

**АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

Э.Р.АХМЕДОВ, А.А.НИФТИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе рассматривается задача вариационного исчисления с неизвестными границами. Предлагается алгоритм для численного решения этой задачи. Далее на основе этого алгоритма дается численное решение конкретных задач.

Введение. Довольно широкий класс задач, возникающих в практике, особенно в теории упругости, аэродинамики, геофизики, гидродинамики и т.д. требуют нахождения оптимальной формы ([1,2]). Построение приближенного решения для задачи оптимального управления с неизвестными границами связано с некоторыми трудностями ([1-3]), связанными с необходимостью контроля за тем, чтобы граница области после вариации не стала самопересекающейся, и сложностью некоторых вычислений. В работах ([1-3]), используя вариацию области по векторному полю, дан алгоритм для численного решения задачи управления границами. Однако, использование указанного понятия вариации области не устранило вышеуказанные трудности.

1. Постановка задачи. Пусть $K = \{D \in K_0: S_D \in C^2\}$ множество областей D из R^n с границами S_D , K_0 – некоторое выпуклое подмножество из M_0 , M_0 – совокупность выпуклых ограниченных областей из R^n , $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u_x(x) = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$, $x \in D$.

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$J(D, u) = \int_D F(x, u(x), u_x(x)) dx \rightarrow \min, \quad D \in K, \quad u \in C^2(D), \quad (1)$$

$$u(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in S_D. \quad (2)$$

Пара (D, u) называется допустимой, если $D \in K$, $u \in C^2(D)$ – и удовлетворяется условие (2), а (D^*, u^*) оптимальной, если она дает минимум функционалу (1) среди всех допустимых пар.

Будем предполагать, что функция $F(x, u, p)$ имеет непрерывные частные производные по совокупности переменных до второго порядка

включительно, $g(x)$ – непрерывно дифференцируемая в G , G – область, включающая в себе всех $D \in K$. Уравнение

$$F_u(x, u(x), u_x(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} F_{u_{x_i}}(x, u(x), u_x(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (3)$$

является уравнением Эйлера для задачи (1), (2).

В работе [6] для поставленной задачи получено следующее условие оптимальности:

Если пара $(D^*, u^*) \in K \times C^2(D^*)$ доставляет минимум задаче (1), (2), то $u^* = u^*(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (3) в D^* . Кроме этого выполняется соотношение

$$\int_{S_{D^*}} [F(\xi, u^*(\xi), u_x^*(\xi)) - \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^*(\xi) - g_{x_i}(\xi)) F_{u_{x_i}}(\xi, u^*(\xi), u_x^*(\xi))] \times \\ \times [p_D(n(\xi)) - p_{D^*}(n(\xi))] dS \geq 0, \quad \forall D \in K. \quad (4)$$

Здесь $n(\xi)$ - внешняя нормаль к поверхности S_{D^*} в точке ξ .

В (4) можно подставить $u^*(\xi) = g(\xi)$.

2. Алгоритм численного решения. На основании (4) предлагается следующий численный алгоритм для минимизации функционала (1).

Шаг 1. Выбираем начальную область $D_0 \in K$ и считается, что $D_m \in K$ уже известно, $m=0, 1, 2, \dots$

Шаг 2. Решая уравнение Эйлера (3) в D_m находим $u_m = u_m(x)$.

Шаг 3. Вычисляем

$$f_m(x) = [F(x, u, u_x) - \sum_{i=1}^n (u_{x_i} - g_{x_i}) F_{u_{x_i}}(x, u, u_x)] \Big|_{u=u_m(x)} \quad (5)$$

Шаг 4. Решая задачу

$$I_m(D) = \int_{S_m} f_m(x) P_D(n(x)) dx \rightarrow \min, \quad D \in K, \quad (6)$$

находим выпуклую положительно-однородную функцию $P_m(x)$, где $S_m = \partial D_m$.

Шаг 5. Вспомогательную область \bar{D}_m находим как субдифференциал функции $P_m(x)$ в точке $0 \in R^n$ ([5]):

$$\bar{D}_m = \partial P_m(0) = \{ \ell \in R^n : P_m(x) \geq (\ell, x), x \in R^n \}. \quad (7)$$

Шаг 6. D_{m+1} определяем из следующего соотношения:

$$D_{m+1} = (1 - \alpha_m) D_m + \alpha_m \bar{D}_m, \quad 0 \leq \alpha_m \leq 1; \quad (8)$$

где α_m выбирается разными способами ([4]).

Шаг 7. Проверяем выполнение критерия точности

$$|J(D_{m+1}) - J(D_m)| + \int_{S_{D_m}} |P_{D_{m+1}}(x) - P_{D_m}(x)| dx \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Если оно выполняется, то процесс завершается. В противном случае переходим к шагу 1.

Если в процессе итерации получена $\bar{D}_m = D_m$, то для любого α_m из (8) имеем: $D_{m+1} = D_m$. Тогда $I(\bar{D}_m) = I(D_m)$, т.е.

$$\delta J(D_m) = I(D) - I(D_m) \geq I(\bar{D}_m) - I(D_m) = 0.$$

Это означает, что $D_m \in K$ удовлетворяет необходимому условию минимума. В этом случае итерация прекращается, и следует выяснить, является ли D_m оптимальной, или нет. Например, если $J(D)$ выпукло, то D_m будет оптимальной ([4]).

Для того, чтобы выполнить шаг 2 применяем метод Ритца ([7]): $u(x)$ ищется в виде линейной комбинации некоторой системы линейно независимых функций, удовлетворяющих условию (2) в S_{D_m} , т.е.

$$u(x) = \sum_{k=1}^r c_k \varphi_k(x).$$

Коэффициенты c_k определяются из условия минимума функционала (1) в области D_m , т.е. c_1, c_2, \dots, c_r определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 0, \quad k = \overline{1, r},$$

где

$$I(c_1, c_2, \dots, c_r) = J(D_m, \sum_{k=1}^r c_k \varphi_k(x)).$$

Теперь рассмотрим как выполняется шаг 4. Отметим, что функционал $I_m(D)$ в задаче (6) линейный и при решении этой задачи необходимо учитывать выпуклость и положительную однородность функции $P(x)$.

Условие выпуклости можно выражать как ограничение в узловых точках. Учитывая условие положительной однородности, это достаточно сделать для граничного слоя сетки.

Еще одна трудность в задаче (6) появляется при установлении связи между множеством K и опорной функцией. Если множество K_0 имеет вид $K_0 = \{D = M_0: D_0 \subset D \subset D_1\}$, то условие $D \subset K$ эквивалентно следующему условию

$$P_{D_0}(x) \leq P_D(x) \leq P_{D_1}(x).$$

Это непосредственно вытекает из определения опорной функции ([5]).

Если множество K определяется фиксированием объема области D , то надо учитывать, что

$$\text{mes } D = \frac{1}{n} \int_{S_D} P_D(n(x)) dx.$$

Если K связано с площадью поверхности S_{D_0} , то его надо выразить через $P_D(x)$. Например, в двумерном случае ([6])

$$|S_D| = \int_{S_D} P_D(x) dx.$$

Теперь укажем некоторые наиболее простые способы выбора α_m в (8).

1) α_m выбирается из условия

$$f_m(\alpha) = J((1-\alpha)D_m + \alpha_m \overline{D_m}) \rightarrow \min, \quad \alpha \in [0,1].$$

2) α_m можно определить из условий

$$0 \leq \alpha_m \leq 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m = \infty;$$

например, можно взять $\alpha_m = \frac{1}{(m+1)}$.

3) Можно полагать $\alpha_m = \frac{1}{2}$ и проверять условие монотонности; если оно не выполняется, то дробить α_m до выполнения этого условия.

Предлагаемый здесь алгоритм аналогичен методу условного градиента. Налагая дополнительные условия на данные задачи можно обеспечить сходимость метода ([4]). Эти условия в основном связаны с гладкостью границы области и выпуклости функционала.

3. Примеры. В реализации алгоритма каждая область задается с помощью N граничных точек. Начальная область задается N точками, удовлетворяющими некоторым условиям и на каждой итерации находится N точек.

В шаге 2 при применении метода Рунге вычисляется интеграл по области и решается система алгебраических уравнений. А в шаге 4 решение задачи приводится к решению линейного программирования [7]. Для решения этих задач используется пакет программ "MATLAB". Учитывая положительно – однородность $P(x)$, в шаге 4 условия выпуклости достаточно наложить на граничном слое сетки, т.е.

$$P(\lambda x_{i-1} + (1-\lambda)x_{i+1}) \leq \lambda P(x_{i-1}) + (1-\lambda)P(x_{i+1}), \quad (10)$$

где x_i , $i = \overline{1, N}$ граничные точки, $\lambda \in [0,1]$. Для простоты при реализации алгоритма вместо λ взято $\lambda = \frac{1}{2}$.

Это может приводить к нарушению выпуклости области при увеличении N . Чтобы избежать этого λ , можно взять, например, $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Однако, в этом случае количество ограничений возрастает. Приведем некоторые модельные примеры.

Пример 1. Пусть F не зависит от $u = u(x)$ и рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(D) = \int_D \left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \right) dx_1 dx_2, \quad D \subset R^2, \quad B_1 \subset D \subset B_3,$$

B_r – круг с радиусом r . Полученная область указана на рис.1 ($N = 8$).

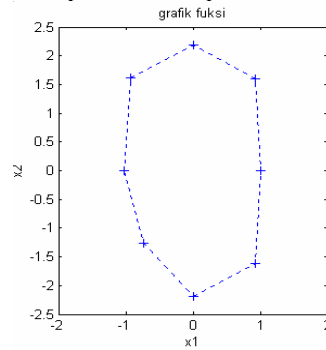


Рис. 1

Пример 2.

$$J(D) = \int_D (x_2 - x_1) dx_1 dx_2, \quad B_1 \subset D \subset B_3.$$

Полученная область указана на рис.2 ($N = 10$).

Пример 3. Пусть

$$F(x, u, u_x) = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + 2u - \frac{3}{4}xy - \frac{9}{2}, \quad g(x) = 2, \quad B_1 \subset D \subset B_3.$$

В этом случае при реализации алгоритма имеем: $u = 0,24x_1^2 + 0,238x_2^2 + 0,25x_1x_2$. А полученная область указана на рис.3 ($N = 10$).

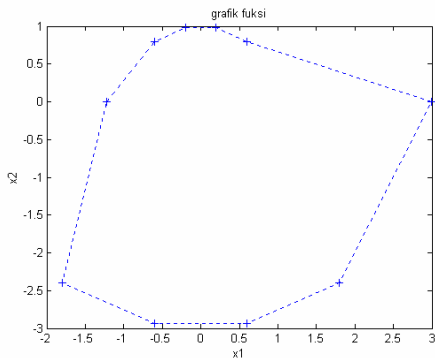


Рис.2

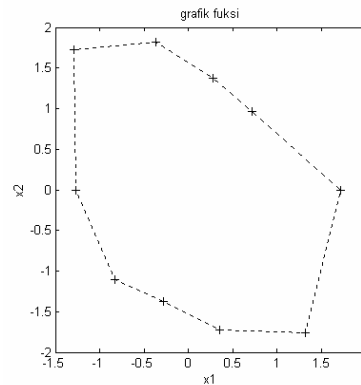


Рис.3

ЛИТЕРАТУРА

1. Керимов А.К. Задачи оптимизации со свободными границами. ДАН СССР, 1982, 266, №3, с. 545-548.
2. Муравей Л.А. Задача управления границей для эллиптических уравнений. Вестн. Москв. Ун-та, сер. 15, Вычисл. Матем. и Киберн., 1998, №3, с. 7-13.
3. Волков М. А. Численное решение одной задачи оптимизации с неизвестной границей. Вестн. Москв. Ун-та, сер. 15, Вычисл. Матем. и Киберн., 1984, №3, с. 13-18.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

5. Демьянов В.Ф. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Изд. ЛГУ, 1982, 322 с.
6. Niftiyev A.A. On an optimal control problem with unknown boundaries. Of Academy of scien. of Azerb., ser. of phys.-tec. and math., 1998, 18, №3-4, pp.246-252.
7. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967, 368 с.

**NAMƏLUM SƏRHƏDLİ VARIASIYA HESABI MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN ƏDƏDİ
HƏLL ALQORİTMİ**

E.R.ƏHMƏDOV, A.A.NİFTİYEV

ANNOTASIYA

İşdə naməlum sərhədlı variasiya hesabı məsələsinə baxılır. Baxılan məsələnin ədədi həlli üçün alqoritm təklif olunur. Bu alqoritm əsasında konkret məsələlər ədədi həll edilir.

**ALGORITHM FOR THE NUMERICAL SOLUTION
OF THE VARIATIONAL PROBLEM WITH
UNKNOWN BOUNDARIES**

E.R.AHMADOV, A.A.NIFTIEV

ABSTRACT

In the work the variational problem with free boundaries is considered. The algorithm for the numerical solving of this problem is offered. Some concrete examples are numerically solved on the base of this algorithm.