**BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ**

***№1*** ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2005***

# О ПОЛНОТЕ ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**С.С.МИРЗОЕВ, А.Ш.АББАСОВ**

***Бакинский Государственный Университет***

*В работе получена теорема о полноте части собственных и присоединенных элементов одного класса операторного пучка третьего порядка, главная часть которого содержит нормальный оператор. Эти условия выражены только коэффициентами операторного пучка. При этом исследованы некоторые аналитические свойства резольвенты и разрешимость соответствующей краевой задачи на полуоси.*

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^3 E + A^3 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 + A_3, \qquad (1)$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют условия:

1) $A-$ нормальный оператор с вполне непрерывным обратным $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$, спектр которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon\}, \; o \le \varepsilon < \dfrac{\pi}{6};$
2) Операторы $B_j = A_j A^{-j} \quad (j = \overline{1,3})$ ограничены в $H$, т.е. $B_j \in L(H);$
3) Оператор $E + B_3$ обратим в $H$.

При этих условиях операторный пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр [1-4]. Обозначим через $K(\Pi_-)$ систему собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости $\Pi_- = \{\lambda : Re\,\lambda < 0\}$. В этой работе мы укажем условия на коэффициенты операторного пучка (1), которые обеспечивают полноту системы $K(\Pi_-)$ в $H$. Отметим, что когда $A-$ самосопряженный оператор, полнота системы $K(\Pi_-)$ в $H$ изучена в работе [3].

Отметим, что при выполнении условия 1) оператор $A$ представимо в виде

$$A = \sum_n \lambda_n(A)\,(.,e_n)e_n$$

где $e_n$ – ортонормированная система собственных векторов оператора $A$, а $\lambda_n(A)$ собственные числа. Тогда по определению при $\gamma \geq 0$

$$A^\gamma = \sum_n \lambda_n^\gamma(C)\,(.,e_n)e_n\ .$$

Здесь и дальше $\lambda^\gamma = |\lambda|^\gamma e^{i\gamma \arg\lambda}$, при $\lambda \neq 0,\quad -\pi < \arg\lambda \leq \pi$ .

Обозначим через $H_\gamma = D(A^\gamma) = \left\{ x \in H,\ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(A)|^{2\gamma} |(x,e_n)|^2 < \infty \right\}$ и $(x,y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)\ \ (\gamma \geq 0)$.

Далее, определим гильбертовы пространства [5]

$$W_2^3(R_+;H) = \{u:\quad A^3u \in L_2(R_+;H),\quad u^{(3)} \in L_2(R_+;H)\}$$

и

$$\overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;H) = \{u:\quad u \in W_2^3(R_+;H),\quad u(0)=0\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} = \left( \|u^{(3)}\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|A^3u\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1), 2) и

$$\alpha(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{3} c_j(\varepsilon)\,\|B_{3-j}\| < 1\,, \qquad (2)$$

где $c_0(\varepsilon) = (\cos 3\varepsilon)^{-1},\quad c_1(\varepsilon) = c_2(\varepsilon) = 2^{1/3} \cdot 3^{-1/2}\ (1-\sin 3\varepsilon)^{-1/2}$.

Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ обратим на секторах

$$S_{k,\theta} = \left\{ \lambda:\ \left| \arg\lambda - \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{3} \right) \right| < \theta \right\},\qquad k = \overline{0,3}.$$

при достаточно малом $\theta > 0$ и на этих секторах справедливы оценки:

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leq const\,(1+|\lambda|)^{-3},\qquad \|A^3P^{-1}(\lambda)\| \leq const \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть

$$P_0(\lambda) = \lambda^3E + A^3,\qquad P_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} A_{3-j}\lambda^j\,,$$

тогда на лучах $\Gamma_k = \left\{ \lambda:\ \arg\lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{3} \right\},\ k = \overline{0,3}$, пучок $P_0(\lambda)$ обратим и

$$P(\lambda) = (E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda))P_0^{-1}(\lambda) \tag{4}$$

Так как на этих лучах $\lambda = re^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{3}\right)}$ и

$$\left\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \sum_{j=1}^{3}\left\|B_j\right\| \left\|\lambda^j A^{3-j} P^{-1}(\lambda)\right\|,$$

то из оценки при $j = 1,2$,

$$\left\|\lambda^j A^{3-j} P_0^{-1}(\lambda)\right\| = \sup_{\lambda_n(A)}\left|r^j \left|\lambda_n(A)\right|^{3-j}\left(\pm ir^3 + \lambda_n^3(A)\right)^{-1}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\left|r^j \mu^{3-j}(r^6 + \mu^6 \pm 2r^3\mu^3 \sin 3\varepsilon)^{-1/2}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\left|r^j \mu^{3-j}(r^6 + \mu^6)^{-1/2}\right| \cdot (1 - \sin 3\varepsilon)^{-1/2} = c_j(\varepsilon),$$

и при $j = 0$

$$\left\|A^3 P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \sup_{\mu>0}\left|\mu^3(r^6 + \mu^6 \pm 2r^3\mu^3 \sin 3\varepsilon)^{-1/2}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\left|\mu^3(r^6 + \mu^6 - 2\cdot\frac{1}{2}(r^6 + \mu^6 \sin^2 3\varepsilon)\right| = (\cos 3\varepsilon)^{-1} = c_0(\varepsilon),$$

получаем, что на лучах $\Gamma_k$

$$\left\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \left(\sum_{j=1}^{3}\left\|B_{3-j}\right\| \cdot c_j(\varepsilon)\right) = \alpha(\varepsilon) < 1$$

Поэтому из равенства (4) следует, что

$$\left\|P^{-1}(\lambda)\right\| \le const\left\|P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le const(1 + |\lambda|)^{-3}.$$

При $\lambda \in S_{k,\theta}$, $\lambda = ze^{i\varphi}$, где $z \in \Gamma_k$, а $0 \le \varphi < \theta$, из равенства

$$P(\lambda) = P(ze^{i\theta}) = P(z) + \left[z^3(e^{i3\varphi} - 1) + \sum_{j=1}^{2} z^j(e^{i\varphi j} - 1)A_{3-j}\right] =$$

$$= E + \left[(e^{i3\varphi} - 1)z^3P^{-1}(z) + \sum_{j=1}^{2}(e^{i\varphi_j} - 1)z^j A_{3-j}P^{-1}(z)\right]P(z)$$

и при достаточно малом $\theta$ $(0 \le \varphi < \theta)$ норма оператора в большом скобке меньше, чем единицы, то

$$\left\|P^{-1}(\lambda)\right\| \le const\left\|P^{-1}(z)\right\| \le const(1 + |\lambda|)^{-3}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1), 2) и

$$\beta(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{2}k_j(\varepsilon)\left\|B_{2=j}\right\|<1,$$

где $\beta_0(\varepsilon)=(cos\,3\varepsilon)^{-1}$, $\beta_1(\varepsilon)=2^{2/3}\cdot 3^{-1/2}\cdot(1-sin\,3\varepsilon)^{-1/2}$, $\beta_2(\varepsilon)=2\cdot 3^{-1/2}(1-sin\,3\varepsilon)^{-1/2}$. Тогда при любом $\varphi\in H_{7/2}$ существует вектор-функция $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$, которая удовлетворяет уравнению

$$P(d/dt)u(t)=\frac{d^3u}{dt^3}+A^3u+\sum_{j=0}^{2}A_{3-j}u^{(j)}=0 \qquad (5)$$

почти всюду в $R_+=(0,\infty)$ и граничную условию

$$u(0)=\varphi \qquad (6)$$

в смысле

$$\lim_{t\to+0}\left\|u(t)-\varphi\right\|_{7/2}=0,$$

причем

$$\left\|u\right\|_{W_2^3}\le const\left\|\varphi\right\|_{7/2}$$

Доказательство. При $A_j=0$ $(j=1,2,3)$ утверждение теоремы очевидно, так как $u(t)=e^{-tA}\varphi$ есть требуемая вектор- функция. Если хотя бы один из операторов $A_j$ $(j=1,2,3)$ отлично от нуля, то заменой $u(t)\to u(t)-e^{-At}\varphi$ можно задачу (5), (6) привести к граничной задаче

$$P(d/dt)u(t)=f(t), \qquad (7)$$

$$u(0)=0\ , \qquad (8)$$

где $f(t)=\sum_{j=1}^{3}B_jA^2e^{-tA}\varphi.$ Так как $\varphi\in H_{3/2}$, то $f(t)\in L_2(R_+;H)$ и $\left\|f\right\|_{L_2}\le const\left\|\varphi\right\|_{7/2}$.

Определим операторы

$$P_0u=\frac{d^3u}{dt^3}+A^3u,\qquad P_1u=A_1\frac{d^2u}{dt^2}+A_2u+A_3u,\qquad u\in\overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;H)$$

Так как уравнения $P_0u=0$ имеет только нулевое решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;H)$ и при любом $f\in L_2(R_+;H)$ уравнение $P_0u=f$ имеет решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;H)$ в виде $u(t)=u_1(t)-e^{-tA}u_1(0)$, где

$$u_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\xi^3E+A^3)^{-1}\int_0^\infty f(s)e^{i(t-s)\xi}ds\right)d\xi$$

то из теоремы Банаха об обратном операторе вытекает, что существует обратный оператор $P_0^{-1} : \ L_2(R_+;H) \to \overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;H)$ и ограничен.

Далее, при $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;H)$ имеем

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 = \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2 + 2\,Re(u^{(3)}, A^3 u)_{L_2}. \tag{9}$$

После интегрированием по частям получаем:

$$(u^{(3)}, A^3 u)_{L_2} = \left(C^{3/2} u'(0),\, UC^{3/2} u'(0)\right) - \left(A^{*3} u, u^{(3)}\right)_{L_2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2Re(u^{(3)}, A^3 u)_{L_2} &= \left(C^{3/2} u'(0), UC^{3/2} u'(0)\right) + \left[\left(A^3 u, u^{(3)}\right)_{L_2} - \left(A^{*3} u, u^{(3)}\right)_{L_2}\right] \ge \\ &\ge cos 3\varepsilon \|u'(0)\|_{3/2}^2 - \left\|(E - (A^* A^{-1})^3\right\| \cdot \left|(A^3 u, u^{(3)})_{L_2}\right| \ge \\ &\ge cos 3\varepsilon \|u'(0)\|_{3/2}^2 - 2 sin 3\varepsilon \left\|A^3 u\right\|_{L_2} \cdot \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая неравенство (10) в равенстве (9) получаем, что

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 \ge \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2 + \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2}^2 - 2\,sin\,3\varepsilon \left\|A^3 u\right\|_{L_2} \cdot \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2} \tag{11}$$

Из (11) приминением неравенства Коши имеем:

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 \ge \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2 + \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(\left\|u^{(3)}\right\|_{L_2} + sin^2 3\varepsilon \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2) = cos^2 3\varepsilon \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2,$$

т.е.

$$\left\|A^3 u\right\|_{L_2} = (cos\,3\varepsilon)^{-1} \|P_0 u\|_{L_2}. \tag{12}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\left\|u^{(3)}\right\|_{L_2} \le (cos\,3\varepsilon)^{-1} \|P_0 u\|_{L_2}. \tag{13}$$

Далее имеем:

$$\left\|A^2 u'\right\|_{L_2}^2 = \left\|C^2 u'\right\|_{L_2}^2 = -(C^3 u, Cu'')_{L_2} \le \left\|C^3 u\right\|_{L_2} \cdot \left\|Cu''\right\|_{L_2} = \left\|A^3 u\right\|_{L_2} \cdot \left\|Au''\right\|_{L_2} \tag{14}$$

и (см. [6])

$$\left\|Au''\right\|_{L_2}^2 = \left\|Cu''\right\|_{L_2}^2 \le 2 \le \left\|Cu''\right\|_{L_2} \cdot \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2} = 2\left\|Au''\right\|_{L_2} \cdot \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2} \tag{15}$$

Из неравенства (14) и (15) следует, что при $\eta > 0$ имеет место неравенство:

$$\left\|A^2 u'\right\|_{L_2}^2 \le 2^{2/3} \left(\eta \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} \left\|u^{(3)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{3}} \le 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} \eta \left\|A^3 u\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{3\eta^2} \left\|u^{(3)}\right\|_{L_2}^2\right).$$

Полагая $\eta = 2^{-\frac{1}{3}}$ получаем:

$$\left\| A^2 u' \right\|_{L_2} \le 2^{2/3} \cdot 3^{-1/2} \left( \left\| A^3 u \right\|_{L_2}^2 + \left\| u^{(3)} \right\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Учитывая неравенство (11) в последнем неравенстве имеем:

$$\left\| A^2 u' \right\|_{L_2} \le 2^{2/3} 3^{-1/2} (1 - \sin 3\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \left\| P_0 u \right\|_{L_2} = c_1(\varepsilon) \left\| P_0 u \right\|_{L_2} \qquad (16)$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\| A u'' \right\|_{L_2} \le 2 \cdot 3^{-1/2} (1 - \sin 3\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \left\| P_0 u \right\|_{L_2} = c_2(\varepsilon) \left\| P_0 u \right\|_{L_2} \qquad (17)$$

Теперь напишем задачу (7), (8) в виде уравнения

$$P_0 u + P_1 u = f, \qquad u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2 (R_+; H), \qquad f \in L_2(R_+; H)$$

После замены $u = P_0^{-1}\omega$ получаем уравнение $\omega + P_1 P_0^{-1}\omega = f$ в $L_2(R_+; H)$. Так как при любом $\omega \in L_2(R_+; H)$

$$\left\| P_1 P_0^{-1} \omega \right\|_{L_2} = \left\| P_1 u \right\|_{L_2} \le \sum_{j=0}^{2} \left\| B_{2-j} \right\| \cdot \left\| A^{2-j} u^{(j)} \right\|_{L_2},$$

то учитывая неравенства (12), (16) и (17) получаем, что

$$\left\| P_1 P_0^{-1} \omega \right\|_{L_2} \le \left( \sum_{j=0}^{2} \left\| B_{2-j} \right\| \cdot c_j(\varepsilon) \right) \left\| P_0 u \right\|_{L_2} = \alpha(\varepsilon) \left\| \omega \right\|_{L_2}$$

Таким образом,

$$u = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$$

и

$$\left\| u \right\|_{W_2^3} \le const \left\| \varphi \right\|_{3/2}.$$

Лемма доказана.

Применяя методы работы [2, 3] доказывается

Теорема. Пусть выполняются условия леммы 2 и имеет место одно из следующих условий:

а) $A^{-1} \in \sigma_p \quad (0 < p \le 3)$ или б) $A^{-1} \in \sigma_p \quad (0 < p \le \infty)$ и спектр оператора $A$ расположены на конечном числе лучей. Тогда система $K(\Pi_-)$ полна в $H_{7/2}$.

Доказательство. Пусть $0 \ne \varphi \in H_{7/2}$ ортогонален систему $K(\Pi_-)$ в $H_{7/2}$. Тогда вектор-функция $R(\lambda) = \left( A^{7/2} P^{-1}(\lambda) \right)^* A^{\frac{7}{2}} \varphi$ голоморфно в левой полуплоскости [1,2]. Из условия теоремы вытекает, что задача (5), (6) имеет решение $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$, которое представляется в виде

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}P^{-1}(\lambda)\left(\sum_{j=0}^{2}Q_j(\lambda)u^{(j)}(0)\right)e^{\lambda t}d\lambda,$$

где $Q_j(\lambda)$ полиномиальный операторный пучок $(3-j)-$ го порядка $(j=\overline{0,2})$. Из леммы 2 вытекает, что

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\pm(\pi/2+\theta)}}P^{-1}(\lambda)\left(\sum_{j=0}^{2}Q_j(\lambda)u^{(j)}(0)\right)e^{\lambda t}.$$

Тогда при $t>0$

$$(u(t),\varphi)_{3/2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\pm(\pi/2+\theta)}}\left(\sum_{j=0}^{2}Q_j(\lambda)u^{(j)}(0),R(\overline{\lambda})\right)e^{\lambda t}d\lambda$$

Из условия теоремы вытекает, что $R(\lambda)-$ голоморфна в левой полуплоскости, а из $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$ следует, что $\varphi(\lambda)=\left(\sum_{j=0}^{2}Q_j(\lambda)u^{(j)}(0),R(\overline{\lambda})\right)$ голоморфная вектор-функция в правой полуплоскости и имеет граничные значения на мнимой оси. Так как $A^3P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка $p$ и минимального типа при порядке $p$ (см. [2]) то $\varphi(\lambda)$ целая функция порядка $p$ и минимального типа. Тогда из леммы 1, приминением теоремы Фрагмена-Линдилёфа получаем, что $\varphi(\lambda)$ полином третьей степени, поскольку $|\varphi(\lambda)|\le const|\lambda|^3$. Тогда $\varphi(\lambda)=\sum_{j=0}^{3}\lambda^j\chi_j$ и при $t>0$

$$(u(t),\varphi)_{3/2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\pm(\pi/2+\theta)}}\left(\sum_{j=0}^{3}\lambda^j e^{\lambda_j t}\chi_j\right)d\lambda=0$$

Переходя к пределу при t→+0 получаем, что $(\varphi,\varphi)_{3/2}=0$, следовательно $\varphi=0$.

Теорема доказана.


**ЛИТЕРАТУРА**

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных уравнений, УМН, 1971, т.26, №4, с.15-41.
2. Гасымов М.Г. К теории полиномиальных операторных пучков. ДАН СССР, 1971, т.200, №1, с.13-16.

3. Мирзоев С.С. О кратной полноте корневых векторов полиномиальных пучков, отвечающих краевым задачам на полуоси. Функциональный анализ и его приложения.
4. Радзиевский Г.В. Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций. УМН, т.37, №2, с.91-145.
5. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи. М., «Мир», 1971, 371 с.
6. A.Sh. Abbasov. Conditions of correct solvability a boundary value problem for one class of third order operator differential equations. Transactions of National Academy of Sci. Azerbaijan, T.XXIV, 2004, p.3-8.

## BİR SİNİF ÜÇ TƏRTİBLİ OPERATOR DƏSTƏNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA ELEMENTLƏRİNİN TAMLIĞI HAQQINDA

**S.S.MİRZƏYEV, Ə.Ş.ABBASOV**

### ANNOTASİYA

Məqalədə separabel Hilbert fəzasında üç tərtibli operator dəstənin məxsusi və qoşma elementlərinin bir hissəsinin tamlığı daha güclü normada isbat olunmuşdur. Operator dəstənin baş hissəsində normal operator iştirak edir. Əsas teoremi isbat etdikdə rezolventanın bəzi analitik xassələri və uyğun operator diferensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin varlığı göstərilir.

## ON THE COMPLETENESS OF THE PART OF EIGEN-VECTORS AND JOINT VECTORS FOR ONE CLASS OPERATOR BUNCHES OF THE THIRD ORDER

**S.S.MIRZOYEV, A.Sh.ABBASOV**

### ABSTRACT

Theorem on the completeness of eigen-vectors and joint vectors for the third order in separable Hilbert space is obtained in the paper in norm, which is stranger than the norm of Hilbert space. The main part of the operator bunch contains the normal operator. Analytical properties of resolvent and solvability of the corresponding boundary-value problem in semi-axis are investigated for obtaining the main result.