

УДК 517.95

**МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ
ОБЛАСТИ**

М.А.КУЛИЕВ, У.В.ГУРБАНОВА

*Бакинский Государственный Университет,
Гянджинский Государственный Университет
Ulya_1812@mail.ru*

В работе рассматривается вопрос разрешимости обратных задач для систем параболических уравнений в неограниченной области. Предлагается метод, который основан на сведении обратной задачи к некоторым нелинейным бесконечным системам эллиптических уравнений. Следует заметить, что данный метод позволяет доказать теоремы существования, устойчивости и единственности решения многомерных обратных задач в классах функций конечной гладкости.

Ключевые слова: обратные задачи, существование и единственность, неограниченная область, параболические уравнения.

В работе рассматривается вопрос разрешимости обратных задач для систем параболических уравнений в неограниченной области.

Предлагается метод, который основан на сведении обратной задачи к некоторым нелинейным бесконечным системам эллиптических уравнений.

В области $Q = D \times (-\infty, \infty)$ рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Au(x,t) = a(x)u(x,t) + b(x)v(x,t) + f(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - Av(x,t) = a_1(x)u(x,t) + b_1(x)v(x,t) + g(x,t), \quad (2)$$

$$u(x',t) = F(x',t), v(x',t) = G(x',t), (x',t) \in \Gamma = S \times (-\infty, \infty), \quad (3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), v(x,0) = \psi(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x), v(x,T) = \psi_1(x), x \in \Omega, \quad (5)$$

где D ограниченная область в R^n , $S = \partial D \in C^2$, $n \leq 3$, $Au = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$,

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^4(\bar{D})$ и $\forall \xi \in R^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu_0 |\xi|^2$, $\mu_0 = \text{const} > 0$, $\varphi(x)$,

$\varphi_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ - заданные, а $a(x)$, $b(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$, $u(x,t)$, $v(x,t)$ - искомые функции.

Определение. Систему $\{u(x,t), v(x,t), a(x), b(x), a_1(x), b_1(x)\}$ назовем решением задачи (1)-(5), если они удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $a(x), b(x), a_1(x), b_1(x) \in W_2^2(D)$.
2. $u(x,t), u_{\bar{n}}(x,t), u_{x_i}(x,t)$ ($i = \overline{1, n}$), $u_{x_i x_j}(x,t)$ ($i, j = \overline{1, n}$), $u_{tx_i}(x,t)$ ($i = \overline{1, n}$) $\in L_2(Q_T)$.
3. $E(\tilde{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_D (1 + |\lambda|)^{2(p-1)} [|\tilde{u}(x, \lambda)|(1 + |\lambda|)^2 + A|\tilde{u}(x, \lambda)|^2] dx d\lambda < \infty$, $p > \frac{3}{2}$,
 $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, \lambda) \exp(-i\lambda t) d\lambda$.
4. $v(x,t), v_{\bar{n}}(x,t), v_{x_i}(x,t)$ ($i = \overline{1, n}$), $v_{x_i x_j}(x,t)$ ($i, j = \overline{1, n}$), $v_{tx_i}(x,t)$ ($i = \overline{1, n}$) $\in L_2(Q_T)$.
5. $E(\tilde{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_D (1 + |\lambda|)^{2(p-1)} [|\tilde{v}(x, \lambda)|^2 (1 + |\lambda|)^2 + |A\tilde{v}(x, \lambda)|^2] dx d\lambda < \infty$,
 $v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(x, \lambda) \exp(-i\lambda t) d\lambda$.
6. Условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Предположим, что функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\varphi(x), \psi(x), \varphi_1(x), \psi_1(x) \in W_2^4(D)$,
 $\varphi(x)|_S = F(x,t)|_{t=0}$, $\psi(x)|_S = G(x,t)|_{t=0}$,
 $\varphi_1(x)|_S = F(x,t)|_{t=T}$, $\psi_1(x)|_S = G(x,t)|_{t=T}$.
- 2) $f(x,t), \frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p} \in L_2(Q)$, $f(x,0) \in W_2^2(D)$,
 $g(x,t), \frac{\partial^p g(x,t)}{\partial t^p} \in L_2(Q)$, $g(x,0) \in W_2^2(D)$.
- 3) $F(x,t), \frac{\partial^{p+1} F(x,t)}{\partial t^{p+1}} \in L_2(-\infty, \infty; W_2^{7/2}(S))$,
 $G(x,t), \frac{\partial^{p+1} G(x,t)}{\partial t^{p+1}} \in L_2(-\infty, \infty; W_2^{7/2}(S))$.
- 4) $|\Delta| = |\varphi(x)\psi_1(x) - \psi(x)\varphi_1(x)| \geq \delta > 0$, $\forall x \in \bar{D}$.

Приведём следующую лемму

Лемма 1. Пусть $\tilde{u}(x, \lambda), \tilde{v}(x, \lambda)$ - решение задачи

$$\begin{aligned}
-i\lambda \tilde{u}(x, \lambda) - A\tilde{u}(x, \lambda) &= \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + \right. \right. \\
&+ i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \psi(x) - (A\varphi(x) - f(x, 0))\psi_1(x) - \\
&- (A\varphi_1(x) + f(x, T))\psi(x) \left. \right] \cdot \tilde{u}(x, \lambda) + \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \times \right. \\
&\times \varphi(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) - (A\varphi_1(x) + f(x, T))\varphi(x) - \\
&- (A\varphi(x) + f(x, 0))\varphi_1(x) \left. \right] \cdot \tilde{v}(x, \lambda) \left. \right\} + \tilde{f}(x, \lambda), \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\lambda \tilde{v}(x, \lambda) - A\tilde{v}(x, \lambda) &= \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + \right. \right. \\
&+ i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \psi(x) - (A\psi(x) + g(x, 0))\psi_1(x) - \\
&- (A\psi_1(x) + g(x, T))\psi(x) \left. \right] \cdot \tilde{u}(x, \lambda) + \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \times \right. \\
&\times \varphi(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) - (A\psi(x) + g(x, T))\varphi(x) + \\
&+ (A\psi_1(x) + g(x, 0))\varphi_1(x) \left. \right] \cdot \tilde{v}(x, \lambda) \left. \right\} + \tilde{g}(x, \lambda), \\
\tilde{u}(x, \lambda)|_S &= \tilde{F}(x, \lambda), \tilde{v}(x, \lambda) = \tilde{G}(x, \lambda) \tag{7}
\end{aligned}$$

из класса $E(u) < \infty$.

Тогда функции

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, \lambda) \exp(-i\lambda t) d\lambda, \\
v(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(x, \lambda) \exp(-i\lambda t) d\lambda, \\
a(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \times \right. \right. \\
&\times \psi(x) - (A\varphi(x) - f(x, 0))\psi_1(x) - (A\varphi_1(x) + f(x, T))\psi(x) \left. \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \varphi(x) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) - (A\varphi_1(x) + f(x, T))\varphi(x) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (A\varphi(x) + f(x, 0))\varphi_1(x) \right] \right\}, \\
a_1(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \psi(x) - (A\psi(x) - g(x, 0))\psi_1(x) - (A\psi_1(x) + g(x, T))\psi(x) \right] \right\}, \\
b_1(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \varphi(x) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) - (A\psi(x) - g(x, T))\varphi(x) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (A\psi(x) + g(x, 0))\varphi_1(x) \right] \right\}
\end{aligned}$$

являются решением обратной задачи (1)-(5).

Доказательство леммы 1 следует из разрешимости задачи (6),(7) указанном в классе и того, что

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x) \quad \text{и} \quad u(x, T) = \varphi_1(x), \quad v(x, T) = \psi_1(x).$$

Теперь установим разрешимость задачи (6),(7). Обозначим через $\mathfrak{a}(x, \lambda)$ и $q(x, \lambda)$ функции

$$\begin{aligned}
A\mathfrak{a}(x, \lambda) &= 0, \quad \mathfrak{a}(x, \lambda)|_S = \tilde{F}(x, \lambda) \\
\|\mathfrak{a}(x, \lambda)\|_{W_2^4(D)}^2 &\leq C_1^2 \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2
\end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
Aq(x, \lambda) &= 0, \quad q(x, \lambda)|_S = \tilde{G}(x, \lambda) \\
\|q(x, \lambda)\|_{W_2^4(D)}^2 &\leq C_1^2 \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для разрешимости задачи (6)-(7) применим метод последовательных приближений

$$-i\lambda \tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) - A\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \psi(x) + Q_1(x) \left[\tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda) + \mathfrak{a}(x, \lambda) \right) + \\
& + \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \varphi(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) + \right. \\
& \left. + Q_2(x) \right] \left(\tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda) + q(x, \lambda) \right) + \tilde{f}(x, \lambda) + i\lambda \mathfrak{a}(x, \lambda), \\
& -i\lambda \tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) - A\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + \right. \right. \\
& \left. \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \psi(x) + Q_3(x) \right] \left(\tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda) + \mathfrak{a}(x, \lambda) \right) + \right. \\
& \left. + \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \varphi(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) + \right. \right. \\
& \left. \left. + Q_4(x) \right] \left(\tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda) + q(x, \lambda) \right) \right\} + \tilde{g}(x, \lambda) + i\lambda q(x, \lambda), \tag{10}
\end{aligned}$$

$$u^{(m)}(x, \lambda)|_S = 0, \quad v^{(m)}(x, \lambda)|_S = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathfrak{a}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathfrak{a}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \psi(x) \\
&\quad - (A\varphi(x) - f(x, 0))\varphi_1(x) + (A\varphi_1(x) + f(x, T)) \cdot \psi(x), \\
Q_2(x) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathfrak{a}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathfrak{a}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \times \\
&\quad \times \varphi(x) - (A\varphi_1(x) + f(x, T))\varphi(x) + (A\varphi(x) + f(x, 0)) \cdot \varphi_1(x), \\
Q_3(x) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{q}(x, \lambda) d\lambda \cdot \psi_1(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{q}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \psi(x) - \\
&\quad - (A\varphi(x) + g(x, 0))\psi_1(x) + (A\psi_1(x) + g(x, T)) \cdot \psi(x), \\
Q_4(x) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{q}(x, \lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda \cdot \varphi(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{q}(x, \lambda) d\lambda \cdot \varphi_1(x) - \\
&\quad - (A\psi_1(x) + g(x, T))\varphi(x) + (A\psi(x) + g(x, 0)) \cdot \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

Установим сначала априорные оценки для решения задачи (10)-(11).

Лемма 2. Пусть выполнено условие 1–4 и

$$\begin{aligned}
& \frac{7Z_0}{\mu_0} \left[3N_0^2 + \frac{8N_0^2 C_1^2}{2p-3} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \frac{8N_0^2 C_1^2}{2p-3} \times \right. \\
& \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda \right] + \frac{1568}{\mu_0^2} \frac{N_0^2}{2p-3} Z_0^{\frac{4-n}{2}} \cdot C_2^2 \times \\
& \times \left[3N_0^2 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \right. \\
& + C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + N_0^2 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \times \\
& \times \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \\
& \left. + \int_{-\infty D} \int (1+|\lambda|)^{2p} |g(x, \lambda)|^2 dx d\lambda \right] \leq \frac{1}{2}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Тогда для последовательных приближений, определяемых (6),(7), справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty D} \int (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + |\nabla \tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda \leq \\
& \leq \frac{14}{\mu_0} \left[3N_0 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \right. \\
& + C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + N_0^2 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \times \\
& \times \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \\
& \left. + \int_{-\infty D} \int (1+|\lambda|)^{2p} |\tilde{f}(x, \lambda)|^2 dx d\lambda + \int_{-\infty D} \int (1+|\lambda|)^{2p} |\tilde{g}(x, \lambda)|^2 dx d\lambda \right], \tag{13}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& C_1 : \|y\|_{C(D)}^2 \leq C_1^2 \|y\|_{W_2^{7/2}(S)}^2, \quad C_2 : \|y\|_{L_4(D)} \leq C^2 \|y\|_{W_2^1(D)}^{\frac{n}{4}} \cdot \|y\|_{L_2(D)}^{\frac{4-n}{4}}, \\
& N_0 = \max \left\{ \left\| \frac{\varphi(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \left\| \frac{\varphi_1(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \left\| \frac{\psi(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \left\| \frac{\psi_1(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \right. \\
& \left. \left\| \frac{Q_1(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \left\| \frac{Q_2(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \left\| \frac{Q_3(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})}, \left\| \frac{Q_4(x)}{\Delta(x)} \right\|_{C(\bar{D})} \right\},
\end{aligned}$$

$0 \neq \frac{1}{Z_0}$ - наименьшее собственное число задачи $-\Delta u = \frac{1}{Z}u$, $u|_S = 0$.

Доказательство. Из (10), (11), применяя неравенство $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon}$,

$\forall \varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned}
& \mu_0 \iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + |\nabla \tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda \leq \\
& \leq m \cdot \varepsilon \iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + |\nabla \tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda + \\
& + \frac{32N_0^2}{2p-3} \cdot Z_0^{\frac{4-n}{2}} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + |\nabla \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda + \right. \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \left[3N_0^2 + \frac{8N_0^2}{2p-3} C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \right. \\
& + \left. \frac{8N_0^2}{2p-3} C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda \right] \iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\
& + \left. |\nabla \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda + \frac{1}{\varepsilon} \left[3N_0^2 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \right. \\
& + \left. C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + N_0^2 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \right. \\
& + \left. C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda \right] + \frac{1}{\varepsilon} \iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p} |\tilde{f}(x, \lambda)|^2 dx d\lambda + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p} |\tilde{g}(x, \lambda)|^2 dx d\lambda. \tag{14}
\end{aligned}$$

Тогда, взяв (14) $\varepsilon = \frac{\mu_0}{14}$ и применяя неравенству [2] получим оценки (13).

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для последовательных приближений, определяемых (10),(11), справедливы оценки

$$\iint_{-\infty D} (1+|\lambda|)^{2p-2} \left(|A\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + |A\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda \leq C_0(\gamma_0), \tag{15}$$

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \left[(1+|\lambda|)^2 |\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\ \left. + |A(\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda))|^2 \right] dx d\lambda \leq \text{const } q^m, \quad q < 1, \quad (16)$$

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \left[(1+|\lambda|)^2 |\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\ \left. + |A(\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda))|^2 \right] dx d\lambda \leq \text{const } q^m, \quad q < 1. \quad (17)$$

Доказательство. Умножая соотношение (10), соответственно, на $(1+|\lambda|)^{2p-2} A\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)$, $(1+|\lambda|)^{2p-2} A\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)$ и применяя « ε -неравенство», имеем

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \left(|A\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + |A\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda \leq \\ \leq \frac{28N_0^2}{2p-3} \cdot Z_0^{\frac{4-n}{2}} \left[\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + |\nabla \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda \right]^2 + \\ + \left[\frac{21N_0^2}{2} + \left(\frac{14N_0^2}{2p-3} + \frac{7}{\delta^2(2p-3)} + \frac{7N_0^2}{2} \right) C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p-2} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \right. \\ \left. + \frac{7N_0^2}{2p-3} C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p-2} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda \right] \cdot Z_0 \int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p} \left(|\nabla \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\ \left. + |\nabla \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda + C_1^2 \cdot 7N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p-2} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \\ + \frac{7}{2} C_1^2 \int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \|\tilde{F}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 dx d\lambda + 7N_0^2 C_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^{2p-2} \times \\ \times \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 d\lambda + \frac{7}{2} C_1^2 \int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \|\tilde{G}(x, \lambda)\|_{W_2^{7/2}(S)}^2 dx d\lambda + \\ + \frac{7}{2} \int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} |\tilde{g}(x, \lambda)|^2 dx d\lambda + \frac{7}{2} \int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} |\tilde{f}(x, \lambda)|^2 dx d\lambda. \quad (18)$$

Тогда, учитывая оценку (13), получим

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \left(|A\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + |A\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right) dx d\lambda \leq C_0(\gamma_0). \quad (19)$$

Аналогично, как и выше, для разности $\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)$ и $\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)$ из (10), (11), с учётом оценки из леммы 2, получим

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p} \left[(1+|\lambda|)^2 |\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\ \left. + |A(\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{u}^{(m-1)}(x, \lambda))|^2 \right] dx d\lambda \leq \text{const } q^m, \quad q < 1, \quad (20)$$

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p} \left[(1+|\lambda|)^2 |\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\ \left. + |A(\tilde{v}^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{v}^{(m-1)}(x, \lambda))|^2 \right] dx d\lambda \leq \text{const } q^m, \quad q < 1. \quad (21)$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда при каждом фиксированном m существует единственное решение задачи (10),(11) из класса

$$\int_{-\infty D}^{\infty} \int (1+|\lambda|)^{2p-2} \left[(1+|\lambda|)^2 |\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + (1+|\lambda|)^2 |\nabla \tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 + \right. \\ \left. + |A\tilde{u}^{(m)}(x, \lambda)|^2 \right] dx d\lambda < \infty.$$

Доказательство этой леммы проводится методом Галёркина.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 2 и

$$\mu_0 - 2Z_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\delta} \left[\|(A\varphi(x) + f(x,0))\psi(x) + (A\varphi_1(x) + f(x,T))\psi(x)\|_{C(\bar{D})} + \right. \\ + \|(A\varphi_1(x) + f(x,T))\varphi(x) + (A\varphi(x) + f(x,0))\varphi_1(x)\|_{C(\bar{D})} + \\ + \|(A\psi_1(x) + g(x,0))\psi_1(x) + (A\psi_1(x) + g(x,T))\psi(x)\|_{C(\bar{D})} + \\ \left. + \|(A\psi(x) + g(x,T))\varphi(x) + (A\psi(x) + g(x,0))\varphi_1(x)\|_{C(\bar{D})} \right] + \\ + \frac{4\sqrt{3}N_0}{\sqrt{2p-1}} \sqrt{C_0(\gamma_0)} > 0. \quad (22)$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(5).

Доказательство. Разрешимость задачи (6),(7) следует из лемм 2, 3.

Нам осталось доказать, что

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u(x, t)|_{t=T} = \varphi_1(x)$$

и

$$v(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad v(x, t)|_{t=T} = \psi_1(x).$$

Пусть $u(x, t)|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x)$, $v(x, t)|_{t=0} = \tilde{\psi}(x)$. Рассмотрим функции $\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(x) - \psi(x)$. Обозначим $\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) = Z(x)$, $\tilde{\psi}(x) - \psi(x) = Z_1(x)$. Тогда для функции $Z(x)$ и $Z_1(x)$ из (1),(2) и (4) имеем

$$AZ(x) = l_1(x)Z(x) + l_2(x)Z(x), \quad (23)$$

$$AZ_1(x) = K_1(x)Z(x) + K_2(x)Z(x),$$

$$Z(x)|_S = 0, \quad Z_1(x)|_S = 0, \quad (24)$$

$$\text{где } |l_1(x)|^2 \leq \frac{3}{\delta^2} \|(A\varphi(x) + f(x,0))\psi(x) + (A\varphi_1(x) + f(x,T))\psi(x)\|_{C(\bar{D})}^2 + \\ + \frac{3N_0^2}{2p-1} C_0(\gamma_0),$$

$$|l_2(x)|^2 \leq \frac{3}{\delta^2} \|(A\varphi_1(x) + f(x,T))\varphi(x) + (A\varphi(x) + f(x,0))\varphi_1(x)\|_{C(\bar{D})}^2 + \\ + \frac{3N_0^2}{2p-1} C_0(\gamma_0),$$

$$|K_1(x)|^2 \leq \frac{3}{\delta^2} \|(A\psi_1(x) + g(x,0))\psi_1(x) + (A\psi_1(x) + g(x,T))\psi(x)\|_{C(\bar{D})}^2 + \\ + \frac{3N_0^2}{2p-1} C_0(\gamma_0),$$

$$|K_2(x)|^2 \leq \frac{3}{\delta^2} \|(A\psi(x) + g(x,T))\varphi(x) + (A\psi(x) + g(x,0))\varphi_1(x)\|_{C(\bar{D})}^2 + \\ + \frac{3N_0^2}{2p-1} C_0(\gamma_0).$$

Умножая соотношение (23) соответственно на $Z(x)$, $Z_1(x)$ и интегрируя по области D , имеем:

$$\mu_0 \int_D |\nabla Z(x)|^2 dx \leq \left(\|l_1(x)\|_{C(\bar{D})} + \|l_2(x)\|_{C(\bar{D})} \right) \cdot 2Z_0 \left(\int_D (|\nabla Z(x)|^2 + |\nabla Z_1(x)|^2) dx \right), \\ \mu_0 \int_D |\nabla Z_1(x)|^2 dx \leq \left(\|K_1(x)\|_{C(\bar{D})} + \|K_2(x)\|_{C(\bar{D})} \right) \cdot 2Z_0 \left(\int_D (|\nabla Z(x)|^2 + |\nabla Z_1(x)|^2) dx \right).$$

Отсюда, в силу условий теоремы, следует, что $Z(x) = 0, Z_1(x) = 0$.

Аналогично доказывается, что

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad v(x, T) = \psi_1(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967, 150 с.
2. Бубнов Б.А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений. Препринт. 714. Новосибирск, 1990, 44 с.
3. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для уравнения параболического типа в неограниченной области // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-мат., 2002, № 2, с. 122-129.

4. Multidimensional inverse boundary value problem for the system of hyperbolic equations // Applications and Applied Mathematics, v.6, Issue 11 (June 2011), p.2094-2109.
5. Кулиев М.А., Эл-Хадиди А.М. Многомерная обратная краевая задача для квазилинейной системы гиперболических уравнений в ограниченной области // Нелинейные граничные задачи. НАН Украины, Инс. Прик. матем. и механики, т.20, 2011, с.91-103.

**SONSUZ OBLASTDA ÇOXÖLÇÜLÜ
PARABOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏ**

M.Ə.QULİYEV, U.V.QURBANOVA

XÜLASƏ

İşdə sonsuz oblastda çoxölçülü parabolik tənliklər sistemi üçün tərs məsələyə baxılmışdır. Burada tərs məsələ elliptik tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsinə gətirilmiş, ardıcıl yaxınlaşma metodunun köməyi ilə həllin varlığı və yeganəliyi isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: tərs məsələ, varlıq və yeganəlik, sonsuz oblast, parabolik tənliklər.

**MULTIDIMENSIONAL INVERSE PROBLEM FOR THE SYSTEM
OF PARABOLIC EQUATIONS IN AN UNBOUNDED DOMAIN**

M.A.GULIYEV, U.V.GURBANOVA

SUMMARY

In the paper we investigate the multidimensional inverse problem for the system of parabolic equations in an unbounded domain. The proposed problem is reduced to a boundary value problem of infinite elliptic equations and the method of successive approximations allows one to prove the existence and uniqueness theorems for the solutions of the systems of these elliptic equations.

Key words: inverse problem, existence and uniqueness, unbounded domain, parabolic equations.

Принято в редакцию: 22.10.2012 г.

Подписано к печати: 12.12.2012 г.