УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕКЛАССИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
yashar_aze@mail.ru

В работе исследована одна обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с неклассическим краевым условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики. В последнее время обратные задачи нашли очень широкое применение в различных областях науки.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А.Н.Тихонова [1], М.М.Лаврентьева [2,3] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М.Денисова [4].

В работах [6-10] исследовались обратные краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в прямоугольной области.

Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,T)=\psi(x) \quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

$$u(1,t)=0 \quad (0\le t\le T), \tag{3}$$

неклассическим краевым условием

$$bu(0,t)+\int_0^1 q(x)u(x,t)dx-u_x(0,t)=0 \ \ (0\le t\le T) \tag{4}$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t)=h(t) \quad (0\le t\le T), \tag{5}$$

где $x_0\in(0,1)$, b - фиксированные числа, $f(x,t),\ \varphi(x),\ \psi(x), q(x),\ h(t)$ -заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ - искомые функции.

Определение. Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5) назовём пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;
3) все условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1)-(5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)\in C^2(D_T)$ и $a(t)\in C[0,T]$, из соотношений (1)-(4) и

$$h''(t)+u_{xx}(x_0,t)=a(t)h(t)+f(x_0,t) \ \ (0\le t\le T). \tag{6}$$

Аналогично [5] доказывается следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x),\psi(x)\in C[0,1]$, $h(t)\in C^2[0,T],\ h(t)\ne 0 \ \ (0\le t\le T)$, $f(x,t)\in C(D_T)$ и выполняются условия согласования

$$\varphi(x_0)=h(0),\ \psi(x_0)=h'(T) \ \ .$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(5) является и решением задачи (1)-(4), (6);
2. Каждое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(4), (6), такое, что

$$\frac{1}{2}T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}<1,$$

является классическим решением (1)-(5).

Сведения из теории спектральных задач и введение некоторых пространств.

Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1)-(4), методом разделения переменных, приходим к спектральной задаче:

$$y''(x)+\lambda\, y(x)=0 \ \ (0\le x\le 1), y(1)=0,\ b\, y(0)+\int_0^1 q(x)y(x)dx-y'(0)=0\ . \tag{7}$$

Наряду спектральной задаче (7) рассмотрим следующую вспомогательную спектральную задачу [11,12]:

$$y''(x)+\lambda\, y(x)=0\ (\ 0\le x\le 1),\ \ y(1)=0,\ (a-\lambda)y'(0)+\lambda b y(0)=0\ , \tag{8}$$

которая имеет только собственные функции $y_k(x)=\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}(1-x)\right)$, $k=0,1,2....$, с положительными собственными числами из уравнения $tg\sqrt{\lambda}=(a-\lambda)/(b\sqrt{\lambda})$, причём $a>0$ - заданное число. Нулевой индекс присваиваем любой собственной функции, а все остальные нумеруем в порядке возрастания собственных чисел.
Пусть

$$q(x)=b\sqrt{\lambda_0}\left(\cos\sqrt{\lambda_0}\right)^{-1}\sin\sqrt{\lambda_0}(1-x).$$

Известно[12],что решением спектральной задачи

$$y''(x)+\lambda\, y(x)=0\ \ (0\le x\le 1),$$

$$y(1)=0\,,b\left(y(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 y(x)\sin\sqrt{\lambda_0}(1-x)dx\right)-y'(0)=0$$

будет система $\{y_k(x)\}$, $k=1,2,3,...$, т.е. система собственных функций задачи (7) без функции, соответствующей собственному значению λ_0.

В работе [8,9] сформулированы и обоснованы следующие утверждения.

Лемма 2. Биортогонально сопряженная система $\{z_k(x)\}$ к системе $\{y_k(x)\}$, $k=1,2,3,...$, определяется по формуле

$$z_k(x)=\sqrt{2}(\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x))-\sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_k}(\sin\sqrt{\lambda_0}(1-x))/(\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_0}))/(1+$$
$$+b^{-1}\cos^2\sqrt{\lambda_k}+(b\lambda)^{-1}a\cos^2\sqrt{\lambda_k}).$$

Теорема 1. Системы $\{y_k(x)\}$ и $\left\{\sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}(1-x))\right\}$, $k=1,2,...$, являются базисами Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Так как функции $\{y_k(x)\}$, $k=1,2,3,...$, являются базисами Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, то известно, что для любой функции $g(x)\in L_2(0,1)$ справедлива

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k y_k(x)\quad,$$

где

$$g_k=\int_0^1 g(x)z_k(x)dx.$$

В работе [5] обоснованы следующие утверждения.

При предположениях $g(x)\in C[0,1]$, $g'(x)\in L_2(0,1)$ и $g(1)=0$ устанавливается справедливость оценки:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\lambda_k}\,|g_k|)^2\right)^{1/2}\le 2bm_0\left|g(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 g(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right|+\sqrt{2}M\|g'(x)\|_{L_2(0,1)},\ (9)$$

где

$$m_0 = \sup_k\left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{1/2},\ M = \sum_{k=1}^{N}\int_0^1 y_k^2(x)dx + 2b^2\sum_{k=N}^{\infty}\frac{2}{3(\pi/4+\pi(k-1))^2} + 2\cdot$$

А при предположениях $g(x)\in C^1[0,1],\ g''(x)\in L_2(0,1)$, $g(1)=0$ и

$$J(g) \equiv b\left(g(0) + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 g(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right) - g'(0) = 0$$

доказывается справедливость оценки:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|g_k|)^2\right)^{1/2} \le m_1|g'(0)| + \sqrt{2}M\,\|g''(x)\|_{L_2(0,1)}, \tag{10}$$

где

$$m_1 = 2\left[a^2\left(\sup_k\left|\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|}\right|\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}\right) + a\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}\right]\cdot$$

Далее, при предположениях $g(x)\in C^2[0,1],\ g'''(x)\in L_2(0,1)$, $g(1)=0$, $J(g)=0$ и $g''(1)=0$ устанавливается справедливость оценки:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}|g_k|)^2\right)^{1/2} \le m_2|g'(0)| + m_3|g''(0)| + \sqrt{2}M\|g'''(x)\|_{L_2(0,1)}\quad, \tag{11}$$

где

$$m_2 = 4\left(a^2\sup_k\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k - a}\right|\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^3}\right)^{1/2} + a\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{1/2}\right],$$

$$m_3 = 4\left(ab\sup_k\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k - a}\right|\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^3}\right)^{1/2} + b\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}\right].$$

При предположениях $g(x)\in C^3[0,1]$, $g^{(4)}(x)\in L_2(0,1)$, $J(g)=0$, $g''(1)=0$, $g'''(0) - bg''(0) + ag'(0) = 0$ доказывается справедливость оценки:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|g_k|)^2\right)^{1/2} \le \sqrt{2}M\left\|g^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2m_4|g'''(0)|, \tag{12}$$

где

$$m_4 = \sup_k\left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - a|}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}.$$

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(4), (6) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^{\alpha}$ [10], совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k=1,2,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\alpha} \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

причём $\alpha \geq 0$ -фиксированное число. Норму в этом множестве определим так:

$$\| u(x,t) \|_{B_{2,T}^{\alpha}} = J_T(u).$$

2. Через E_T^{α} обозначим пространство, состоящее из топологического произведения $B_{2,T}^{\alpha} \times C[0,T]$. Норма элемента $z = \{u, a\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^{\alpha}} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^{\alpha}$ и E_T^{α} являются банаховыми пространствами.

Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи.

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x) \quad , \tag{13}$$

где

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t) z_k(x) dx \quad (k = 1,2,...).$$

Применим метод разделения переменных для определения искомых функций $u_k(t)$ $(k = 1,2,...)$, из (1) и (2) имеем:

$$u_k(t) = \frac{ch(\sqrt{\lambda}_k (T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k} T)} \varphi_k + \frac{sh(\sqrt{\lambda_k} t)}{\sqrt{\lambda_k} ch(\sqrt{\lambda_k} T)} \psi_k + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau; u, a) d\tau, \tag{14}$$

где

$$F_k(t;u,a) = f_k(t) + a(t) u_k(t), \; f_k(t) = \int_0^1 f(x,t) y_k(x) dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) y_k(x) dx, \psi_k = \int_0^1 \psi(x) y_k(x) dx \quad (k = 1,2,...),$$

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2ch(\sqrt{\lambda_k} T)} [sh(\sqrt{\lambda_k}(T+t-\tau)) - sh(\sqrt{\lambda_k}(T-(t+\tau)))], \; t \in [0,\tau], \\ -\dfrac{sh(\sqrt{\lambda_k}(T-(t+\tau))) - sh(\sqrt{\lambda_k}(T-(t-\tau)))}{2ch(\sqrt{\lambda_k} T)}, \quad t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

После подстановки выражений из (14) в (13), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения задачи (1)-(4), (8), получаем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\sqrt{\lambda}_k(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\varphi_k+\frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\psi_k+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right\}y_k(x). \qquad (15)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(4), (6) подставим выражение (15) в (13):

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left[\frac{ch(\sqrt{\lambda}_k(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\varphi_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\psi_k+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right]\sin\sqrt{\lambda_k}\right\}. \qquad (16)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(4), (6) свелось к решению системы (15), (16) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(4), (6) важную роль играет следующая

Лемма 3. Если $\{u(x,t),a(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(4), (6). Тогда функции

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx \qquad (k=1,2,...)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ системе (14).

Из леммы 3 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть система (15), (16) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(4), (6) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(4), (6) имеет решение, то оно единственно.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^2 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)y_k(x),\ \Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_k(t)$ $(k=1,2,...)$ и $\tilde{a}(t)$ равны, соответственно, правым частям (14) и (16). С помощью нетрудных преобразований находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,|f_k(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (17)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \Bigg\{ \|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \, |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left. + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Bigg\}. \tag{18}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(4), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^3[0,1], \varphi^{(4)}(x) \in L_2(0,1), \varphi(1) = 0$, $J(\varphi) = 0$, $\varphi''(1) = 0$,
   $\varphi'''(0) - b\varphi''(0) + a\varphi'(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi'''(x) \in L_2(0,1)$, $\psi(1) = 0$, $J(\psi) = 0$ и $\psi''(1) = 0$.
3. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t) \in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T),\ f(1,t) = 0, J(f) = 0$ и
   $f_{xx}(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T)$.
4. $h(t) \in C^2[0,T], h(t) \ne 0 \quad (0 \le t \le T)$, $q(x) = b\sqrt{\lambda_0}\left(\cos\sqrt{\lambda_0}\right)^{-1} \sin\sqrt{\lambda_0}(1-x)$.

Тогда, из (17) и (18), с учетом (11) и (12), получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \le A_1(T) + 2T\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{19}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le B_1(T) + B_2(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{20}$$

где

$$A_1(T) = 2\sqrt{2}M \left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 4m_4 |\varphi'''(0)| + 2\Big(m_2 |\psi'(0)| + m_3 |\psi''(0)| +$$

$$+ \sqrt{2}M \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}\Big) + 2\sqrt{T}\left(m_2 \| f_x(0,t)\|_{C[0,T]} + m_3 \| f_{xx}(0,t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{2}M \| f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right),$$

$$B_1(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{2}M \left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2m_4 |\varphi'''(0)| + \right. \right.$$

$$+ m_2 |\psi'(0)| + m_3 |\psi''(0)| + \sqrt{2}M \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$\left. \left. + \sqrt{T}\left(m_2 \| f_x(0,t)\|_{C[0,T]} + m_3 \| f_{xx}(0,t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{2}M \| f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right) \right] \right\},$$

$$B_2(T) = 4\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из неравенств (19), (20) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le A(T) + B(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{21}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + B_1(T),\ B(T) = 2 + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть выполнены условия1-4 и

$$(A(T)+2)^2 B(T)T < 1. \tag{22}$$

Тогда задача (1)-(4), (6) в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^2} \le R = A(T)+2)$ пространства E_T^2 имеет единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^2 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{23}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i=1,2)$, оператора $\Phi(u,a)$, определены правыми частями уравнений (15) и (16).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^2. Аналогично (21) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^2} \le A(T) + B(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^2}, \tag{24}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \le B(T)TR(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^2}). \tag{25}$$

Тогда из оценок (24 и (25), с учётом (22), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является решением уравнения (23), т.е. $\{u,a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (15), (16).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^2$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и $u_{xxx}(x,t)$ в D_T.

Нетрудно видеть, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2)-(4) и (6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(4), (6), причём, в силу леммы 3, оно единственное. Теорема доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1,

$$\frac{1}{2}(A(T)+2)T^2 < 1$$

и выполнены условия согласования $\varphi(x_0) = h(0),\ \psi(x_0) = h'(T)$

$$\varphi(x_0) = h(0),\ \psi(x_0) = h'(T).$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^2} \le A(T)+2)$ из E_T^2 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943, 39, №5, с.195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964, 157, №3, с. 520-521.
3. Лаврентьев М.М. , Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математи-

ческой физики и анализа. М.: Наука, 1920
4. Денисов А.М. Введение в теории обратных задач. М.: МГУ, 1954, с.206.
5. Mehraliyev Y.T. Solution of a boundary value problem for a second order parabolic equation with non-classic boundary condition // Proceedings of institute of mathematics and mechanics Baku, 2009, v. XXVIII (XXXVI), p. 91-106.
6. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием // Вестник Удмуртского Университета. Математика. механика. компьютерные науки. 1912, в.1, с.32-40.
7. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, 2011, №23, с.25-38.
8. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997, т.33, №1, с.115-119.
9. Капустн Н.Ю., Моисеев Е.И. О сходимости спектральных разложений функций из класса Гельдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2000, т. 36, №8, с.1069-1074.
10. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.

İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli elliptik tənlik üçün klassik olmayan sərhəd şərtli tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin varlığı və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə ekvivalentlikdən istifadə edərək qoyulmuş məsələnin varlığı və yeganəliyi göstərilir.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, elliptik tənlik, Furye üsulu, klassik həll.

AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH NON-CLASSIC BOUNDARY CONDITIONS

Ya.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In the paper an inverse value problem for the elliptic equations of the second order with non-classic boundary conditions is investigated. First, the stated problem is reduced to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness of solutions is proved. Further, using these facts the existence and uniqueness of classical solution of the given problem is proved.

Key words: Inverse value problem, elliptic equation, Fourier's method, classical solution.

Поступила в редакцию: 05.12.2012 г.
Подписано к печати: 12.12.2012 г.