BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012

УДК 517.977

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Г.Ф.КУЛИЕВ, В.Б.НАЗАРОВА
Бакинский Государственный Университет
vera_nazarova@rambler.ru

В работе рассматривается задача полного гашения поперечных колебаний упругого стержня с помощью граничных управлений. Показывается, что с помощью определенных граничных управляющих воздействий начальные возмущения можно погасить за конечное время.

Ключевые слова: уравнение колебаний, упругий стрежень, граничные управления, время успокоения.

Задачи управления колебательными процессами имеют многочисленные приложения [1], [2], [3], [4], [5]. Среди этих задач, задачи управления для уравнения колебаний упругого стержня занимают особое место в связи их прикладной значимостью. Отметим, что к уравнению поперечных колебаний стержня приходят во многих задачах о колебаниях стержней, в задаче о собственных колебаниях камертона, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибраций кораблей [6].

Рассмотрим задачу полного гашения поперечных колебаний стержня за конечное время с помощью граничных управлений.

Пусть управляемый процесс в прямоугольнике $Q=\{0<x<l, 0<t<T\}$ описывается краевой задачей:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), 0<x<l, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu_0(t), \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=\mu_2(t), 0<t<T, \tag{3}$$

$$u(l,t)=\nu_0(t),\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=\nu_2(t),0<t<T. \qquad (4)$$

Здесь предполагается, что данные задачи (1)-(4) удовлетворяют условиям:

$\varphi \in W_2^2[0,l], \psi \in W_2^1[0,l], \mu_0 \in W_2^2[0,T], \nu_0 \in W_2^2[0,T], \mu_2 \in L_2[0,T], \nu_2 \in L_2[0,T],$

$\mu_0(0)=\varphi(0), \nu_0(0)=\varphi(l), \mu_0'(0)=\psi(0), \nu_0'(0)=\psi(l),$

а управление $(\mu_0(t),\nu_0(t),\mu_2(t),\nu_2(t))$ принадлежит пространству

$$H=\{(\mu_0(t),\nu_0(t),\mu_2(t),\nu_2(t))\in W_2^2[0,T]\times W_2^2[0,T]\times L_2[0,T]\times L_2[0,T]\}.$$

Под решением задачи (1)-(4), соответствующим управлению $(\mu_0(t),\nu_0(t),\mu_2(t),\nu_2(t))\in H$ будем понимать функцию $u(x,t)$ из $C([0,T];W_2^2(0,l),L_2(0,l))$, удовлетворяющую первым условиям (2),(3),(4) в смысле равенства соответствующих следов и интегральному тождеству

$$\iint_Q\left[-a^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right]dxdt-\int_0^l \psi(x)\eta(x,0)dx-\int_0^T \nu_2(t)\frac{\partial \eta(l,t)}{\partial x}dt+\int_0^T \mu_2(t)\frac{\partial \eta(0,t)}{\partial x}dt=0$$

при всех $\eta=\eta(x,t)\in C([0,T];W_2^2(0,l),L_2(0,l)), \eta(0,t)=\eta(l,t)=0, \eta(x,T)=0,$ где $C([0,T];W_2^2(0,l),L_2(0,l))$ − банахово пространство, состоящее из элементов $C([0,T];L_2(0,l))$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ также из $C([0,T];L_2(0,l))$, (см.[7]).

Можно показать, что при каждом управлении $(\mu_0(t),\nu_0(t),\mu_2(t),\nu_2(t))\in H$ решение задачи (1)-(4) существует и единственно в классе $C([0,T];W_2^2(0,l),L_2(0,l))$.

Рассматриваемая задача управления состоит в следующем.

Требуется определить момент времени $T>0$ и соответствующие ему управляющие функции $\mu_k(t)$ и $\nu_k(t), k=0,2,$ такие, чтобы определяемое ими решение $u(x,t)$ краевой задачи (1)-(4) удовлетворяет условиям

$$u(x,T)\equiv 0,\frac{\partial u(x,T)}{\partial t}\equiv 0, 0<x<l. \qquad (5)$$

Как будет показано ниже, в рассматриваемой задаче управления колебаниями стержня с помощью граничных управляющих функций, начальные возмущения можно погасить за конечное время $T=\frac{al^2}{\pi}$, полагая

$\mu_0(t)\equiv 0, \nu_2(t)\equiv 0, \mu_2(t)=\mu_2^0(t), \nu_0(t)=\nu_0^0(t),$

где $\mu_2^0(t)$ и $\nu_0^0(t)$ определяются определенными формулами.

При заданных $\mu_i(t)$ и $\nu_i(t), i=0,2,$ решение задачи (1)-(4) можно представить в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}xdx\ .$$

Умножая обе части уравнения (1) на $\sin\frac{\pi n}{l}x,$ интегрируя полученное равенство по x, с учетом граничных условий приходим к уравнениям для нахождения функций $u_n(t), n=1,2, \ldots$.

$$\frac{l}{2}a^2\ddot{u}_n(t)+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\frac{l}{2}u_n(t)=\frac{\pi n}{l}\left[\nu_2(t)\cos n\pi-\mu_2(t)\right]-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^3\left[\nu_0(t)\cos\pi n-\mu_0(t)\right], n=1,2,\ldots, \quad (6)$$

которые нужно решать с начальными условиями

$$u_n(0)=\varphi_n, \dot{u}_n(0)=\psi_n, \quad (7)$$

где

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\pi nxdx, \qquad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\pi nxdx\ .$$

В уравнениях (6) сделаем замену $\tau=\frac{\pi t}{al}, U_n(\tau)=u_n\left(\frac{al\tau}{\pi}\right).$

Тогда (6) можно представить в виде

$$\ddot{U}_n(\tau)+\left(\frac{\pi n^2}{l}\right)^2U_n(\tau)=\frac{2n}{\pi}\left\{\left[\nu_2\left(\frac{al}{\pi}\tau\right)\cos\pi n-\mu_2\left(\frac{al}{\pi}\tau\right)\right]-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\nu_0\left(\frac{al}{\pi}\tau\right)\cos\pi n-\mu_0\left(\frac{al}{\pi}\tau\right)\right]\right\}, n=1,2,\ldots(6')$$

Решая уравнения (6') при условиях (7), имеем

$$u_n(\tau)=\varphi_n\cos\frac{n^2\pi}{l}\tau+\frac{\psi_n l}{n^2\pi}\sin\frac{n^2\pi}{l}\tau+\frac{2l}{n\pi^2}\int_0^\tau\left\{\left[\nu_2\left(\frac{al}{\pi}s\right)\cos n\pi-\mu_2\left(\frac{al}{\pi}s\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\nu_0\left(\frac{al}{\pi}s\right)\cos\pi n-\mu_0\left(\frac{al}{\pi}s\right)\right]\right\}\sin\frac{n^2\pi}{l}(\tau-s)ds, \quad n=1,2,\ldots$$

Тогда решение задачи (1)-(4) можно представить в виде

$$u(x,t)=u\left(x,\frac{al\tau}{\pi}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\ .$$

Если учесть, что система функций $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,l),$ находим, что условия (5) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\varphi_n \cos\frac{n^2\pi}{l}\frac{\pi T}{al}+\frac{l}{n^2\pi}\psi_n \sin\frac{n^2\pi}{l}\frac{\pi T}{al}+\frac{2l}{n\pi^2}\int_0^{\frac{\pi T}{al}}\left\{\left[\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n-\mu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\nu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n-\mu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]\right\}\sin\frac{n^2\pi}{l}\left(\frac{\pi T}{al}-s\right)ds=0, \quad (8)$$

$$-\varphi_n\frac{n^2\pi}{l}\sin\frac{n^2\pi}{l}\frac{\pi T}{al}+\psi_n\cos\frac{n^2\pi}{l}\frac{\pi T}{al}+\frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi T}{al}}\left\{\left[\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n-\mu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\nu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n-\mu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]\right\}\cos\frac{n^2\pi}{l}\left(\frac{\pi T}{al}-s\right)ds=0, \quad n=1,2,\ldots \quad (9)$$

Если в равенствах (8) и (9) положить $\frac{\pi T}{al^2}=1$ или $T=\frac{al^2}{\pi}$ и учесть, что $\cos n\pi\sin\pi n^2(1-s)=-\sin n^2\pi s$, $\cos n\pi\cos n^2\pi(1-s)=\cos n^2\pi s$, то их можно записать в виде

$$(-1)^n\varphi_n+\frac{2l}{n\pi^2}\int_0^l\left\{\left[\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n\sin\frac{n^2\pi}{l}(l-s)-\mu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\sin\frac{n^2\pi}{l}(l-s)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\nu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n\sin\frac{n^2\pi}{l}(l-s)-\mu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\sin\frac{n^2\pi}{l}(l-s)\right]\right\}ds=0, \quad (10)$$

$$(-1)^n\psi_n+\frac{2n}{\pi}\int_0^l\left\{\left[\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n\cos\frac{n^2\pi}{l}(l-s)-\mu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\frac{n^2\pi}{l}(l-s)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\nu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\pi n\cos\frac{n^2\pi}{l}(l-s)-\mu_0\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\frac{n^2\pi}{l}(l-s)\right]\right\}ds=0. \quad (11)$$

Таким образом, получаем два уравнения относительно четырех неизвестных функций $\mu_i(t)$ и $\nu_i(t), i=0,2.$

Положим $\mu_2(t)\equiv 0, \nu_0(t)\equiv 0.$

В этом случае уравнения (10) и (11) принимают вид

$$(-1)^n\varphi_n-\frac{2l}{n\pi^2}\int_0^l\left\{\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\right\}\sin\frac{n^2\pi}{l}sds=0, \quad (12)$$

$$(-1)^n \psi_n - \frac{2n}{\pi}\int_0^l \left\{ -\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\right\}\cos\frac{n^2\pi}{l} sds = 0. \quad (13)$$

Так, как

$$\int_0^l \nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\cos\frac{n^2\pi}{l} sds = -\frac{l}{n^2\pi}\int_0^l \frac{d}{ds}\left[\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]\sin\frac{n^2\pi}{l} sds,$$

$$\int_0^l \mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\cos\frac{n^2\pi}{l} sds = -\frac{l}{n^2\pi}\int_0^l \frac{d}{ds}\left[\mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\right]\sin\frac{n^2\pi}{l} sds,$$

то уравнение (13) можно представить в виде

$$(-1)^n\psi_n - \frac{2l}{n\pi^2}\int_0^l \frac{d}{ds}\left[\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]\sin\frac{n^2\pi}{l} sds - \frac{2n}{l}\int_0^l \frac{d}{ds}\left[\mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\right]\sin\frac{n^2\pi}{l} sds = 0. \ (14)$$

Функции $\mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)$ и $\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)$ разложим в ряды Фурье по системе $\left\{\sin\frac{n\pi}{l} s\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_{0n}\sin\frac{n\pi}{l} s, \qquad \nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_{2n}\sin\frac{n\pi}{l} s,$$

где

$$\mu_{0n} = \frac{2}{l}\int_0^l \mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\sin\frac{n\pi}{l} sds, \qquad \nu_{2n} = \frac{2}{l}\int_0^l \nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right)\sin\frac{n\pi}{l} sds.$$

Тогда можно записать

$$\mu_0 = \left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right) = \mu_0^0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right) + \mu_0^1\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right),$$

$$\nu_2\left(\frac{als}{\pi}\right) = \nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right) + \nu_2^1\left(\frac{als}{\pi}\right),$$

где

$$\mu_0^0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_{0n^2}\sin\frac{n^2\pi}{l} s, \qquad \nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_{2n^2}\left(\frac{als}{\pi}\right)\sin\frac{n^2\pi}{l} s,$$

а $\mu_0^1\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)$, $\nu_2^1\left(\frac{als}{\pi}\right)$ определяются остальными слагаемыми соответствующих рядов.

Умножим равенства (12) и (14) на $\sin\frac{n^2\pi}{l} s$ и просуммируем их по всем $n = 1,2,...$. В итоге будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\varphi_n n\pi^2\sin\frac{n^2\pi}{l}s-l^2\nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right)+l^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\mu_{0n^2}\sin\frac{n^2\pi}{l}s=0, \qquad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\psi_n n\pi^2 l\sin\frac{n^2\pi}{l}s-l^3\frac{d}{ds}\left[\nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]-l\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2\mu'_{0n^2}\sin\frac{n^2\pi}{l}s=0\,, \qquad (16)$$

где

$$\mu'_{0n^2}=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{d}{ds}\left[\mu_0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)\right]\sin\frac{n^2\pi}{l}sds.$$

Обозначим

$$\varphi^0(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\pi^2\varphi_n\sin\frac{n^2\pi}{l}s, \qquad (17)$$

$$\psi^0(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\pi^2 l\psi_n\sin\frac{n^2\pi}{l}s. \qquad (18)$$

Отметим, что при выше предполагаемых условиях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, ряды (17) и (18) сходятся по крайней мере в $W_2^1(0,1)$ и $L_2(0,1)$, соответственно.

Сумму
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\mu_{0n^2}\sin\frac{n^2\pi}{l}s$$
обозначим через $g(s)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2\mu'_{0n^2}\sin\frac{\pi n^2}{l}s=g'(s).$$

Поэтому (15) и (16) можно представить в виде

$$g(s)-\nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right)=\frac{\varphi^0(s)}{l^2}, \qquad (19)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right)\right]+\frac{g'(s)}{l^2}=\frac{\psi^0(s)}{l^3}. \qquad (20)$$

Интегрируя равенство (20) в пределах от 0 до s, будем иметь

$$\nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right)+\frac{g(s)}{l^2}=\frac{1}{l^3}\int_0^s\psi^0(\tau)d\tau+C, \qquad (21)$$

где C- произвольная постоянная.

Решая систему уравнений (19) и (21), получаем

$$g(s)=\frac{l^2}{l^2+1}\left[\frac{\varphi^0(s)}{l^2}+\frac{1}{l^3}\int_0^s\psi^0(\tau)d\tau+C\right], \qquad (22)$$

$$\nu_2^0\left(\frac{als}{\pi}\right)=-\frac{\varphi^0(s)}{l^2(1+l^2)}+\frac{1}{l(1+l^2)}\int_0^s\psi^0(\tau)d\tau+\frac{Cl^2}{1+l^2}.$$

В выражении ν_2^0 произведем замену $\frac{als}{\pi}=t$, тогда

$$\nu_2^0(t)=-\frac{\varphi^0\left(\frac{\pi t}{al}\right)}{l^2(1+l^2)}+\frac{1}{l(1+l^2)}\int_0^{\frac{\pi t}{al}}\psi^0(\tau)d\tau+\frac{Cl^2}{1+l^2}, \tag{23}$$

Теперь по функции $g(t)$ можно определить $\mu_0^0(t)$.
Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\mu_{0n^2}\sin\frac{n^2\pi}{l}s=g(s),$$

отсюда получаем, что

$$\mu_{0n^2}=\frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l g(s)\sin\frac{n^2\pi}{l}sds.$$

Так как $g(s)$ функция из (22), значит коэффициенты Фурье μ_{0n^2} функции $\mu_0^0\left(\frac{al(l-s)}{\pi}\right)$ известны, следовательно

$$\mu_0^0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{0n^2}\sin\frac{n^2\pi t}{l} \tag{24}$$

известная функция.
Таким образом, доказана

Теорема. В рассматриваемой задаче управления колебаниями стержня с помощью граничных управляющих функций, начальные возмущения можно погасить за конечное время $T=\frac{al^2}{\pi}$, полагая $\mu_2(t)\equiv 0, \nu_0(t)\equiv 0,\ \mu_0(t)=\mu_0^0(t), \nu_2(t)=\nu_2^0(t)$, где $\mu_0^0(t)$ и $\nu_2^0(t)$ определяются формулами (22), (23), (24), (17) ,(18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 474 с.
2. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 162 с.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977, 480 с.
4. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями (обзор) // Оптимизация, управление, интеллект. 2000, №5, с.112-121.
5. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004, 504 с.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
7. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московского Университета, 1989.

ELASTİKİ ÇUBUĞUN RƏQSLƏRİNİN İDARƏOLUNMASI MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV, V.B.NAZAROVA

XÜLASƏ

İşdə elastiki çubuğun rəqslərinin sərhəd idarəedicilәri vasitəsilə tam söndürülməsi məsələsinə baxılır. Göstərilir ki, müəyyən sərhəd idarəedicilərinin köməyilə başlanğıc həyəcanlanmaları sonlu zaman müddətində söndürmək olar.

Açar sözlər: idarəetmə məsələsi, elastiki çubuq, sərhəd idarəediciləri, sükunət zamanı.

CONTROL PROBLEM OF ELASTIC ROD OSCILLATIONS

H.F.GULIYEV, V.B.NAZAROVA

SUMMARY

The paper studies the problem of full suppressing of transverse oscillations of elastic rod with the aid of boundary controls. It is shown that with the aid of the determined boundary control actions initial disturbances can be defaced in a final time.

Key words: oscillation equation, elastic rod, boundary controls, transient time.

Принято в редакцию: 20.11.2012 г.
Подписано к печати: 12.12.2012 г.