BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2012***

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М.А.КУЛИЕВ, Н.А.ГАСЫМОВА

Бакинский Государственный Университет

nara-anar@mail.ru

В работе с помощью обобщённого принципа сжатых отображений доказаны теоремы существования и единственности классического решений многомерной обратной краевой задачи для системы параболо-гиперболических уравнений в ограниченной области.

Ключевые слова: сжатое отображение, существование, единственность, классическое решение

В работе исследуется классическое решение многомерной обратной краевой задачи для системы параболо-гиперболических уравнений в ограниченной области. Предполагается, что неизвестные коэффициенты зависят от аргумента t. А именно, рассматривается задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Au(x,t) = a_1(t)b(x,t)u(x,t) + c_1(t)d(x,t)v(x,t) + f_1(t)F(x,t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - Av(x,t) = a_2(t)\tilde{b}(x,t)u(x,t) + c_2(t)\tilde{d}(x,t)v(x,t) + f_2(t)G(x,t), \qquad (2)$$

$$(x,t) \in \overline{D}_T = \overline{\Omega} \times [0,T],$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; x \in \overline{\Omega}, \qquad (3)$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \; \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \; x \in \overline{\Omega}, \qquad (4)$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0, \; v(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0, \; \Gamma_T = S \times [0,T], \qquad (5)$$

$$u(x^i,t) = h_i(t) \quad (i = 1,2,3), \quad t \in [0,T], \qquad (6)$$

$$v(x^i,t) = g_i(t) \quad (i = 1,2,3), \quad t \in [0,T], \qquad (7)$$

где $0 < T < +\infty$; Ω - произвольная ограниченная n-мерная область, $n \le 2$, S- граница области Ω, Γ_T- боковая поверхность цилиндра

$D_T=\Omega\times[0,T]$, x^i $(i=1,2,3)$ - различные фиксированные точки из Ω, а оператор A имеет вид:

$$Au(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)-K(x)u(x,t), \qquad (8)$$

причём всюду в $\overline{\Omega}$ функций $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $K(x)\geq 0$ - измеримы, ограничены в Ω и $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $\mu=const>0$, ξ_i $(i=\overline{1,n})$ - любые действительные числа; функции $b(x,t),\tilde{b}(x,t),d(x,t)$, $\tilde{d}(x,t),F(x,t),G(x,t),\varphi(x),\tilde{\varphi}(x),\psi(x)$, $h_i(t)$ и $g_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ - заданные, а $u(x,t)$, $v(x,t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ - искомые.

Определение. Систему $\{u(x,t),v(x,t),a_1(t),a_2(t),c_1(t),c_2(t),f_1(t),f_2(t)\}$ назовём классическим решением задачи (1)-(7), если выполняются следующие условия:

1. Функция $u(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{x_ix_j}(x,t)$ $(i,j=\overline{1,n})$ в $\overline{D}_T$.
2. Функция $v(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{D}_T$.
3. Функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны на $[0,T]$.
4. Все условия (1)-(7) удовлетворяются в обычном смысле.

С целью исследования задачи (1)-(7) рассмотрим следующие пространства.

1) Обозначим через $B_{2,T}^k$ совокупность всех функций $u(x,t)$ вида $u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\mu_s(x)$, рассматриваемых в области $\overline{Q}_T$, где функции $u_s(t)$ непрерывны на $[0,T]$ и

$$\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^k\max_{0\leq t\leq T}|u_s(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\equiv I_T(u)<+\infty,$$

здесь $k\geq 1$, $0>-\lambda_1^2\geq-\lambda_2^2\geq\ldots$ и $\mu_s(x)$ $(s=1,2,\ldots)$ - собственные значения и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ обобщённые собственные функции первой однородной краевой задачи для оператора A в Ω. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=I_T(u)$.

2) Через $B_{2,T}^{k,k-1}$ обозначим совокупность всех функций $u(x,t)$ вида $u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\mu_s(x)$, с непрерывно дифференцируемыми на $[0,T]$ $u_s(t)$ $(s=1,2,\ldots)$ такими, что

$$\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^k \max_{0\le t\le T}|u_s(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{k-1}\max_{0\le t\le T}|u_s'(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\equiv R_T(u)<+\infty .$$

Нормы в этом множестве определим так: $\|u\|=R_T(u)$. Известно [3], что все эти пространства банаховы.

Предположим, что функции $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $K(x)$, $b(x,t)$, $\tilde{b}(x,t)$, $d(x,t)$, $\tilde{d}(x,t)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t)$ и $g_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функция $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ раза, а функция $K(x)\ge 0$ $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.
2. Область Ω является нормальной [2] и $S\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$.
3. Собственные функции $\mu_s(x)$ оператора A при граничном условии $\mu_k(x)\big|_S=0$ $(k=1,2,...)$ $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.
4. Функции $\varphi(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)$, $\varphi(x)\big|_S=A\varphi(x)\big|_S=...=A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\varphi(x)\big|_S=0$,

$$\tilde{\varphi}(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega),\ \tilde{\varphi}(x)\big|_S=A\tilde{\varphi}(x)\big|_S=...=A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\tilde{\varphi}(x)\big|_S=0,$$

$$\psi(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega),\ \psi(x)\big|_S=A\psi(x)\big|_S=...=A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\psi(x)\big|_S=0.$$

5. Функции $\dfrac{\partial^i b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\dfrac{\partial^i \tilde{b}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\dfrac{\partial^i d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ $\left(i=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]+2}\right)$ принадлежат пространству $C(\overline{D}_T)$ и $\dfrac{\partial^j b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}=0$, $\dfrac{\partial^j \tilde{b}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}=0$, $\dfrac{\partial^j d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}=0$, $\dfrac{\partial^j \tilde{d}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}=0$ $\left(t\in[0,T],\ x\in S;\ j=\overline{0,2\left[\frac{n+2}{2}\right]}\right)$.
6. Функции $F(x,t)$, $G(x,t)$ принадлежат пространству $W_{x,t,2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)$ и

$$F(x,t)\big|_{\Gamma_T}=AF(x,t)\big|_{\Gamma_T}=...=A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}F(x,t)\Big|_{\Gamma_T}=0,$$

$$G(x,t)\big|_{\Gamma_T}=AG(x,t)\big|_{\Gamma_T}=...=A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}G(x,t)\Big|_{\Gamma_T}=0.$$

7. Функции $h_i(t)\neq 0$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, $\forall t\in[0,T]$, $h_i(0)=\varphi(x^i)$, $(i=\overline{1,3})$, $g_i(t)\neq 0$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и $g_i(0)=\tilde{\varphi}(x^i), g_i'(0)=\psi(x^i),\ i=\overline{1,3}$.

8. $$\Delta(t)=\begin{vmatrix} b(x^1,t)h_1(t) & d(x^1,t)g_1(t) & F(x^1,t)\\ b(x^2,t)h_2(t) & d(x^2,t)g_2(t) & F(x^2,t)\\ b(x^3,t)h_3(t) & d(x^3,t)g_3(t) & F(x^3,t)\end{vmatrix}\neq 0,\quad \forall t\in[0,T],$$

$$\tilde{\Delta}(t)=\begin{vmatrix} \tilde{b}(x^1,t)h_1(t) & \tilde{d}(x^1,t)g_1(t) & G(x^1,t)\\ \tilde{b}(x^2,t)h_2(t) & \tilde{d}(x^2,t)g_2(t) & G(x^2,t)\\ \tilde{b}(x^3,t)h_3(t) & \tilde{d}(x^3,t)g_3(t) & G(x^3,t)\end{vmatrix}\neq 0,\quad \forall t\in[0,T].$$

При выполнении условий 1-8, применяя метод Фурье и учитывая условия (6) и (7), решение задачи (1)-(7) сведём к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t}\mu_k(x^i)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_\Omega [a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+$$
$$+c_1(\tau)d(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_1(\tau)F(\xi,\tau)]e^{-\lambda_k^2(t-\tau)}\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x),\qquad (9)$$

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_\Omega [a_2(\tau)\tilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+$$
$$+c_2(\tau)\tilde{d}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)]\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x),\qquad (10)$$

$$\begin{cases} a_1(t)=\dfrac{1}{\Delta(t)}\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i1}\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t),\\ c_1(t)=\dfrac{1}{\Delta(t)}\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i2}\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t),\\ f_1(t)=\dfrac{1}{\Delta(t)}\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i3}\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t),\end{cases}\qquad (11)$$

$$\begin{cases} a_2(t)=\dfrac{1}{\tilde{\Delta}(t)}\sum\limits_{i=1}^{3}\tilde{A}_{i1}\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t),\\ c_2(t)=\dfrac{1}{\tilde{\Delta}(t)}\sum\limits_{i=1}^{3}\tilde{A}_{i2}\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t),\\ f_2(t)=\dfrac{1}{\tilde{\Delta}(t)}\sum\limits_{i=1}^{3}\tilde{A}_{i3}\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t),\end{cases}\qquad (12)$$

где $\quad \Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t)=h_i'(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t}\mu_k(x^i)+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\ ^2\int_0^t\int_\Omega[a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_1(\tau)d(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_1(\tau)F(\xi,\tau)]\times$$

$$\times e^{-\lambda_k{}^2(t-\tau)}\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x^i),\quad (i=\overline{1,3}),$$

$$\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t)=g_i''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\mu_k(x^i)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\psi_k\sin\lambda_k t\mu_k(x^i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_\Omega\lambda_k[a_2(\tau)\tilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_2(\tau)\tilde{d}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)]\times$$

$$\times\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x^i),\quad (i=\overline{1,3}),$$

$A_{ij}(t)$ - алгебраическое дополнение элемента b_{ij} определителя $\Delta(t)$, $\tilde{A}_{ij}(t)$ - алгебраическое дополнение элемента $\tilde{b}_{ij}$ определителя $\tilde{\Delta}(t)$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия 1-8. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(7) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Запишем систему (9)-(12) в виде

$$Z=LZ, \tag{13}$$

где $\quad Z=\{u(x,t),v(x,t),a_1(t),a_2(t),c_1(t),c_2(t),f_1(t),f_2(t)\}$,

$$LZ=\left(L_1(z),L_2(z),L_3(z),L_4(z),L_5(z),L_6(z),L_7(z),L_8(z)\right),$$

причём компоненты $L_i(z)$ $(i=\overline{1,8})$ оператора LZ равны правым частям уравнений (9)-(12), соответственно. А это означает, что мы должны найти неподвижную точку оператора L в пространстве

$$E_T=B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}\times B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}\times(C[0,T])^6,$$

причём норму в E_T определим так:

$$\left\|\left(u,v,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\right)\right\|_{E_T}=\|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}+\|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+\sum_{i=1}^{6}\|a_i\|_{C[0,T]}.$$

Рассмотрим оператор $L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)$ в шаре $K_R\left(\|z\|_{E_T}\le R\right)$ пространства E_T, где

$$C\left(\|\varphi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)}+\|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)}+\|\psi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)}\right)+\left(\min_{0\le t\le T}|\Delta(t)|\right)^{-1}\cdot\sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left[\|h_i''(t)\|_{C[0,T]}+C\left(\|\varphi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x_i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]+\left(\min_{0\le t\le T}|\tilde{\Delta}(t)|\right)^{-1}\cdot\sum_{i,j=1}^{3}\|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left[\|g_i''(t)\|_{C[0,T]}+C\left(\|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)}+\|\psi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega)}\right)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]=M<R, \quad (14)$$

где $C>0$ - некоторая постоянная.

Пользуясь условиями 4-8 теоремы и тем, что в Ω $\mu_s(x)=-\frac{1}{\lambda_s^2}A\mu_s(x)$ для любого $(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\in K_R$, имеем

$$\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T}\le\|W_1(x,t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}+\|W_5(x,t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+$$

$$+\sum_{i=2}^{4}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+\sum_{i=6}^{8}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+\sqrt{T}\left[q_1+q_2\sum_{i,j=1}^{3}\left(\|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]}\right)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\|Q(u(x,t),v(x,t),a_1(t),c_1(t),f_1(t))\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)}+\right.$$

$$\left.+\|\tilde{Q}(u(x,t),v(x,t),a_2(t),c_2(t),f_2(t))\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)}\right], \quad (15)$$

где $q_1>0,\ q_2>0$ - некоторые постоянные и

$$W_1(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t}\cdot\mu_k(x), \quad (16)$$

$$W_2(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\cdot\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\cdot\mu_k(x), \quad (17)$$

$$W_{i+1}(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{j=1}^{3}A_{ji}(t)\left[h_i'(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k{}^2\varphi_k e^{-\lambda_k{}^2 t}\mu_k(x_i)\right],\ (i=\overline{1,3}) \quad (18)$$

$$W_5(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\cdot\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\cdot\mu_k(x), \tag{19}$$

$$W_{i+5}(x,t)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(t)}\sum_{j=1}^{3}\tilde{A}_{ji}(t)\left[g_i''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\,2}\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t+\right.$$
$$\left.+\mu_k(x^i)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\psi_k\sin\lambda_k t\cdot\mu_k(x^i)\right],(i=\overline{1,3}) \tag{20}$$

$$Q(u(x,t),v(x,t),a_1(t),c_1(t),f_1(t))=a_1(t)b(x,t)u(x,t)+$$
$$+c_1(t)d(x,t)v(x,t)+f_1(t)F(x,t), \tag{21}$$

$$\tilde{Q}(u(x,t),v(x,t),a_2(t),c_2(t),f_2(t))=a_2(t)\tilde{b}(x,t)u(x,t)+$$
$$+c_2(t)\tilde{d}(x,t)v(x,t)+f_2(t)G(x,t). \tag{22}$$

Пользуясь теоремами вложения С.Л.Соболева и структурой пространства $B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ для любых $u,v\in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ и $t\in[0,T]$, имеем

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\le q_3\|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}\quad\left(i=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]+3}\right),\\ &\left\|\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\le q_4\|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}\quad\left(i=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]+3}\right),\end{aligned} \tag{23}$$

где $q_3>0,q_4>0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u,v,t.

Тогда, с учётом оценки (23), из (15) получаем, что $\forall\, u,v,a_1,a_2,$ $c_1,c_2,\ f_1,f_2\in K_R$:

$$\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T}\le\|W_1(x,t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}+\|W_5(x,t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+\sum_{i=2}^{4}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\sum_{i=6}^{8}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+TK_1\cdot M_1\cdot\Big(\|a_1\|_{C[0,T]}\cdot\|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}+\|c_1\|_{C[0,T]}\cdot\|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+$$
$$+\|f_1\|_{C[0,T]}+\|a_2\|_{C[0,T]}\cdot\|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}+\|c_2\|_{C[0,T]}\cdot\|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+\|f_2\|_{C[0,T]}\Big), \tag{24}$$

где $K_1=q_1+q_2\sum_{i,j=1}^{3}\left(\|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]}+\|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]}\right)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$,

$M_1>0$ - некоторое число.

Из последнего имеем

$$\left\| L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2) \right\|_{E_T} \le M + TK_1M_1 2(2R^2+R). \qquad (25)$$

Так как $M<R$, то из оценки (25) следует, что при достаточно малом $T>0$ выполнено $\left\| L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2) \right\|_{E_T} \le R$, то есть оператор L отображает шар K_R в себя.

Покажем, что некоторая итерация оператора L является сжимающим оператором. Рассмотрим два произвольных элемента W и $\widetilde{W}$ из шара K_R. Построим их образы с помощью последовательных итераций оператора L.

Тогда имеем

$$W_0 = W, W_1 = L(W_0),\dots, W_k = L(W_{k-1}),\dots$$

и

$$\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}, \widetilde{W}_1 = L(\widetilde{W}_0),\dots, \widetilde{W}_k = L(\widetilde{W}_{k-1}),\dots ,$$

где
$$W_k = \{u_k, v_k, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, f_1^{(k)}, f_2^{(k)}\},$$
$$\widetilde{W}_k = \{\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_k, \widetilde{a}_1^{(k)}, \widetilde{a}_2^{(k)}, \widetilde{c}_1^{(k)}, \widetilde{c}_2^{(k)}, \widetilde{f}_1^{(k)}, \widetilde{f}_2^{(k)}\},$$
$$u_0 = u, v_0 = v, a_1^{(0)} = a_1, a_2^{(0)} = a_2, c_1^{(0)} = c_1, c_2^{(0)} = c_2, f_1^{(0)} = f_1, f_2^{(0)} = f_2,$$
$$\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}, \widetilde{v}_0 = \widetilde{v}, \widetilde{a}_1^{(0)} = \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2^{(0)} = \widetilde{a}_2, \widetilde{c}_1^{(0)} = \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2^{(0)} = \widetilde{c}_2, \widetilde{f}_1^{(0)} = \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2^{(0)} = \widetilde{f}_2.$$

Тогда из системы (9)-(12) при условиях теоремы $\forall t \in [0,T]$ имеем:

$$\left\| u_k(x,t) - \widetilde{u}_k(x,t) \right\|^2_{B_{2,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}} \le q_5 \Big\| Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t), f_1^{(k-1)}(t)) -$$
$$- Q(\widetilde{u}_{k-1}(x,t), \widetilde{v}_{k-1}(x,t), \widetilde{a}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{c}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)) \Big\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \qquad (26)$$

$$\left\| v_k(x,t) - \widetilde{v}_k(x,t) \right\|^2_{B_{2,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} \le q_6 \cdot \Big\| \widetilde{Q}(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_2^{(k-1)}(t), c_2^{(k-1)}(t), f_2^{(k-1)}(t)) -$$
$$- \widetilde{Q}(\widetilde{u}_{k-1}(x,t), \widetilde{v}_{k-1}(x,t), \widetilde{a}_2^{(k-1)}(t), \widetilde{c}_2^{(k-1)}(t), \widetilde{f}_2^{(k-1)}(t)) \Big\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \qquad (27)$$

$$\left\| a_1^{(k)}(t) - \widetilde{a}_1^{(k)}(t) \right\|^2_{C[0,t]} \le K_2 q_7 \Big\| Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t), f_1^{(k-1)}(t)) -$$
$$- Q(\widetilde{u}_{k-1}(x,t), \widetilde{v}_{k-1}(x,t), \widetilde{a}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{c}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)) \Big\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \qquad (28)$$

$$\left\| c_1^{(k)}(t) - \widetilde{c}_1^{(k)}(t) \right\|^2_{C[0,t]} \le K_3 q_8 \Big\| Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t), f_1^{(k-1)}(t)) -$$
$$- Q(\widetilde{u}_{k-1}(x,t), \widetilde{v}_{k-1}(x,t), \widetilde{a}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{c}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)) \Big\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \qquad (29)$$

$$\left\| f_1^{(k)}(t) - \widetilde{f}_1^{(k)}(t) \right\|^2_{C[0,t]} \le K_4 q_9 \Big\| Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t), f_1^{(k-1)}(t)) -$$
$$- Q(\widetilde{u}_{k-1}(x,t), \widetilde{v}_{k-1}(x,t), \widetilde{a}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{c}_1^{(k-1)}(t), \widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)) \Big\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \qquad (30)$$

$$\left\| a_2^{(k)}(t) - \tilde{a}_2^{(k)}(t) \right\|_{C[0,t]}^2 \le K_2 q_{10} \left\| \tilde{Q}(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_2^{(k-1)}(t), c_2^{(k-1)}(t), f_2^{(k-1)}(t)) - \right.$$
$$\left. - \tilde{Q}(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_2^{(k-1)}(t), \tilde{c}_2^{(k-1)}(t), \tilde{f}_2^{(k-1)}(t)) \right\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}^2, \quad (31)$$

$$\left\| c_2^{(k)}(t) - \tilde{c}_2^{(k)}(t) \right\|_{C[0,t]}^2 \le q_{11} \tilde{K}_3 \left\| \tilde{Q}(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_2^{(k-1)}(t), c_2^{(k-1)}(t), f_2^{(k-1)}(t)) - \right.$$
$$\left. - \tilde{Q}(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_2^{(k-1)}(t), \tilde{c}_2^{(k-1)}(t), \tilde{f}_2^{(k-1)}(t)) \right\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}^2, \quad (32)$$

$$\left\| f_2^{(k)}(t) - \tilde{f}_2^{(k)}(t) \right\|_{C[0,t]}^2 \le \tilde{K}_4 q_{12} \left\| \tilde{Q}(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_2^{(k-1)}(t), c_2^{(k-1)}(t), f_2^{(k-1)}(t)) - \right.$$
$$\left. - Q(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_2^{(k-1)}(t), \tilde{c}_2^{(k-1)}(t), \tilde{f}_2^{(k-1)}(t)) \right\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}^2, \quad (33)$$

где
$$K_i = \left(\min_{0\le t\le T} |\Delta(t)| \right)^{-2} \cdot 3 \cdot \sum_{j=1}^{3} \left\| A_{ij}(t) \right\|_{C[0,T]}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}} \right)^2, \ (i = \overline{2,4}),$$

$$\tilde{K}_i = \left(\min_{0\le t\le T} |\tilde{\Delta}(t)| \right)^{-2} \cdot 3 \cdot \sum_{j=1}^{3} \left\| \tilde{A}_{ij}(t) \right\|_{C[0,T]}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}} \right)^2, \ (i = \overline{2,4}),$$

$g_i > 0 \quad (i = \overline{5,12})$ - некоторые постоянные, не зависящие от u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2.

Отсюда получим

$$\left\| W_k - \tilde{W}_k \right\|_{E_t}^2 \le K \int_0^t \left\| W_{k-1} - \tilde{W}_{k-1} \right\|_\tau^2 d\tau, \quad (34)$$

где $\left\| W_k - \tilde{W}_k \right\|^2 = \left\| u_k(\xi,\tau) - \tilde{u}_k(\xi,\tau) \right\|_{B_{2,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3, \left[\frac{n}{2}\right]+2}}^2 + \left\| v_k(\xi,\tau) - \tilde{v}_k(\xi,\tau) \right\|_{B_{2,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3, \left[\frac{n}{2}\right]+2}}^2 +$

$$+ \left\| a_1^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_1^{(k)}(\tau) \right\|_{C[0,t]}^2 + \left\| a_2^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_2^{(k)}(\tau) \right\|_{C[0,t]}^2 + \left\| c_1^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_1^{(k)}(\tau) \right\|_{C[0,t]}^2 +$$
$$+ \left\| c_2^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_2^{(k)}(\tau) \right\|_{C[0,t]}^2 + \left\| f_1^{(k)}(\tau) - \tilde{f}_1^{(k)}(\tau) \right\|_{C[0,t]}^2 + \left\| f_2^{(k)}(\tau) - \tilde{f}_2^{(k)}(\tau) \right\|_{C[0,t]}^2,$$

$$K = \left[2 + \sum_{i=2}^{4} (K_i + \tilde{K}_i) \right] q_{13},$$

$q_{13} > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от $u, v, a_1, a_2, c_1, c_2,\ f_1, f_2$.

Тогда по индукции нетрудно получить оценку

$$\left\| W_k - \tilde{W}_k \right\|_{E_T} \le \left\{ \frac{(KT)^k}{k!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| W_0 - \tilde{W}_0 \right\|_{E_T}. \quad (35)$$

Таким образом, итерация L^n оператора L удовлетворяет неравенству

$$\left\| L^k W - L^k \tilde{W} \right\|_{E_T} \le \left\{ \frac{(KT)^k}{k!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| W - \tilde{W} \right\|_{E_T}. \quad (36)$$

Ясно, что при достаточно больших значениях k

$$\left\{\frac{(KT)^k}{k!}\right\}^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{37}$$

А это означает, что существующая итерация L^k является сжимающей. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор L^k удовлетворяет на множестве K_R условию принципа сжатых отображений. Тогда единственная неподвижная точка W оператора L^k является и единственной в K_R неподвижной точкой для оператора L.

Таким образом, оператор L имеет в K_R единственную неподвижную точку $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t))$.

Легко можно показать, что $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t),\ c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t))$ является классическим решением задачи (1)-(7).

Теперь покажем, что функции $u(x,t), v(x,t)$ удовлетворяют условиям (6), (7), соответственно. Тогда из (9),(10) в, силу теоремы, получим, что

$$\frac{\partial u(x^i,t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} \mu_k(x^i) +$$
$$+ a_1(t) b(x^i,t) u(x^i,t) + c_1(t) d(x^i,t) v(x^i,t) + f_1(t) F(x^i,t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^t \int_\Omega \left[a_1(\tau) b(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + c_1(\tau) d(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + f_1(\tau) F(\xi,\tau)\right] \times$$
$$\times e^{-\lambda_k^2 (t-\tau)} \cdot \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i), \quad (i = \overline{1,3}), \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 v(x^i,t)}{\partial t^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \tilde{\varphi}_k \cos \lambda_k t \mu_k(x^i) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \sin \lambda_k t \mu_k(x^i) +$$
$$+ a_2(t) \tilde{b}(x^i,t) u(x^i,t) + c_2(t) \tilde{d}(x^i,t) v(x^i,t) + f_2(t) G(x^i,t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^t \int_\Omega \left[a_2(\tau) \tilde{b}(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + c_2(\tau) \tilde{d}(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + f_2(\tau) G(\xi,\tau)\right] \times$$
$$\times \sin \lambda_k (t-\tau) \cdot \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i), \quad (i = \overline{1,3}), \tag{39}$$

Из (11) и (12) имеем

$$h_i'(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} \mu_k(x^i) + a_1(t) b(x^i,t) h_i(t) + c_1(t) d(x^i,t) g_i'(t) + f_1(t) F(x^i,t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^t \int_\Omega \left[a_1(\tau) b(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + c_1(\tau) d(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + f_1(\tau) F(\xi,\tau)\right] \times$$
$$\times e^{-\lambda_k^2 (t-\tau)} \cdot \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i), \quad (i = \overline{1,3}), \tag{40}$$

$$g_i''(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\mu_k(x^i)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\psi_k\sin\lambda_k t\mu_k(x^i)+$$
$$+a_2(t)\tilde{b}(x^i,t)h_i'(t)+c_2(t)\tilde{d}(x^i,t)g_i(t)+f_2(t)G(x^i,t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_0^t\int_{\Omega}\left[a_2(\tau)\tilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_2(\tau)\tilde{d}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_k(t-\tau)\cdot\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x^i),\ \ (i=\overline{1,3}).\qquad(41)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial u(x^i,t)}{\partial t}-h_t'(t)=a_1(t)b(x^i,t)(u(x^i,t)-h_i(t))+$$
$$+c_1(t)d(x^i,t)\big(v(x^i,t)-g_i(t)\big)\quad(i=\overline{1,3}),\qquad(42)$$

$$\frac{\partial^2 v(x^i,t)}{\partial t^2}-g_i''(t)=a_2(t)\tilde{b}(x^i,t)\big(u(x^i,t)-h_i(t)\big)+$$
$$+c_2(t)\tilde{d}(x^i,t)\big(v(x^i,t)-g_i(t)\big)\quad(i=\overline{1,3})\qquad(43)$$

в силу условия 7 данной теоремы:

$$\begin{aligned}&u(x^i,0)-h_i(0)=0,\ (i=\overline{1,3}),\\&v(x^i,0)-g_i(0)=0,\ (i=\overline{1,3}),\\&\frac{\partial v(x^i,0)}{\partial t}-g_i'(0)=0,\ (i=\overline{1,3}).\end{aligned}\qquad(44)$$

Тогда для функции $u(x^i,t)-h_i(t)$ и $v(x^i,t)-g_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ получаем задачу Коши (42), (43). Отсюда имеем:

$$u(x^i,t)-h_i(t)=0,\quad(i=\overline{1,3})\quad\forall t\in[0,T],$$
$$v(x^i,t)-g_i(t)=0,\quad(i=\overline{1,3})\quad\forall t\in[0,T].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967, 150 с.
2. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Известия АН СССР, серия математики, 1960, 24, с.883-896.
3. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. //Дисс.док.физ.-мат.наук, 1973, АГУ, 319 с.
4. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для линейного гиперболического уравнения в ограниченной области // Дифференциальные уравнения, т.38, №1, 2002, с.98-101.
5. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для систем линейных гиперболических уравнений в ограниченной области // Вестник Бакинского университета, физико-математическая серия, №2, 2007, с.5-15.
6. Шишмарев И.А. Введение в теорию эллиптических уравнений. М.: МГУ, 1979, 210 с.

SONLU OBLASTDA ÇOXÖLÇÜLÜ PARABOLA-HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN BİR TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

M.Ə.QULİYEV, N.Ə.QASIMOVA

XÜLASƏ

İşdə sıxılmış inikas prinsipinin köməyilə sonlu oblastda çoxölçülü parabola-hiperbolik tənliklər sistemi üçün tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlıq və yeganəliyi tədqiq olunmuşdur.

Açar sözlər: sıxılmış inikas, varlıq, yeganəlik, klassik həll

MULTIDIMENSIOL INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS IN A BOUNDED DOMAIN

M.A.GULIYEV, N.A.GASIMOVA

SUMMARY

In this paper, by using the generalized principle of compressed mapping we investigate the theorem of the existence and uniqueness of the classical solution of multidimensional inverse boundary value problem for the system of parabolic-hyperbolic equations in a bounded domain.

Key words: compressed mapping, existence, uniqueness, classical solution

Принято в редакцию: 20.11.2012 г.
Подписано к печати: 12.12.2012 г.