BAKI UNİVERSİTETİ XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

КВАНТОВЫЕ ФЛЮКТУАЦИИ В МОДЕЛИ НЙЛ С РАЗМЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ВНЕ ПОЛЮСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ АМПЛИТУД

Р.Г.ДЖАФАРОВ

Бакинский Государственный Университет

В модели Намбу-Йона-Лазинио с размерно-аналитической регуляризацией в рамках разложения среднего поля в формализме билокального источника вне полюсного приближения вычислены вклады скалярных мезонов в кварковый киральный конденсат .

Введение. Явление спонтанного нарушения симметрии играет важную роль в развитии физики элементарных частиц. Впервые такой механизм нарушения симметрии был обнаружен в моделях с четырехфермионным взаимодействием [1,2]. Одним из простейших является модель предложенный Намбу и Йона-Лазинио[1]. Модель был обобщен в работах [3] для описания сильного взаимодействия цветных кварков. В последующие годы интенсивно исследовалась модель Намбу-Йона – Лазинио (НЙЛ) при конечных температурах и плотностях, в различных внешних полях и т. д. [4].

Так как лагранжиан модели НЙЛ ненормируем, схема регуляризации является специфической частью этой модели. В научной литературе уже много раз высказывалось мнение о том, что в разных регуляризациях модель НЙЛ приводит к разным физическим результатам. Это и существенным образом отличает модель с выбором регуляризации – здесь, модели являются абсолютно разными[4,5,7]. Традиционно используемой регуляризацией в модели НЙЛ является регуляризация 4-мерным обрезанием в евклидовом пространстве(см.[4-8] и цитируемые там литературы). Однако редко встречается размерная регуляризация, главным образом из-за того, что физическая интерпретация формальной размерности D, введенной в размерной регуляризации, все еще не проявилась. В размерной регуляризации, обычно предполагается, что все импульсы определяются в пространстве размерностью D. Хотя даже такое пространство может явно представляться только для целых положительных значений D, размерность D формально расширяется к реальным значениям D<4, выражая предел интегрирования петли. После устранения бесконечности через ренормализацию, берется предел D=4.

В работе Крювальда и Накаямы [6] был предложен метод регуляризации, где интерпретируется размерная регуляризация как аналитическое. При такой трактовке размерной регуляризации параметр регуляризации вовсе не является отклонением от физической размерности пространства. В работах [5,7] в модели НЙЛ в трактовке Крювальда и Накаямы в следующем за главным порядке разложения среднего поля вычислены мезонные вклады в киральный конденсат кварка, где определены параметры модели как в аналитической, так и в регуляризации с 4-мерным обрезанием, где при вычислении конденсатов были использованы амплитуды в полюсном приближении.

В настоящей работе исследуется соотношение конденсатов первого шага разложения среднего поля к конденсату главного приближения вне полюсном приближении амплитуд.

1. Разложение среднего поля в модели НЙЛ. Рассмотрим теорию самодействующего спинорного поля ψ с лагранжианом

$$L = \bar{\psi} i\hat{\partial}\psi + \frac{g}{2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + \left(\bar{\psi} i\gamma_5\tau^a\psi\right)^2\right], \qquad (1)$$

которую мы будем называть $SU(2)$-моделью НЙЛ. Здесь, $g > 0$ – константа связи с размерностью квадрата обратной массы. Лагранжиан (1) инвариантен относительно преобразований киральной группы $SU(2)_V \times SU(2)_A$. $\psi \equiv \psi^{\alpha}(x)^c_j$ и $\alpha = 1,\ldots,4; c = 1,\ldots,n_c; j = 1,2.$ τ^{α}_{jk} – генераторы группы $SU(2)$ (матрицы Паули):

$$\tau^a\tau^b = \delta^{ab} + i\varepsilon^{abc}\tau^c, \; a = 1,2,3; \; tr\tau^a\tau^b = 2\delta^{ab}.$$

Производящий функционал функций Грина (вакуумных ожиданий T-произведений полей) может быть представлен в виде функционального интеграла с билокальным источником:

$$G(\eta) = \int D(\psi,\bar{\psi})\exp i\left[\int dxL - \int dxdy\bar{\psi}(y)\eta(y,x)\psi(x)\right], \qquad (2)$$

Трансляционная инвариантность меры функционального интегрирования в (2) приводит к функционально-дифференциальному уравнению Швингера-Дайсона (УШД) для производящего функционала:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G + \left(i\hat{\partial} - m^0\right)^{\alpha\alpha'}_{ji}\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{ki}} +$$
$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}} tr\left[\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha'}\tau^a_{jj_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{kj_1}} tr\left[\gamma_5\cdot\tau^a\cdot\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} = \qquad (3)$$
$$= \int dx_1\eta^{\alpha\beta_1}(x,x_1)^{cc_1}_{ji}\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\beta'}(y,x_1)^{dc_1}_{ki}}.$$

Решение этого уравнения будем искать методом, предложенным в работах[10,11], которое является для рассматриваемой нами модели НЙЛ одним из способов построения разложения среднего поля. Уравнением главного приближения является аппроксимация УШД (3) с нулевой правой частью:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G^{(0)}+\left(i\hat{\partial}-m^{0}\right)_{ji}^{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta^{\beta\dot{\alpha}}(y,x)_{ki}^{dc}}+$$
$$+ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)_{kj}^{dc}}tr\left[\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right]-\gamma_5^{\alpha\dot{\alpha}}\tau_{jj_1}^{a}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\dot{\alpha}}(y,x)_{kj_1}^{dc}}tr\left[\gamma_5\cdot\tau^{a}\cdot\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\}=0, \tag{4}$$

решением которого является функционал

$$G^{(0)}=\exp Tr\left(\eta * S^{(0)}\right). \tag{5}$$

Здесь Tr означает след в операторном смысле, а $*$- операторное умножение, $S^{(0)}$ в импульсном пространстве имеет вид:

$$\left(S^{(0)^{-1}}\right)^{\alpha\beta}(p)_{jk}^{cd}=-\delta_{jk}\hat{p}^{\alpha\beta}\delta^{cd}-ig\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\int d\tilde{p}\,tr\left[S^{(0)}(p)\right]=\delta^{cd}\left(\delta^{\alpha\beta}m_{jk}-\hat{p}^{\alpha\beta}\delta_{jk}\right), \tag{6}$$

где

$$m_{jk}=-ig\delta_{jk}\int d\tilde{p}\,tr\left[S^{(0)}(p)\right],\quad d\tilde{p}\equiv d^{4}p\Big/2\pi^{4}.$$

Функционал n-го шага $G^{(n)}$ есть решение уравнения

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G^{(n)}+\left(i\hat{\partial}-m_0\right)_{ji}^{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta^{\beta\dot{\alpha}}(y,x)_{ki}^{dc}}+$$
$$+ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)_{kj}^{dc}}tr\left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]-\gamma_5^{\alpha\dot{\alpha}}\tau_{jj_1}^{a}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\dot{\alpha}}(y,x)_{kj_1}^{dc}}tr\left[\gamma_5\cdot\tau^{a}\cdot\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\}=\eta*\frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta(x,x_1)} \tag{7}$$

Решением уравнения (7) является функционал $G^{(n)}=P^{(n)}G^{(0)}$, где $P^{(n)}$- полином $2n$ степени по источнику. Решение уравнения (6) в импульсном пространстве есть свободный пропагатор

$$S^{(0)}=\frac{1}{m-\hat{p}}$$

с динамической массой m, которое является решением уравнения самосогласования в киральном пределе модели НЙЛ:

$$m = -8igmn_c \int \frac{d\tilde{p}}{m^2 - p^2}, \tag{8}$$

При $m = 0$ всегда существует кирально-симметричное тривиальное решение. Мы будем рассматривать физически интересное решение $m \neq 0$, соответствующее ДНКС. Решение уравнения первого шага есть функционал

$$G^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\eta * S_2^{(1)} * \eta + \mathrm{Tr}S^{(1)} * \eta \right\} G^{(0)}.$$

С учетом соотношений (4)-(7) получаем уравнение для двухчастичной функции первого шага $S_2^{(1)}$ [5]

$$\begin{aligned} & S^{(1)\alpha\beta}_{2\alpha'\beta'}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{cd,jk}_{c'd',j'k'} = -S^{(0)\alpha\beta'}(x-y')^{cd'}_{jk'} S^{(0)\alpha'\beta}(x'-y)^{c'd}_{j'k} + \\ & + ig \int dx_1 \left\{ \left[S^{(0)}(x-x_1) S^{(0)}(x_1-y) \right]^{\alpha\beta,cd}_{jk} S^{(1)\beta_1\beta_1}_{2\alpha'\beta'}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{c_1c_1,j_1j_1}_{c'd',j'k'} - \right. \\ & \left. - \left[S^{(0)}(x-x_1)\gamma_5\tau^a S^{(0)}(x_1-y) \right]^{\alpha\beta,cd}_{jk} S^{(1)\beta_1\beta_2}_{2\alpha'\beta'}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{c_1c_1,j_1k_1}_{c'd',j'k'} \gamma_5^{\beta_2\beta_1} \tau^a_{k_1j_1} \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Двухчастичная ампутированная функция первого шага есть

$$\begin{aligned} & F_2^1\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \equiv \\ & \equiv \int dx_1 dy_1 dx_1' dy_1' \left(S^{(0)}\right)^{-1}(x-x_1)\left(S^{(0)}\right)^{-1}(x'-x_1') S_2^1\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1' & y_1' \end{pmatrix}\left(S^{(0)}\right)^{-1}(y_1-y)\left(S^{(0)}\right)^{-1}(y_1'-y') \end{aligned} \tag{10}$$

Двухчастичная амплитуда будет иметь вид:

$$A\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \equiv F_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} + \left(S^{(0)}\right)^{-1}(x-y')\left(S^{(0)}\right)^{-1}(x'-y). \tag{11}$$

Вводя анзац

$$A_\sigma\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = \delta(x-y)\delta(x'-y')\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'} A_\sigma(x-x'),$$

$$A_\pi\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = \delta(x-y)\delta(x'-y')\gamma_5{}^{\alpha\beta}\gamma_5{}^{\alpha'\beta'} A_\pi(x-x')$$

получим уравнения для скалярных амплитуд

$$A_\sigma(x) = -ig\delta(x) + 2ign_c \int dx_1 l_s(x-x_1) A_\sigma(x_1), \tag{12}$$

$$A_\pi(x) = ig\delta(x) - 2ign_c \int dx_1 l_p(x-x_1) A_\pi(x_1), \tag{13}$$

где

$l_s(x) = tr_\alpha\left[S^{(0)}(x)S^{(0)}(-x)\right];\quad l_s(p) = \int d\widetilde{q}\, tr_\alpha\left[S^{(0)}(p+q)S^{(0)}(q)\right]$ -скалярная петля,

$l_p(x) = tr_\alpha\left[S^{(0)}(x)S^{(0)}(x)\right];\quad l_p(p) = \int d\widetilde{q}\, tr_\alpha\left[S^{(0)}(p-q)S^{(0)}(q)\right]$ - псевдоскалярная петля.

Амплитуды в импульсном пространстве будут иметь вид:

$$A_\sigma = -\frac{ig}{1-2ign_c l_s};\ A_\pi = \frac{ig}{1+2ign_c l_p}.$$

Используя уравнение самосогласования (8) при $m \neq 0$, нетрудно получить (в трансляционно-инвариантной регуляризации) для A_σ и A_π следующие представления:

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c\left(4m^2-p^2\right)I_0(p)}, \tag{14}$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_c p^2 I_0(p)}, \tag{15}$$

где

$$I_0(p) = \int \frac{d\widetilde{q}}{\left(m^2-(p+q)^2\right)\left(m^2-q^2\right)}. \tag{16}$$

Массовый оператор первого шага есть

$$\Sigma^{(1)}_{\alpha\beta}(x)^{cd}_{jk} = \delta^{cd}\delta_{jk}\cdot\left[2ign_c\delta^{\alpha\beta}(x)tr_\alpha S^{(1)}(0) + S^{(0)^{\alpha\beta}}(x)A_\sigma(x) + 3S^{(0)^{\alpha\beta}}(-x)A_\pi(x)\right] \tag{17}$$

2.Аналитическая регуляризация и уравнения самосогласования модели НЙЛ. Как уже было отмечено, ввиду неперенормируемости модели НЙЛ регуляризация является существенной процедурой модели.

На примере уравнения самосогласования применим размерно-аналитическую регуляризацию.

Согласно [6] вводим в подынтегральное выражение весовую функцию

$$w\left(q_e^2\right) = \left(\frac{\mu^2}{q_e^2}\right)^{2-D/2} \tag{18}$$

переопределив масштабный параметр как,

$$\left(\mu^2\right)^{2-D/2} = \frac{\Omega_D}{\Omega_4}\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^D}\left(M^2\right)^{2-D/2}. \tag{19}$$

Здесь имеется ввиду определение $\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma\left(D/2\right)$.

Отметим, что при такой трактовке [6] D не является размерностью пространства, а неким параметром регуляризации. Определим D как, $D = 2 - 2\xi$, где ξ связан обычным параметром как, $\xi = \varepsilon - 1$. Введение этого нового параметра связана с тем, чтобы избежать не нужных ассоциаций со стандартной трактовкой размерной регуляризации. А также, в терминах параметра ξ многие формулы модели НЙЛ имеют довольно простой вид.

При $m \neq 0$ согласно (18) и (19) после перехода в евклидово пространство, после интегрирования по угловым переменным, а далее в 4-мерном пространстве по импульсным переменным уравнение самосогласования (8) принимает вид

$$1 = \kappa\Gamma(\xi)\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}, \qquad (20)$$

где $\kappa = g n_c m^2 / 2\pi^2$.

В такой регуляризации интеграл (16) после проведения всех интегрирований принимает вид

$$I_0\left(p^2\right) = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\xi}{\kappa} F(1+\xi, 1; 3/2; \frac{p^2}{4m^2}). \qquad (21)$$

$F(a, b; c; x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса.

3. Мезонные вклады в киральный конденсат вне полюсном приближении амплитуд. Соотношение конденсатов первого шага разложения среднего поля к главному приближению есть [5],

$$\mathrm{r} \equiv \frac{\left(\mathrm{c}^3\right)^{(1)}}{\left(\mathrm{c}^3\right)^{(0)}} = \mathrm{r}_\sigma + \mathrm{r}_\pi =$$

$$= -\frac{8\mathrm{ign_c}}{1 - 8\mathrm{ign_c J}}\int \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{q}}\mathrm{d}\tilde{\mathrm{p}}\left[\left(3\mathrm{p}^2 - 2(\mathrm{pq}) + \mathrm{m}^2\right)\mathrm{A}_\sigma(\mathrm{q}) + 3\left(-\mathrm{p}^2 + 2(\mathrm{pq}) + \mathrm{m}^2\right)\mathrm{A}_\pi(\mathrm{q})\right]}{\left(\mathrm{m}^2 - (\mathrm{p}-\mathrm{q})^2\right)\left(\mathrm{m}^2 - \mathrm{p}^2\right)^2}, \qquad (22)$$

где

$$J = \int \frac{m^2 + p^2}{\left(m^2 - p^2\right)^2} d\tilde{p}.$$

В (22) используя амплитуды (14) и (15) вне полюсном приближении, т.е. при $p^2 \neq 4m^2$ и $p^2 \neq 0$, и проведя интегрирования по угловым переменным и по dp_e, при этом введя обозначение $z = q_e^2 / m^2$, получим

$$r_\sigma^{nonpole}=2\frac{\sin(\pi\xi)}{\xi\pi m_c}\int_0^\infty dz\int_0^1 du\cdot(1-u)\frac{z^{-\xi}}{(4+z)f(z)[1+u(1-u)z]^3}\cdot$$
$$\left\{3(\xi-1)F(3,2-\xi;3;\frac{u(1-u)z}{1+u(1-u)z})+(1+\xi)[1+(2-3u)z]F\left(3,1-\xi;3;\frac{u(1-u)z}{1+u(1-u)z}\right)\right\} \quad (23)$$

в сигма-мезонном,

$$r_\pi^{nonpole}=-2\frac{3\sin(\pi\xi)}{\xi\pi m_c}\int_0^\infty dz\int_0^1 du\cdot(1-u)\frac{z^{-\xi-1}}{f(z)[1+u(1-u)z]^3}\cdot$$
$$\left\{(1-\xi)F(3,2-\xi;3;\frac{u(1-u)z}{1+u(1-u)z})+(1+\xi)[1+u(u-2)z]F\left(3,1-\xi;3;\frac{u(1-u)z}{1+u(1-u)z}\right)\right\} \quad (24)$$

в пионном секторах, соотношение конденсатов, соответственно.

Здесь $f(z)=F\left(1+\xi,1;{}^{3}\!/_{2};-\frac{z}{4}\right)$.

Формулы (23) и (24) дают принципиальную возможность определить численные значения $r_\sigma^{non\,pole}$ и $r_\pi^{non\,pole}$. В частности, при физически интересном значении $\xi={}^{1}\!/_{2}$, соотношение конденсатов принимают значения $r_\sigma^{non\,pole}=0$ и $r_\pi^{non\,pole}={}^{1}\!/_{4}$. Следует отметить, что в полюсном приближении $r_\sigma^{pole}=0$, т.е в близи физического значения параметра модели ξ поправки к соотношениям конденсатов малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y.Nambu and G.Jona-Lasinio: Phys.Rev.**122**(1961)345;**124**(1961)2461.
2. В.Г.Вакс, А.И.Ларкин:ЖЭТФ **40**(1961)282; А.Б.Арбузов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов: ДАН СССР **139**(1961)345.
3. T.Hatsuda and T.Kunihiro: Phys.Lett. B**145**(1984)7; V.Bernard, U.-G. Meissner and I.Zahed: : Phys.Rev.**D36**(1987)819; H.Kleinert: in “Understanding the Fundamental Constituents of Matter”, ed. A. Zichichi, Plenum Press, N.Y.,1978, p.289; T. Eguchi and H.Sugawara: Phys.Rev.**D10**(1974)4257; K.Kikkawa: Prog. Theor. Phys. **56**(1976)947; D. Ebert and M.K. Volkov: Z.Phys. C**16**(1983)305.
4. S.P. Klevansky:Rev. Mod.Phys. **64**(1992)649; А.С. Вшивцев, В.Ч. Жуковский, К.Г. Клименко:ЖЭТФ **111**(1997)1921; D. Ebert, K.G. Klimenko, M.A. Vdovichenko and A.S. Vshivtsev: Phys.Rev.**D61**(2000)025005; D. Ebert, K.G. Klimenko:hep-ph/0305149; I.Brevik, D.M. Gitman, S.D. Odintsov: Grav. Cosmol. **3**(1997)100 (hep-th/9611138); D.M. Gitman, S.D. Odintsov, Yu.L. Shil’nov: Phys.Rev.D**54**(1996)2968(hep-th/9604163).
5. R.G. Jafarov and V.E. Rochev: Centr. Eur. J. of Phys.**2**(2004)367(hep-ph/0311339).
6. S.Krewald and K. Nakayama: Annals of Phys. **216**(1992)201.
7. R.G. Jafarov and V.E. Rochev: hep-ph/0406333.
8. E.Babaev: Phys.Rev. **D62**(2000)074020; G.Ripka: Nucl.Phys.**A683**(2001)463.
9. A.E. Radzhabov and M.K. Volkov: hep-ph/0305272.

10. V.E. Rochev: J.Phys. A: Math. Gen.**30**(1997)3671; V.E.Rochev and P.A.Saponov: Int. J.Mod. Phys. **A13**(1998)3649; V.E.Rochev: J.Phys. A: Math. Gen. **33**(2000)7379.
11. V.E. Rochev: in Proc. XIV Int. Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory(QFTHEP'99, Moscow 1999, eds. B.B. Levchenko and V.I. Savrin, Moscow: MSU-Press, 1999, p.572(hep-th/9911033).
12. V.E. Rochev: hep-ph/0312004.

ÖLÇÜLÜ-ANALİTİK REQULYARİZASİYALI NYL MODELİNDƏ AMPLİTUDALARIN POLYUS YAXINLAŞMASINDAN KƏNARDA KVANT FLÜKTUASİYALARI

R.Q.CƏFƏROV

ANNOTASİYA

Ölçülü-analitik requlyarizasiyalı Nambu-Yona-Lazinio modelində orta sahə paylanması çərçivəsində bilokal mənbə formalizmində polyus yaxınlaşmasından kənarda kvark kiral kondensatına skalyar mezonların payları hesablanmışdır.

THE QUANTUM FLUCTUATIONS IN NJL MODEL WITH DIMENSIONAL-ANALITICALLY REGULARIZATION BEYOND THE POLE APPROXIMATION OF THE AMPLITUDE

R.G.JAFAROV

ABSTRACT

In a framework of mean-field expansion in bilocal-source formalism the scalar meson contributions in chiral quark condensate are calculated in Nambu-Jona-Lasinio model with dimensional-analitically regularization beyond pole approximation.