

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,
РАЦИОНАЛЬНО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Н.Б.КЕРИМОВ, Я.Н.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

Рассматривается дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в одном из граничных условий, при этом граничное условие рационально зависит от спектрального параметра. Исследуется базисность в пространстве $L_2(0,1)$ системы собственных функций этого оператора.

Рассмотрим спектральную задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \quad (0.1)$$

$$y(0) \cos \beta = y'(0) \sin \beta, \quad 0 \leq \beta < \pi, \quad (0.2)$$

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = f(\lambda), \quad (0.3)$$

где λ -спектральный параметр, $q(x)$ -действительнозначная непрерывная функция на промежутке $[0,1]$ и

$$f(\lambda) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\lambda - c_k},$$

$a, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N$ -действительные постоянные, причем $a \geq 0$, $b_k > 0$, $c_1 < c_2 < \dots < c_N$, $N \geq 0$. Отметим, что если $f(\lambda) = \infty$ (т.е. при $\lambda = c_k$), то краевое условие (0.3) интерпретируется как условие Дирихле $y(1) = 0$ (см. [1], [2]).

В [1] исследовано существование, асимптотика собственных значений и осцилляционные свойства собственных функций этой краевой задачи. Доказано, что собственные значения задачи (0.1)-(0.3) действительны, просты и образуют бесконечно возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ и $\lambda_0 < c_1$. Кроме того, в этой работе доказано, что если ω_n количество нулей в интервале $(0,1)$ собственной функции $y_n(x)$, соответствующей собственному значению λ_n , то

$\omega_n = n - m_n$, где m_n количество точек c_i , удовлетворяющих неравенству $c_i \leq \lambda_n$. В частности, $\omega_0 = 0$ и, кроме того, если $\lambda_n > c_N$, то $\omega_n = n - N$.

В [2] исследованы базисные свойства в пространстве $L_2 \oplus C^{N+1}$ (или $L_2 \oplus C^N$) системы вектор-функций, построенных с помощью собственных функций краевой задачи (0.1)-(0.3).

Настоящая работа посвящена изучению базисных свойств в $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи (0.1)-(0.3).

В [3] (см. также [4]) детально исследована базисность в $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad (a - \lambda)y'(1) = b\lambda y(1), \end{aligned}$$

где a и b -положительные постоянные, $q(x)$ -непрерывная неотрицательная функция на промежутке $[0, 1]$.

Базисные свойства в $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad 0 < x < 1, \\ b_0 y(0) &= d_0 y'(0), \\ (a_1 \lambda + b_1)y(1) &= (c_1 \lambda + d_1)y'(1), \end{aligned}$$

где $q(x)$ -действительнозначная функция из класса $C[0, 1]$ и $|b_0| + |d_0| \neq 0$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$, полностью исследованы в [5].

1. О минимальности системы собственных функций краевой задачи (0.1)-(0.3). Нам понадобится следующая

Лемма 1.1. Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N, d_1, d_2, \dots, d_N$ -попарно неравные действительные числа. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & (\mu_0 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_0 - d_N)^{-1} \\ 1 & (\mu_1 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_1 - d_N)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\mu_N - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_N - d_N)^{-1} \end{array} \right\| = \\ & = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq N} (\mu_i - \mu_j) \prod_{1 \leq i < j \leq N} (d_j - d_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}} (\mu_i - d_j)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Известно (см. [6, стр. 112]), что

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} (\mu_0 - d_0)^{-1} & (\mu_0 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_0 - d_N)^{-1} \\ (\mu_1 - d_0)^{-1} & (\mu_1 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_1 - d_N)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mu_N - d_0)^{-1} & (\mu_N - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_N - d_N)^{-1} \end{pmatrix} \right\| = \\
& = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq N} (\mu_i - \mu_j) \prod_{0 \leq i < j \leq N} (d_j - d_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} (\mu_i - d_j)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} 1 & (\mu_0 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_0 - d_N)^{-1} \\ 1 & (\mu_1 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_1 - d_N)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\mu_N - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_N - d_N)^{-1} \end{pmatrix} \right\| = \\
& = - \lim_{d_0 \rightarrow \infty} d_0 \left\| \begin{pmatrix} (\mu_0 - d_0)^{-1} & (\mu_0 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_0 - d_N)^{-1} \\ (\mu_1 - d_0)^{-1} & (\mu_1 - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_1 - d_N)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mu_N - d_0)^{-1} & (\mu_N - d_1)^{-1} & \dots & (\mu_N - d_N)^{-1} \end{pmatrix} \right\| = \\
& = - \lim_{d_0 \rightarrow \infty} d_0 \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq N} (\mu_i - \mu_j) \prod_{0 \leq i < j \leq N} (d_j - d_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} (\mu_i - d_j)} = \\
& = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq N} (\mu_i - \mu_j) \prod_{1 \leq i < j \leq N} (d_j - d_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}} (\mu_i - d_j)}.
\end{aligned}$$

Лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (а) если $a \neq 0$ и $k_0, k_1, \dots, k_N$ - произвольные фиксированные попарно неравные целые неотрицательные числа, то система $\{y_n(x)\} (n=0,1,\dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N)$ минимальна в пространстве $L_2(0,1)$,
- (б) если $a = 0$ и $k_1, \dots, k_N$ - произвольные фиксированные попарно неравные целые неотрицательные числа, то система $\{y_n(x)\} (n=0,1,\dots; n \neq k_1, \dots, k_N)$ минимальна в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство. Отметим, что справедливость утверждения (a) в случае $N = 0$ следует из теоремы 1.1 работы [5]; справедливость утверждения (b) при $N = 0$ хорошо известна (нетрудно заметить, что в последнем случае получается классическая задача Штурма-Лиувилля). Таким образом, будем рассматривать только случай $N \geq 1$.

Заметим, что при $0 \leq x \leq 1$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}(y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x)) = (\lambda_n - \lambda_m)y_m(x)y_n(x).$$

Интегрируя это тождество по x в пределах от 0 до 1, получим

$$(\lambda_n - \lambda_m)(y_n, y_m) = (y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x))\Big|_0^1, \quad (1.1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в пространстве $L_2(0, 1)$.

Из условия (0.2) следует, что при всех $n, m = 0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$y_n(0)y'_m(0) - y_m(0)y'_n(0) = 0. \quad (1.2)$$

Пусть $a \neq 0$. Достаточно доказать существование системы $\{u_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N$), являющейся биортогонально сопряженной к системе $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N$) в пространстве $L_2(0, 1)$.

Пусть $\lambda_n, \lambda_m \neq c_j$ для $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда из условия (0.3) следует, что

$$\begin{aligned} y_n(1)y'_m(1) - y_m(1)y'_n(1) &= (f(\lambda_n) - f(\lambda_m))y_m(x)y_n(x) = \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \left(a + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{(\lambda_n - c_k)(\lambda_m - c_k)} \right) y_n(1)y_m(1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предположим, что $\lambda_n = c_s$ при некотором $s \in \{1, 2, \dots, N\}$. Тогда в силу (0.3) $y_n(1) = 0$. Отсюда при $\lambda_m \neq c_s$ ($m = 0, 1, \dots$) получим

$$y_n(1)y'_m(1) - y_m(1)y'_n(1) = -y'_n(1)y_m(1). \quad (1.4)$$

Из сопоставления (1.1)-(1.4) следует, что при $m \neq n$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} (y_n, y_m) &= \\ &= \begin{cases} - \left(a + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{(\lambda_n - c_k)(\lambda_m - c_k)} \right) y_n(1)y_m(1), & \text{если } \lambda_n, \lambda_m \neq c_1, \dots, c_N; \\ \frac{y'_n(1)y_m(1)}{\lambda_m - c_s}, & \text{если } \lambda_n = c_s. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пусть $\lambda_k \neq c_j$ при всех $k = 0, 1, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, N$. Элементы системы $\{u_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N$) определим представлением

$$u_n(x) = \frac{A_{n, k_0, \dots, k_N}(x)}{B_n \cdot \Delta}, \quad (1.6)$$

где

$$A_{n,k_0,\dots,k_N}(x) = \left\| \begin{array}{cccccc} y_n(x) & y_n(1) & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_1} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_2} & \dots & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_N} \\ y_{k_0}(x) & y_{k_0}(1) & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_1} & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_N} \\ y_{k_1}(x) & y_{k_1}(1) & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_1} & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{k_N}(x) & y_{k_N}(1) & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_1} & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_N} \end{array} \right\|, \quad (1.7)$$

$$B_n = \|y_n\|^2 + \left(a + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{(\lambda_n - c_k)^2} \right) y_n^2(1), \quad (1.8)$$

$$\Delta = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq N} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} (c_j - c_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}} (\lambda_{k_i} - c_j)} \cdot \prod_{0 \leq i \leq N} y_{k_i}(1). \quad (1.9)$$

Проверим равенство $(u_n, y_m) = \delta_{n,m}$ ($n, m = 0, 1, \dots; \quad n, m \neq k_0, k_1, \dots, k_N$), где $\delta_{n,m}$ -символ Кронекера. Действительно, на основании (1.6) и (1.7) имеем

$$(u_n, y_m) = \frac{1}{B_n \cdot \Delta} \left\| \begin{array}{cccccc} (y_n, y_m) & y_n(1) & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_1} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_2} & \dots & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_N} \\ (y_{k_0}, y_m) & y_{k_0}(1) & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_1} & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_N} \\ (y_{k_1}, y_m) & y_{k_1}(1) & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_1} & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_{k_N}, y_m) & y_{k_N}(1) & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_1} & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_N} \end{array} \right\|. \quad (1.10)$$

Используя (1.5) легко проверить, что при $m \neq n$ первый столбец детерминанта, в правой части (1.10), является линейной комбинацией остальных столбцов этого же детерминанта. Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место $(u_n, y_m) = 0$, $n \neq m$.

Пусть в детерминанте, фигурирующего в равенстве (1.10), имеет место $n = m$. Умножая второй столбец на $a \cdot y_n(1)$, а $(k+2)$ -ой столбец

$(k=1,2,\dots,N)$ соответственно на $\frac{b_k y_n(1)}{\lambda_n - c_k}$ и добавляя полученные столбцы к первому столбцу, получаем равенство

$$(u_n, y_n) = \frac{1}{B_n \cdot \Delta} \begin{vmatrix} B_n & y_n(1) & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_1} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_2} & \dots & \frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_N} \\ 0 & y_{k_0}(1) & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_1} & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_N} \\ 0 & y_{k_1}(1) & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_1} & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1} - c_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y_{k_N}(1) & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_1} & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_2} & \dots & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_N} \end{vmatrix}$$

(при этом используется определение (1.8) выражения B_n). Отсюда на основании леммы 1.1 и определения (1.9) числа Δ получим

$$(u_n, y_n) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & (\lambda_{k_0} - c_1)^{-1} & \dots & (\lambda_{k_0} - c_N)^{-1} \\ 1 & (\lambda_{k_1} - c_1)^{-1} & \dots & (\lambda_{k_1} - c_N)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\lambda_{k_N} - c_1)^{-1} & \dots & (\lambda_{k_N} - c_N)^{-1} \end{vmatrix} \cdot \prod_{0 \leq i \leq N} y_{k_i}(1) = 1.$$

Предположим, что некоторые из чисел c_j ($j=1,2,\dots,N$) являются собственными значениями краевой задачи (0.1)-(0.3). Элементы системы $\{u_n(x)\} (n=0,1,\dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N)$ в рассматриваемом случае определим представлением

$$u_n(x) = \frac{A'_{n,k_0,\dots,k_N}(x)}{B'_n \cdot \Delta'}, \quad (1.11)$$

где $A'_{n,k_0,\dots,k_N}(x)$ является детерминантом порядка $N+2$ и получается из детерминанта $A_{n,k_0,\dots,k_N}(x)$, определенного равенством (1.7), следующим образом (здесь же приводим определения чисел B'_n и Δ'):

I. Если $\lambda_{k_t} \neq c_j$ ($\lambda_n \neq c_j$) для всех $j=1,2,\dots,N$, то $(t+2)$ -я строка (соответственно первая строка) не меняется,

II. Если $\lambda_{k_t} = c_s$ ($\lambda_n = c_s$) для некоторых t и s , тогда в $(t+2)$ -ой строке (соответственно в первой строке) все элементы, за исключением первого элемента и элемента вида $\frac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t} - c_s}$ (соответственно $\frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_s}$), заменяются нулями, первый элемент этой строки не меняется, а элемент

$\frac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t} - c_s}$ (соответственно $\frac{y_n(1)}{\lambda_n - c_s}$) заменяется выражением $\left(-\frac{y'_{k_t}(1)}{b_s}\right)$ (соответственно $\left(-\frac{y'_n(1)}{b_s}\right)$);

III. Если $\lambda_n \neq c_j$ для всех $j=1,2,\dots,N$, то $B'_n = B_n$;

IV. Если $\lambda_n = c_s$ для некоторого $s \in \{1,2,\dots,N\}$, то

$$B'_n = \|y_n\|^2 + \frac{(y'_n(1))^2}{b_s};$$

V. Δ' является алгебраическим дополнением элемента, лежащего на пересечении первой строки и первого столбца детерминанта $A'_{n,k_0,\dots,k_N}(x)$.

Докажем, что $\Delta' \neq 0$. Из построения следует, что в детерминанте Δ' каждая строка имеет либо форму $\left(0, \dots, 0, -\frac{y'_{k_t}(1)}{b_s}, 0, \dots, 0\right)$ (в этом случае $\lambda_{k_t} = c_s$), либо форму $\left(y_{k_t}(1), \frac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t} - c_1}, \dots, \frac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t} - c_N}\right)$ (в этом случае $\lambda_{k_t} \neq c_j$ при всех $j=1,2,\dots,N$). Соотношение $\Delta' \neq 0$ очевидным образом вытекает из формы детерминанта Δ' и леммы 1.1.

Доказательство утверждения (a) в рассматриваемом случае аналогично предыдущему.

В случае $a=0$ система $\{u_n(x)\}(n=0,1,\dots; n \neq k_1,\dots,k_N)$ конструируется с помощью вышеприведенной схемы с некоторыми изменениями: в частности, в рассматриваемом случае соответствующие детерминанты $A_{n,k_1,\dots,k_N}(x)$ и $A'_{n,k_1,\dots,k_N}(x)$ являются детерминантами порядка $N+1$ и отличаются от соответствующих детерминантов (см. (1.7) и пункты I, II) отсутствием второй строки и второго столбца.

Теорема 1.1 доказана.

2. О базисности в $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3).

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) *если $a \neq 0$ и $k_0, k_1, \dots, k_N$ -произвольные фиксированные попарно неравные целые неотрицательные числа, то система $\{y_n(x)\}(n=0,1,\dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N)$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(0,1)$,*

(b) *если $a = 0$ и $k_1, \dots, k_N$ -произвольные фиксированные попарно неравные целые неотрицательные числа, то система $\{y_n(x)\}(n=0,1,\dots; n \neq k_1, \dots, k_N)$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(0,1)$.*

Доказательство. В [1] доказано, что

$$\lambda_n = (\pi(n + \nu))^2 + O(1),$$

где

$$\nu = \begin{cases} -N, & \text{если } a \neq 0, \beta = 0; \\ -\frac{1}{2} - N, & \text{если } a \neq 0, \beta \neq 0; \\ \frac{1}{2} - N, & \text{если } a = 0, \beta = 0; \\ -N, & \text{если } a = 0, \beta \neq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Отсюда при достаточно больших n легко следует формула

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n + \nu) + O(1/n). \quad (2.2)$$

Обозначим через $\varphi_1(x, \mu)$ и $\varphi_2(x, \mu)$ фундаментальную систему решений уравнения $u'' - q(x)u + \mu^2 u = 0$, определенную начальными условиями

$$\varphi_1(0, \mu) = 1, \quad \varphi_1'(0, \mu) = i\mu, \quad (2.3)$$

$$\varphi_2(0, \mu) = 1, \quad \varphi_2'(0, \mu) = -i\mu. \quad (2.4)$$

Известно (см. [7] или [8, стр. 59]), что при достаточно больших μ имеет место

$$\varphi_j(x, \mu) = \exp(\mu \omega_j x)(1 + O(1/\mu)) \quad (j = 1, 2), \quad (2.5)$$

где $\omega_1 = -\omega_2 = i$.

Собственную функцию $y_n(x)$ будем искать в виде

$$y_n(x) = P_n \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \sqrt{\lambda_n}) & \varphi_2(x, \sqrt{\lambda_n}) \\ U(\varphi_1(x, \sqrt{\lambda_n})) & U(\varphi_2(x, \sqrt{\lambda_n})) \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

где

$$P_n = \begin{cases} (i\sqrt{2})^{-1}, & \text{если } \beta = 0; \\ (i\sqrt{2\lambda_n} \sin \beta)^{-1}, & \text{если } \beta \neq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

и для произвольной функции $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ выражение $U(\varphi(x))$ определено равенством

$$U(\varphi(x)) = \varphi(0) \cos \beta - \varphi'(0) \sin \beta. \quad (2.8)$$

Непосредственное вычисление с использованием формул (2.1)-(2.8) показывает, что

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(n-N)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } a \neq 0, \beta = 0; \\ \sqrt{2} \cos\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } a \neq 0, \beta \neq 0; \\ \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{1}{2} - N\right)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } a = 0, \beta = 0; \\ \sqrt{2} \cos(n-N)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } a = 0, \beta \neq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Пусть $a \neq 0, \beta = 0$. Сравним систему

$$\{y_n(x)\} (n=0,1,\dots; n \neq k_0, k_1, \dots, k_N) \quad (2.10)$$

с известной системой

$$\{\sqrt{2} \sin(n-N)\pi x\} (n=N+1, N+2, \dots), \quad (2.11)$$

которая является ортонормированным базисом пространства $L_2(0,1)$. В силу (2.9) для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\|y_n(x) - \sqrt{2} \sin(n-N)\pi x\| \leq \text{const} / n.$$

Отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k_0, \dots, k_N}}^{k^*} \|y_n(x) - \sqrt{2} \sin j_n \pi x\|^2 + \\ + \sum_{n=k^*+1}^{\infty} \|y_n(x) - \sqrt{2} \sin(n-N)\pi x\|^2,$$

где $k^* = \max(k_0, \dots, k_N)$ и числа $j_n (n=0,1,2,\dots, k^*; n \neq k_0, \dots, k_N)$ попарно различны и принимают значения из множества $\{1, 2, \dots, k^* - N\}$. Таким образом, в рассматриваемом случае система (2.10) квадратично близка к системе (2.11). Так как система (2.10) минимальна в пространстве $L_2(0,1)$, то отсюда вытекает утверждение теоремы 2.1 в случае $a \neq 0, \beta = 0$ (см. [9, стр. 440]).

Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Теорема 2.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter. I // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2002). 45, P. 631-645.
2. Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, II // Journal of Computational and Applied Mathematics 148, (2002), P. 147-168.
3. Капустин Н.Ю. Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения 1999, т. 35, No. 8, с. 1024-1027.

4. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О базисности в пространстве L_p системы собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения 2000, т.36, №10, с.1357-1360.
5. Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Сиб. мат. журн. (2003), т. 44, № 5, стр. 1041-1045.
6. Полна Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, часть II, М.: Гостехиздат, 1956, 432 с.
7. Макин А.С. Об одном классе краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференц. уравнения 1999, т. 35, № 8, с. 1058-1066.
8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 528 с.
9. Качмаж Г., Штейнгауз С. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958, 508 с.

SPEKTRAL PARAMETRDƏN RASİONAL ASILI OLAN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN BAZİSLİK XASSƏLƏRİ HAQQINDA

N.B.KƏRİMOV, Y.N.ƏLİYEV

ANNOTASIYA

İşdə sərhəd şərtlərindən biri spektral parametrdən rasional asılı olan Şturm-Liuvil diferensial operatoruna baxılır. Bu operatorun məxsusi funksiyalar sisteminin $L_2(0,1)$ fəzasında bazisliyi araşdırılır.

THE BASIS PROPERTY OF SPECTRAL PROBLEM RATIONALLY DEPENDENT ON THE EIGENPARAMETER

N.B.KERIMOV, Y.N.ALIYEV

ABSTRACT

We consider Sturm-Liouville operator with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter. The basis property in $L_2(0,1)$ of the system of eigenfunctions corresponding to this operator is studied.