \mu(1 - \rho)u^2 + \lambda \mu \rho u \int_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} \Psi(u, y) dy \end{cases}$$

находим, что

$$C_1(u) = 0, \quad C_2(u) = u.$$

Следовательно

$$\Psi(u, z) = ue^{K_2(u)z}. \quad (6)$$

Следствие 2. При выполнении условия следствия (1) безусловная производящая функция имеет следующий вид:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda u}{\lambda - K_2(u)}$$

Доказательство: Учитывая, что

$$P\{x(0) < z / \zeta_1 > 0\} = [1 - e^{-\lambda z}] \varepsilon(z), \quad z > 0, \quad \varepsilon(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

и

$$\psi(u) = \int_{z=0}^{\infty} \psi(u, z) d_z P\{x(0) < z / \zeta_1 > 0\}$$

из (6) находим, что.

$$\Psi(u) = \frac{\lambda u}{\lambda - K_2(u)}.$$

Следствие 3. При условии $\lambda > \mu\rho$ математическое ожидание и дисперсия случайной величины v_1^0 выражаются следующим образом:

$$M v_1^0 = \frac{\lambda + \mu(1 - \rho)}{\lambda - \mu\rho}, \quad D v_1^0 = \frac{\lambda\mu(\lambda + \mu) + \mu^3 \rho(1 - \rho)}{(\lambda - \mu\rho)^3}.$$

Доказательство: Благодаря свойствам производящей функции имеем:

$$M v_1^0 = \psi'(1), \quad D v_1^0 = \psi''(1) + \psi'(1)[1 - \psi'(1)].$$

С помощью этих равенств нетрудно показать, что при $\lambda > \mu\rho$

$$M v_1^0 = \frac{\lambda + \mu(1 - \rho)}{\lambda - \mu\rho}, \quad D v_1^0 = \frac{\lambda\mu(\lambda + \mu) + \mu^3 \rho(1 - \rho)}{(\lambda - \mu\rho)^3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Насирова Т.И. Полумарковские процессы. Баку, Элм, 1984, 161 стр.
2. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., Наука, 1978, 365 стр.
3. Гасанова А.М. Распределение времени до первого капитального ремонта компрессора. Изв. НАНА №3, 2003, стр.132-134.
4. Алиева Т.А. Исследование граничного функционала процесса полумарковского блуждания с положительным сносом и параметром. Труды Респуб. Науч. Конф. «Современные проблемы информатизации, кибернетики и информационных технологий». Баку, 28-30 апреля 2003 г. т. III, с. 45-47.

**SEMİMARKOV DOLAŞMA PROSESİNİN SIFIR SƏVİYYƏSİNƏ BİRİNCİ
DƏFƏ ÇATMASI ÜÇÜN ADDIMLAR SAYININ DOĞURAN
FUNKSİYASININ TAPILMASI**

Ş.A.BABAYEV

ANNOTASIYA

Bu məqalədə mənfi istiqamətli mənfi olmayan sıçrayışlı sifirda gecikdirilən ekranlı semimarkov dolaşma prosesinin birinci dəfə «0» ekranına çatması üçün atılan addımlar sayının paylanması üçün doğuran funksiyası tapılmışdır. Xüsusi halda həmin paylanmanın riyazi gözləmə və dispersiyası tapılmışdır.

**FINDING OF GENERATION FUNCTION OF THE NUMBER OF THE STEPS
OF THE PROCESS SEMIMARKOV RANDOM
FOR REACING ZERO LEVEL**

Sh.A.BABAYEV

ABSTRACT

In this paper is obtained the generating function of the number of the steps in which the process semimarkov random walk with negative drift, nonnegative jumps and with delaying screen in the zero crosses the screen «0». In parfulcalary is calculated the mean and variance it.