

УДК 517.95

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет
gasymov-elmagha@rambler.ru

В настоящей работе, применяя метод конечного интегрального преобразования, исследуется смешанная задача для параболических уравнений с нерегулярными граничными условиями. Доказывается теорема о существовании и единственности решение рассматриваемой задачи, а также, для решения получается оценка сверху через правые части смешанной задачи.

Ключевые слова: метод конечного интегрального преобразования, нерегулярные граничные условия, интегральное представление решения.

В [2, 74] мы рассматривали задачу:

Найти решение параболической системы

$$L_i(a(t), x)u_i(x, t) \equiv D_t u_i(x, t) - a(t) \sum_{j=0}^{2p_i} A_{ij}(x) D_x^j u_i(x, t) = f_i(x, t), \quad (1)$$

$$x \in (a_i, b_i), \quad t \in (0, T), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при граничном условии

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\chi_i} \sum_{m=0}^{S_{ji}} a^{1-j}(t) \left\{ \alpha_{jm}^{(i)} D_x^m D_t^j u_i(x, t) \Big|_{x=a_i} + \beta_{jm}^{(i)} D_x^m D_t^j u_i(x, t) \Big|_{x=b_i} \right\} = \varphi(t), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

и начальном условии

$$u_i(x, 0) = \Phi_i(x), \quad x \in (a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где $A_{ij} (j = \overline{0, 2p_i})$ – квадратные матрицы порядка r_i ; a – скалярная функция; $\alpha_{jm}^{(i)}, \beta_{jm}^{(i)} (j = \overline{0, \chi_i}; m = \overline{0, S_{ji}})$ – постоянные матрицы размеров $N \times r_i$ ($N = 2 \sum_{v=1}^n d_v, d_v = p_v r_v$); Φ_i, f_i, u_i – столбцы размера r_i ; φ – столбец размера N ; r_i, p_i, n – натуральные числа; χ_i – или 0 или 1; $S_{ji} (j = \overline{0, \chi_i})$ –

неотрицательные целые числа, меньшие или равные $2p_i - 1$; a_i, b_i ($a_i < b_i$), T ($T > 0$) – конечные числа. Данные задачи (1)-(3) определены в замыканиях вышеуказанных областей.

И доказали следующую [2, 90]

Теорема 2.2. Пусть выполняются ограничения $1^0, 2^0, 3^0$ (или 3^1) и граничные условия (2) правильны. Тогда, если задача (1)-(3) имеет решение, обладающее классическим свойством, то:

I) оно единственное,

II) его можно представить формулой

$$\begin{aligned}
 u_i(x, t) = & \frac{P}{\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathfrak{S}} \lambda^{2p-1} \exp \left[\lambda^{2p} \int_0^t a(\eta) d\eta \right] \left\{ \delta_i(x, \lambda, \gamma_0 + \right. \\
 & + \int_0^t \exp \left[-\lambda^{2p} \int_0^\tau a(\eta) d\eta \right] \varphi(\tau) d\tau - \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} G_{iv}(x, \xi, \lambda) B_v^{-1}(\xi) \times \\
 & \left. \times \left[\Phi_v(\xi) + \int_0^t \exp \left[-\lambda^{2p} \int_0^\tau a(\eta) d\eta \right] f_v(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi \right\} d\lambda, \quad (4) \\
 & x \in (a_i, b_i), \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

где \mathfrak{S} - бесконечная гладкая линия в R_δ , достаточно далекая часть которой совпадает с продолжениями лучей $\arg \lambda = \pm \left(\frac{\pi}{4p} + \delta \right)$, причем в (4) интеграл по линиям \mathfrak{S} понимается в смысле главного значения.

В настоящей работе, в случае нерегулярности краевых условий, излагается способ доказательства того, что функция $u_i(x, t)$ из (4), на самом деле, является решением задачи (1)-(3).

Ради простоты записи мы будем излагать этот способ доказательства на следующем модельном примере.

Постановка задачи. Найти решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

удовлетворяющее нерегулярным граничным условиям

$$\begin{aligned}
 U_1(u) \equiv u|_{x=0} - 2u|_{x=1} &= \varphi_1(t), \\
 U_2(u) \equiv u|_{x=0} + \frac{\partial}{\partial x} u|_{x=0} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} |_{x=1} &= \varphi_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (6)
 \end{aligned}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (7)$$

где $u \equiv u(x, t)$ - искомое решение, T - некоторое положительное число, а остальные – известные функции.

Параметрическая задача, соответствующая (5)-(7) будет [2]

$$y'' - \lambda^2 y = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

$$U_i(y) = \gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

i) Пусть функции $F(x, t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), f(x)$ непрерывны при $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$.

При условиях i) для задачи (5)-(7) выполняются ограничения теоремы 2.2 и, следовательно, согласно формуле (4), имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbf{L}} \Phi_1(x, t, \lambda) d\lambda, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, t, \lambda) = & \lambda \delta \left(x, \lambda, \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau, \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_2(\tau) d\tau \right) - \\ & - \lambda e^{\lambda^2 t} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi - \lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\xi \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

$G(x, \xi, \lambda)$ - функция Грина задачи (8)-(9); $\delta(x, \lambda, \gamma_1, \gamma_2)$ - решение однородного уравнения, соответствующая (8), удовлетворяющая неоднородным условиям (9); \mathbf{L} - гладкая линия в области $R_\delta = \{\lambda : |\lambda| \geq R, |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{4} + \delta\}$, (δ $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$) - некоторое положительное число), достаточно далёкая часть которой совпадает с продолжениями лучей $\arg \lambda = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \delta \right)$.

ii) Пусть $f(x) \in C^2([0, 1])$ и существуют классические производные $\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}$ с включением $\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), F(x, t), \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \in C([0, 1] \times [0, T])$.

iii) Пусть $f(1) = 0; \varphi_1(0) = f(0); \varphi_2(0) = f(0) + f'(0) + \frac{3}{2} f'(1)$.

Положим

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{k=0}^2 \max_{0 \leq \xi \leq 1} |f^{(k)}(\xi)|; \\ \varphi_0(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^1 \max_{0 \leq \tau \leq t} |\varphi_i^{(k)}(\tau)|; \\ F_0(t) &= \sum_{k=0}^1 \max_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \tau \leq t}} \left| \frac{\partial^k F(\xi, \tau)}{\partial \tau^k} \right|. \end{aligned} \quad (12)$$

Имеет место

Теорема. При ограничениях ii) и iii) нерегулярная смешанная задача (5)-(7) имеет единственное классическое решение $u(x, t)$, определяемое формулой (10) и для этого решения имеет место оценка

$$|u(x,t)| \leq C_0[f_0 + \varphi_0(t) + F_0(t)], \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где C_0 - некоторая константа, не зависящая от функции $f(x), \varphi_1(t), \varphi_2(t), F(x,t)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $u(x,t)$, определяемая формулой (10), непрерывна при $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ и для нее справедливо оценка (13). Согласно условиям теоремы

$$\int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_i(\tau) d\tau = -\frac{1}{\lambda^2} \varphi_i(t) + \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda^2 t} \varphi_i(0) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_i'(\tau) d\tau, \quad i=1,2;$$

$$\int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\tau = -\frac{1}{\lambda^2} F(\xi, t) + \frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda^2} F(\xi, 0) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \frac{\partial F(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (11) и пользуясь формулами обращения [2], из (10) имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathcal{L}} \Phi_2(x,t,\lambda) d\lambda, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (15)$$

где

$$\Phi_2(x,t,\lambda) = e^{\lambda^2 t} [I_1(x,\lambda) - I_2(x,\lambda) - I_3(x,\lambda)] + I_4(x,t,\lambda) - I_5(x,t,\lambda); \quad (15_1)$$

$$I_1(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} \delta(x,\lambda, \varphi_1(0), \varphi_2(0));$$

$$I_2(x,\lambda) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi;$$

$$I_3(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) F(\xi,0) d\xi; \quad (16)$$

$$I_4(x,t,\lambda) = \frac{1}{\lambda} \delta \left(x, \lambda, \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_1'(\tau) d\tau, \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_2'(\tau) d\tau \right);$$

$$I_5(x,t,\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) d\xi \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \frac{\partial F(\xi,\tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Теперь займемся оценками функции Грина. Знаменателем функции Грина будет

$$\Delta(\lambda) = 2 - 6\lambda e^{-\lambda} - 2e^{-2\lambda}. \quad (17)$$

Принимая во внимание неравенство

$$|e^{-\lambda x}| \leq e^{-\varepsilon|\lambda|x}, \quad x \geq 0, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{4} + \delta, \quad (18)$$

где $\varepsilon = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)$, $\delta(0 < \delta < \pi/4)$ - некоторое положительное число; получаем, что для любых вещественных чисел m и n существует такое положительное число $R \equiv R(m,n)$, что

$$|\lambda|^m |e^{-\lambda}| \leq \frac{const}{|\lambda|^n}, \text{ при } \lambda \in R_\delta. \quad (19)$$

Пользуясь формулой

$$\frac{1}{1-x} = 1 + O(x), \text{ при } |x| < 1,$$

и оценками (18),(19) из (17) получаем*

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda^q}\right), \quad (20)$$

q - произвольно фиксированное натуральное число.

Принимая во внимание (17)-(20) для функции Грина имеем

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) = & P(x, \xi, \lambda) + \frac{1}{2} e^{-\lambda x} \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \xi} + 2e^{-\lambda \xi} - 3e^{-\lambda(1-\xi)} \right] + \\ & + \frac{1}{2} e^{-\lambda(1-x)} \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{2} (2e^{-\lambda \xi} - 3e^{-\lambda(1-\xi)}) \right] + G_0(x, \xi, \lambda), \end{aligned} \quad (21)$$

где $P(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|x-\xi|}$, а для остаточного слагаемого $G_0(x, \xi, \lambda)$ имеет место неравенство

$$|G_0(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{const}{|\lambda|^s}, \lambda \in R_\delta, x, \xi \in [0,1]. \quad (22)$$

Замечание. В (22) число s можно взять любое фиксированное натуральное число и причём, как отмечали, для каждого s существует свой $R = R(s)$. В дальнейшем будем предполагать, что в (22) число $s = 3$.

Из (21) следует

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq const, \text{ при } 0 \leq x, \xi \leq 1, \lambda \in R_\delta. \quad (23)$$

Отметим, что

$$\int_0^t |e^{\lambda^2(t-\tau)}| d\tau \leq \frac{M}{|\lambda|^2}, \lambda \in L, \quad (24)$$

где M - некоторая константа.

Учитывая (23) и (24) в (16) получаем

$$I_5(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3} E_5(x, t, \lambda), \lambda \in L, \quad (25)$$

$E_5(x, \xi, \lambda)$ - некоторая функция, непрерывная по совокупности аргументов, удовлетворяющая неравенству

* Здесь и в дальнейшем, если не указывается область изменения λ , то предполагается, что $\lambda \in R_\delta$, где R достаточно большое положительное число; причём, для каждой оценки существует свой R и, например, в (20) для каждого q существует свой $R = R(q)$.

$$|E_5(x, t, \lambda)| \leq C_0 \cdot \max_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \tau \leq t}} \left| \frac{\partial F(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbf{L}, \quad (25)$$

C_0 - некоторая константа, не зависящая от $F(x, t)$.

Аналогично показывается, что

$$I_4(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} E_4(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \mathbf{L}, \quad (26)$$

$$I_3(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} E_3(x, \lambda), \quad \lambda \in R_\delta, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} I_2(x, \lambda) = & -\frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{e^{-\lambda x}}{2} \{2f(0) - 3f(1) + \frac{1}{\lambda} [2f(0) + 2f'(0) + \\ & + 3f'(1)]\} + \frac{1}{2} e^{-\lambda(1-x)} \{f(0) - \frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{\lambda} [2f(1) + f'(0) + \\ & + \frac{3}{2}f'(1)]\} + \frac{1}{\lambda^2} E_2(x, \lambda), \quad \lambda \in R_\delta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} I_1(x, \lambda) = & e^{-\lambda x} [\varphi_1(0) + \frac{1}{\lambda} \varphi_2(0)] + \frac{1}{2} e^{-\lambda(1-x)} \left[\frac{1}{\lambda} \varphi_2(0) + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \varphi_1(0) \right] + \frac{1}{\lambda^2} E_1(x, \lambda); \quad \lambda \in R_\delta, \end{aligned} \quad (29)$$

где E_i - некоторые непрерывные функции по совокупности аргументов и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} |E_4(x, t, \lambda)| \leq C_0 \cdot \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} |\varphi_1'(\tau)| + \max_{0 \leq \tau \leq t} |\varphi_2'(\tau)| \right), \\ x \in [0, 1], \quad 0 \leq t \leq T, \quad \lambda \in \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (26_1)$$

$$|E_3(x, \lambda)| \leq C_0 \cdot \max_{0 \leq \xi \leq 1} |F(\xi, 0)|; \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in R_\delta, \quad (27_1)$$

$$|E_2(x, \lambda)| \leq C_0 \cdot f_0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \in R_\delta, \quad (28_1)$$

$$|E_1(x, \lambda)| \leq C_0 \cdot \left(|\varphi_1(0)| + |\varphi_2(0)| \right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \in R_\delta, \quad (29_1)$$

где C_0 - некоторая константа, не зависящая от $f(x), \varphi_1(t), \varphi_2(t), F(x, t)$.

Подставляя (25)-(29) в (15₁) получаем

$$\Phi_2(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} f(x) + \Phi_3(x, t, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} Q(x, t, \lambda); \quad (30)$$

где

$$\Phi_3(x, t, \lambda) = e^{\lambda t} \left[e^{-\lambda x} \left(A_1 + \frac{B_1}{\lambda} \right) + e^{-\lambda(1-x)} \left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda} \right) \right];$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \varphi_1(0) - f(0) + \frac{3}{2} f(1); \\
B_1 &= \varphi_2(0) - f(0) - f'(0) - \frac{3}{2} f'(1); \\
A_2 &= A_1 / 2; \quad B_2 = (B_1 - A_1) / 2 - f(1) / 4; \\
Q(x, t, \lambda) &= e^{\lambda t} [E_1(x, \lambda) - E_2(x, \lambda) - E_3(x, \lambda)] + \\
&\quad + E_4(x, t, \lambda) - \frac{1}{\lambda} E_5(x, t, \lambda). \tag{31}
\end{aligned}$$

Из ограничения iii) следует, что

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0,$$

что влечет за собой тождество

$$\Phi_3(x, t, \lambda) \equiv 0. \tag{32}$$

Подставляя (30) в (15) и принимая во внимание (32) и равенство [1],[2]

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda = \pi \sqrt{-1}, \quad t > 0,$$

имеем

$$u(x, t) = f(x) + \frac{1}{\pi \sqrt{-1}} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda^2} Q(x, t, \lambda) d\lambda, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{33}$$

Из вышеизложенного следует, что функция $Q(x, t, \lambda)$ при $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $\lambda \in R_{\delta}$ непрерывна и имеет место неравенство:

$$|Q(x, t, \lambda)| \leq C_0 [f_0 + \varphi_0(t) + F_0(t)], \quad x \in [0, 1], \quad 0 \leq t \leq T, \quad \lambda \in L.$$

Следовательно, из (33) получаем, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (33) (или (10)), при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$ непрерывна и для нее имеет место оценка (13). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1951, 606 с.
2. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования и его приложения. Баку: Элм, 2009, 432 с.

PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QEYRİ-REQULYAR SƏRHƏD ŞƏRTLİ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ SONLU İNTEQRAL ÇEVİRMƏ METODUNUN TƏTBİQİ

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə sonlu inteqral çevirmə metodunun tətbiqlə parabolik tənliklər üçün qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələnin həlli tədqiq olunur. Baxılan məsələnin həllinin varlığı

və yeganəliyi isbat edilir və bu həll üçün qarışıq məsələnin sağ tərəfi vasitəsilə yuxarıdan qiymətləndirilmə alınır.

Açar sözlər; sonlu integral çevirmə metodu, qeyri-requlyar sərhəd şərtləri, həllin integral şəklində verilməsi.

APPLICATION OF THE METHOD OF INTEGRAL TRANSFORMATION TO THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH IRREGULAR BOUNDARY CONDITIONS

E.A.GASIMOV

SUMMARY

In the present paper, applying the method of finite integral transformation we investigate a mixed problem for parabolic equations with irregular boundary conditions. A uniqueness and existence theorem of the solution of the considered problem is proved. For the solution, we get an upper bound by the right sides of the mixed problem.

Key words: finite integral transformation method, irregular boundary conditions, the solution in the integral form.

Принято в редакцию: 06.12.2012 г.

Подписано к печати: 12.12.2012 г.