

УДК 517.956

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ БЕЗ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Н.А.АЛИЕВ, Ш.Ю.САЛМАНОВА
*Бакинский Государственный Университет,
 Институт Математики и Механики НАНА*
nihan aliev.info @ gmail.com

Работа посвящена исследованию решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка в случае, когда уравнение имеет единственное решение. Исследование проводится с помощью необходимых условий, получаемых из основного соотношения. Это соотношение следует из второй формулы Грина.

Ключевые слова: уравнение, решение, основное соотношение, необходимое условие, граничная задача.

Как известно, при исследовании решений граничных задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения в общем случае число граничных условий совпадает с порядком рассматриваемого уравнения [1], [2]. Излагаемая работа посвящена граничным задачам, для которых не имеет место вышеприведенная закономерность.

Рассмотрим следующее обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$ly \equiv a_0(x)y'(x) + a_1(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

где заданные функции $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $f(x)$ - вещественнозначные непрерывные функции.

Пусть H - пространство вещественнозначных непрерывных функций, определенных на $[0,1]$, со следующим скалярным произведением:

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \quad u(x) \in H, \quad v(x) \in H.$$

Рассмотрим следующее скалярное произведение

$$(ly, z) = \int_0^1 a_0(x)y'(x)z(x)dx + \int_0^1 a_1(x)y(x)z(x)dx,$$

где $a_0(x) \in C^{(1)}(0,1) \cap C[0,1]$, $a_1(x) \in C(0,1)$.

Интегрируя по частям первое слагаемое, имеем следующую формулу Лагранжа:

$$(ly, z) = a_0(x)y(x)z(x) \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 y(x) \left\{ -[a_0(x)z(x)]' + a_1(x)z(x) \right\} dx.$$

Тогда сопряженное дифференциальное выражение примет вид:

$$l^* z = -[a_0(x)z(x)]' + a_1(x)z(x). \quad (2)$$

Для фундаментального решения сопряженного уравнения

$$-a_0(x)z'(x) - [a_0'(x) - a_1(x)]z(x) = g(x), \quad (3)$$

с помощью метода вариации постоянных получим [7]:

$$Z(x, \xi) = -\frac{\theta(x - \xi)}{a_0(\xi)} e^{-\int_{\xi}^x \frac{a_0'(t) - a_1(t)}{a_0(t)} dt}, \quad (4)$$

где

$$\theta(x - \xi) = \begin{cases} 1, & x > \xi, \\ \frac{1}{2}, & x = \xi, \\ 0, & x < \xi \end{cases}$$

- функция Хэвисайда. Следующим этапом является построение основного соотношения.

Для этого, возвращаясь к формуле Лагранжа, заменяя $z(x)$ на фундаментальное решение (4), получим:

$$\int_0^1 f(x)Z(x, \xi)dx = a_0(1)y(1)Z(1, \xi) - a_0(0)y(0)Z(0, \xi) + \int_0^1 y(x)\delta(x - \xi)dx. \quad (5)$$

При (5) учитываем, что $y(x)$ - решение уравнения (1) и (4) - фундаментальное решение сопряженного уравнения (3).

Теперь, исходя из свойства дельта-функции Дирака, из (5) получим:

$$\int_0^1 f(x)Z(x, \xi)dx - a_0(1)y(1)Z(1, \xi) + a_0(0)y(0)Z(0, \xi) = \begin{cases} y(\xi), & \xi \in (0,1), \\ \frac{1}{2}y(0), & \xi = 0, \\ \frac{1}{2}y(1), & \xi = 1, \end{cases} \quad (6)$$

которое назовем основным соотношением.

Определение. Функция, удовлетворяющая уравнению (1) и связанные с этим уравнением необходимые условия, получаемые из основного соотношения называется решением уравнения (1).

Установлены следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $a_0(x)$ непрерывно дифференцируемая, $a_1(x)$ и $f(x)$ непрерывные при $x \in (0,1)$ вещественнозначные функции и

$$\frac{a_0'(t) - a_1(t)}{a_0(t)} \geq 0, \quad t \in (0,1),$$

тогда каждое решение уравнения (1) на интервале $(0,1)$ удовлетворяет соотношениям (6).

Теорема 2. При условиях теоремы 1, если

$$a_0(0) = a_0(1) = 0, \quad (7)$$

то единственное ограниченное решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(\xi) = \int_0^1 f(x) Z(x, \xi) dx .$$

Как видно из теоремы 2, при условиях теоремы 1 и условиях (7) уравнение (1) имеет единственное решение, т.е. для однозначности решения уравнения (1) не нужно задавать граничное условие.

Теорема 3. При условиях теоремы 1, если

$$a_0(1) = 0, \quad (8)$$

то решение уравнения (1) имеют вид:

$$y(\xi) = a_0(0)y(0)Z(0, \xi) + \int_0^1 f(x)Z(x, \xi)dx .$$

В этом случае решение уравнения (1) зависят от $y(0)$.

Как видно из основного соотношения, приведенного в (6),

$$\frac{1}{2}y(0) = a_0(0)y(0)Z(0,0) + \int_0^1 f(x)Z(x,0)dx .$$

Учитывая, что

$$Z(0,0) = -\frac{\theta(0)}{a_0(0)} = -\frac{1}{2a_0(0)}, \quad Z(x,0) = -\frac{1}{a_0(0)} e^{-\int_0^x \frac{a_0'(t) - a_1(t)}{a_0(t)} dt},$$

имеем:

$$\frac{1}{2}y(0) = -\frac{1}{2}y(0) - \frac{1}{a_0(0)} \int_0^1 f(x) e^{-\int_0^x \frac{a_0'(t) - a_1(t)}{a_0(t)} dt} dx ,$$

или же

$$y(0) = -\frac{1}{a_0(0)} \int_0^1 f(x) e^{-\int_0^x \frac{a_0'(t) - a_1(t)}{a_0(t)} dt} dx . \quad (9)$$

Таким образом, несмотря на то, что в этом случае решение уравнения (1),

данное в теореме 3, зависит от $y(0)$, оно определяется с помощью необходимого условия, т.е. задавать $y(0)$ не нужно.

Теперь, предполагая, что мы ничего не знаем о необходимых условиях, и возвращаясь к уравнению (1), будем искать решение стандартным путем.

Умножая уравнение (1) на

$$\frac{1}{a_0(x)} e^{\int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt},$$

получим

$$\left[e^{\int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} y(x) \right]' = \frac{f(x)}{a_0(x)} e^{\int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}.$$

Интегрируя полученное выражение от 0 до x , имеем:

$$y(x) = y(0) e^{-\int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} + \int_0^x \frac{f(\eta)}{a_0(\eta)} e^{\int_0^\eta \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} d\eta. \quad (10)$$

Отсюда следует, что для однозначности решения нужно задавать $y(0)$.

Но как видно из вышеприведенных теорем 2 и 3 для однозначности решения (1) никакого условия не нужно. Если мы зададим $y(0) = y_0 \in R$ как произвольную постоянную, решения уравнения (1) с этим условием $y(0) = y_0$ не будет существовать, потому что необходимое условие (9) не выполняется.

Пример. Рассмотрим следующее уравнение:

$$ly \equiv [(1-x)y(x)]' = 0, \quad x \in (0,1). \quad (11)$$

Интегрируя это уравнение на интервале $(0, x)$, получим:

$$(1-x)y(x) = y(0),$$

которое дает нам $y(x)$ в виде:

$$y(x) = \frac{y(0)}{1-x}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что для любого $y(0)$, (12) является решением уравнения (11). Но, с другой стороны, из основного соотношения как необходимое условие имеем:

$$y(0) = 0,$$

т.е. если $y(0)$ произвольно, то необходимое условие не выполняется. Таким образом, задавая $y(0)$ произвольным образом, в общем случае решение полученной граничной задачи может не существовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962, 351 с.
2. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ 1958, 474 с.
3. Lewy H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. //Ann.Math, 1957, 66 (2), p.155-158 .
4. Aliev N.A., Jahanshahi M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations. // Int.J.Math.Educ.Sci. Technol., 1997, v.28, №3, p.419-425.
5. Hosseini S.M., Aliev N.A. Sufficient conditions for reduction of a BVP for PDE with non-local and global boundary conditions to Fredholm integral equations. (on a rectangular domain) //Applied Mathematics and Computation, 2004, 147, p. 669-685.
6. Bahrami F., Aliev N.A., Hosseini S.M. A method for the reduction of four dimensional mixed problems with general boundary conditions to a system of second kind Fredholm integral equations. //Italian Journal of Pure and applied Mathematics. 2005, №17, pp.91-104.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехиздат, 1954, 526 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971, 512 с.
9. Hassani Oskonei L., Aliev N.A. Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear difference Equations, //International Mathematical Forum, 2008, 3, №33, p.1623-1631.
10. Фатими М.Р., Алиев Н.А. Граничная задача для обыкновенного общего интегродифференциального нагруженного линейного уравнения второго порядка с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничных условиях. /Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского к 90-летию со дня рождения. Тезисы докладов. М., 2009, с.117-118.

SƏRHƏD ŞƏRTİ OLMAYAN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN YEGANƏLİYİ

N.Ə.ƏLİYEV, Ş.Y.SALMANOVA

XÜLASƏ

İş birinci tərtib yeganə həlli olan adi xətti diferensial tənliyin həllinə həsr olunmuşdur. Məsələnin tədqiqi əsas münasibətdən alınan zəruri şərtlərin köməyiylə aparılmışdır.

Açar sözlər: tənlik, əsas münasibət, zəruri şərt, sərhəd məsələsi.

ON UNIQUENESS OF SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM WITHOUT BOUNDARY CONDITIONS

N.A.ALIYEV, Sh.Yu.SALMANOVA

SUMMARY

The work is devoted to the solution of the ordinary linear differential equations of first order having unique solution. The research is carried out by means of necessary conditions received from basic relation.

Key words: equation, principal relationship, necessary condition, boundary value problem.

Принято в редакцию: 05.12.2012 г.

Подписано к печати: 12.12.2012 г.