UDK–539.12.01.

İKİÖLÇÜLÜ DALĞA TƏNLİYİNİN İNVARİANTLIQ QRUPU ÜÇÜN KİLLİNQİN İNVARİANT KVADRATİK FORMASI

Ə.Q.AĞAMALIYEV
Bakı Dövlət Universiteti
Phusics@mail.ru

Məqalədə ikiölçülü dalğa tənlyinin invariantlıq qrupunun ifadələrindən istifadə edərək bu qrup üçün Killinqin invariant kvadratik forması hesablanmışdır.

Açar sözlər: dalğa, qrup, davam operatoru.

Bildiyimiz kimi, hər bir fiziki məsələnin həlli diferensial, inteqral və ya inteqro-diferensial tənliklərin qurulması və onların həllinə gətirir. Həmin tənliklərin analitik şəkildə həlli isə həmişə mümkün olmur. Bu səbəbdən də fiziki sistemin hərəkətinin xarakteri haqqında hərəkət tənliklərini həll etmədən müəyyən informasiya əldə etmək lazım gəlir. Bunun üçün sistemin hərəkət inteqrallarını və ya saxlanan kəmiyyətləri bilmək kifayət edir. Saxlanan kəmiyyətləri bilmək üçün isə sistemin simmetriyasını bilmək kifayətdir.

Sistemin simmetriyası ilə saxlanan kəmiyyətlər arasında əlaqə Nyoter teoremi [1,2,3] vasitəsilə ifadə edilir. Bu səbəbdən də sistemin simmetriyasını, başqa sözlə, sistemin invariantlıq qrupunu tapmaq mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Belə məsələlərin qoyuluşu və həlli metodu S.Li, Ovsyannikov [4] və İbrahimov [5] tərəfindən verilmişdir. Həmin metod invariantlıq qrupu operatorlarının davamı metodu adlanır. Bu metodda göstərilir ki, s tərtibli

$$F\left(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_s\right) = 0$$

şəklində verilmiş tənliyin invariantlıq şərti

$$\left(\underset{s}{X} F\right)_{F=0} = 0 \qquad (1)$$

tənliyi vasitəsilə ifadə olunur. Buradakı $\underset{s}{X}$ operatoru tənliyi invariant saxlayan

$$X = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

Operatorun s-ci tərtibdən davam operatorudur. s-indeksinin qiyməti verilmiş tənliyin tərtibinə, i-indeksinin qiyməti tənliyə daxil olan sərbəst dəyişənlərin sayına, α -indeksinin qiyməti tənlikdəki funksiyaların sayına bərabərdir.

Bizim tədqiq etdiyimiz dalğa tənliyi

$$u_{tt} - \left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0 \tag{2}$$

şəklində olduğundan s=2; α =1; i=3 qiymətlər almalıdırlar. Deməli, bizə ikinci tərtibdən davam operatorunu bilmək lazımdır. Həmin operator

$$\underset{2}{X} = X + \varsigma_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i^{\alpha}} + \varsigma_{ij}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ij}^{\alpha}} \tag{3}$$

kimi təyin olunur. Buraya daxil olan ς_i^{α} və ς_{ij}^{α} kəmiyyətləri

$$\varsigma_i^{\alpha} = D_i\left(\eta^{\alpha}\right) - u_j^{\alpha} D_i\left(\xi^{j}\right)$$

$$\varsigma_{ij}^{\alpha} = D_j\left(\varsigma_i^{\alpha}\right) - u_{ik}^{\alpha} D_j\left(\xi^{k}\right)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_j^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + u_{ij}{}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_j{}^{\alpha}}$$

düsturları vasitəsilə təyin olunur.

Hesablamalardan alınır ki, ikiölçülü dalğa tənliyinin invariantlıq şərti aşağıdakı formada olur:

$$\left(\underset{s}{X} F\right)_{F=0} = \left[\zeta_{11} - \left(\zeta_{22} + \zeta_{33}\right)\right]_{F=0} = 0 \tag{4}$$

Deməli, ikiölçülü dalğa tənliyinin invariantlıq qrupunu tapmaq üçün (4) tənliyini həll etmək lazımdır.

Hesablamalar kifayət qədər uzun olduğuna görə və keçmiş işimizdə verildiyinə görə hesablamanı göstərmədən operatorlar üçün axır nəticəni yazırıq.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y};$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x};$$

$$X_6 = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x};$$

$$X_7 = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y};$$

$$X_8 = 2xt\frac{\partial}{\partial y} + \left(x^2 - y^2 + t^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} - xu\frac{\partial}{\partial u};$$

$$X_9 = 2yt\frac{\partial}{\partial t} + 2xy\frac{\partial}{\partial x} + \left(-x^2 + y^2 + t^2\right)\frac{\partial}{\partial y} - yu\frac{\partial}{\partial u};$$

$$X_{10}=\left(x^2+y^2+t^2\right)\frac{\partial}{\partial t}+2xt\frac{\partial}{\partial x}+2yt\frac{\partial}{\partial y}-tu\frac{\partial}{\partial u};$$

$$X_{11}=u\frac{\partial}{\partial u};$$

$$X_{12}=\alpha(x,y,t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

α – dalğa tənliyinin ixtiyarı həllidir.

Operatorların bu aşkar şəklindən istifadə edərək onların kommutasiya şərtlərini hesablamışıq. Hesablamanın nəticəsi cədvəl şəklində verilmişdir.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_1	0	0	0	X_1	0	X_2	X_3	$2X_6$	$2X_7$	$2X_4-X_{11}$	0
X_2	0	0	0	X_2	X_3	X_1	0	$2X_4-X_{11}$	$-2X_5$	$2X_6$	0
X_3	0	0	0	X_3	$-X_2$	0	X_1	$2X_5$	$2X_4-X_{11}$	$2X_7$	0
X_4	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	0	X_8	X_9	X_{10}	0
X_5	0	$-X_3$	X_2	0	0	$-X_7$	X_6	$-X_9$	X_8	0	0
X_6	$-X_2$	$-X_1$	0	0	X_7	0	X_5	X_{10}	0	X_8	0
X_7	$-X_3$	0	$-X_1$	0	$-X_6$	$-X_5$	0	0	X_{10}	X_9	0
X_8	$-2X_6$	$-2X_4+X_{11}$	$-2X_5$	$-X_8$	X_9	$-X_{10}$	0	0	0	0	0
X_9	$-2X_7$	$2X_5$	$-2X_4+X_{11}$	$-X_9$	$-X_8$	0	$-X_{10}$	0	0	0	0
X_{10}	$-2X_4+X_{11}$	$-2X_6$	$-2X_7$	$-X_{10}$	0	$-X_8$	$-X_9$	0	0	0	0
X_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Kommutasiya şərtindən görünür ki, X_{11} operatoru qalan operatorların hər biri ilə kommutasiya edir. Ona görə də L_{11} - Li cəbrini

$$L_{11}=L(X_{11})\oplus L(X_i) \qquad (i=1,2,\ldots,10)$$

düz cəmi şəklində ifadə etmək olar.

Kommutasiya cədvəlində $X_i\,(i=1,2,\ldots,11)$ bazis vektorlarında $X_i\,(i=1,2,\ldots,10)$ və $X_4'=2X_4-X_{11}$ bazisinə keçmək daha məqsədəuyğundur. Yeni bazis vektorlarına görə kommutasiya cədvəli aşağıdakı şəkli alır:

	X_1	X_2	X_3	X_4'	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	0	0	0	$2X_1$	0	X_2	X_3	$2X_6$	$2X_7$	X_4'
X_2	0	0	0	$2X_2$	X_3	X_1	0	X_4'	$-2X_5$	$2X_6$

X_3	0	0	0	$2X_3$	$-X_2$	0	X_1	$2X_5$	$2X_6$	$2X_7$
X'_4	$-2X_1$	$-2X_2$	$-2X_3$	0	0	0	0	$2X_8$	$2X_9$	$2X_{10}$
X_5	0	$-X_3$	X_2	0	0	$-X_7$	X_6	$-X_9$	X_8	0
X_6	$-X_2$	$-X_1$	0	0	X_7	0	X_5	X_{10}	0	X_8
X_7	$-X_3$	0	$-X_1$	0	$-X_6$	$-X_5$	0	0	X_{10}	X_9
X_8	$-2X_6$	$-X'_4$	$-2X_5$	$-2X_8$	X_9	$-X_{10}$	0	0	0	0
X_9	$-2X_7$	$2X_5$	$-X'_4$	$-2X_9$	$-X_8$	0	$-X_{10}$	0	0	0
X_{10}	$-X'_4$	$-2X_6$	$-2X_7$	$-2X_{10}$	0	$-X_8$	$-X_9$	0	0	0

Hesablamada optimal operatorlar sisteminin tapılması üçün növbəti addım *ad (X,Y)* operatorunu tapmaqdan ibarətdir. Təqdim olunmuş işdə həmin operator tapılmışdır. Hesablamanın kifayət qədər uzun olduğunu nəzərə alaraq işdə yalnız hesablamanın nəticəsi verilmişdir.

$$adx=\left(\begin{array}{c|ccccccccc}
-2x_4 & -x_7 & -x_7 & 2x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\
\hline
-x_6 & -2x_4 & x_5 & 2x_2 & -x_3 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-x_7 & -x_5 & -2x_4 & 2x_3 & x_2 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\
-x_{10} & -x_8 & -x_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & x_1 \\
0 & 2x_9 & -2x_8 & 0 & 0 & -x_7 & x_6 & 2x_3 & -2x_2 & 0 \\
-2x_8 & -2x_{10} & 0 & 0 & -x_7 & 0 & x_5 & 2x_1 & 0 & 2x_2 \\
-2x_9 & 0 & -2x_{10} & 0 & x_6 & -x_5 & 0 & 0 & 2x_1 & 2x_3 \\
0 & 0 & 0 & -2x_8 & -x_9 & -x_{10} & 0 & 2x_4 & x_5 & x_6 \\
0 & 0 & 0 & -2x_9 & x_8 & 0 & -x_{10} & -x_5 & 2x_4 & x_7 \\
\hline
\mathbf{0} & 0 & 0 & -2x_{10} & 0 & -x_8 & -x_9 & x_6 & x_7 & 2x_4
\end{array}\right.$$

ad x operatorunun ifadəsindən istifadə edərək I tərtibdən optimal operatorlar sistemi tapılmışdır.

I tərtibdən optimal sistemini tapmaq üçün [2]

$$\frac{d}{dt}(x'_i, X_i) = [x_i X_i, X_k]$$

-tənliklər sistemini $x_i(t) = x_i(o)$ şərti daxilində həll edib çevirmədən sonra alınan x_i-ləri köhnə koordinantlar vasitəsilə ifadə etmək lazım gəlmişdir.

Həmin tənlik dalğa tənliyinin invariantlıq operatorlarının hər biri üçün həll edilmiş və uyğun çevirmə matrisaları tapılmışdır. Çevirmə matrisalarının hər biri 10 tərtibli kvadratik matrisalardan ibarətdir və matrisaların sayı 10 dənə alınmışdır. Bu matrisaların aşkar şəkli tapılmışdır. Matrisaların ifadələri kifayət qədər uzun olduğundan qısadılmış şəkildə verilmişdir.

Killinqin invariant kvadratik forması aşağıdakı kimi təyin olunur. İstənilən L fəzasında təyin olunmuş K(x,y) kvadratik forma

$$K(A(x), A(y)) = K(x, y)$$

şərtini ödəyirsə belə kvadratik forma invariant kvadratik forma adlanır. İnvariant bixətti formanın mühüm xassələrindən biri, onların köməyilə verilmiş Li cəbrinin ideallarını təyin etməyin mümkün olmasıdır. Doğrudan da L cəbrinə daxil olan istənilən $y \in L$ elementi üçün $K(x, y) = 0$ sıfır şərti ödənilirsə onda bu cür elementlər çoxluğu L cəbrinin idealı adlanır.

Verilmiş L Li cəbri üçün Killinqin invariant kvadratik forması

$$K((x, y) = spur(adx, ady) \qquad (5)$$

düsturu vasitəsilə təyin olunur. Düstura daxil olan adx və ady ifadələri

$$adx(u) = [u, x]$$

kommutasiya düsturu ilə təyin olunur. Bu kvadratik forma vasitəsilə verilmiş Li cəbrinin maksimal idealını təyin etmək olur. Hesablamadan alınan Killinqin kvadratik forması aşağıdakı kimidir:

$$K(x, x) = 24x_4'^2 + 6x_6'^2 + 6x_7'^2 - 6x_5'^2 - 24x_1'x_{10}' - 24x_2'x_3' - 24x_3'x_9'$$

Bu kvadratik forma daxili izomorfizm çevirməsi zamanı invariant qalır. Düsturdan görünür ki, invariant forma $K(x, x) > 0$, $K(x, x) < 0$ və $K(x, x) = 0$ qiymətlər ala bilər.

1) $K(x, x) > 0$ olan halda, birölçülü optimal operatorlar sisteminə X_4, X_6 və X_7 operatorları daxil olur.

2) $K(x, x) < 0$ olan halda, birölçülü optimal operatorlar sisteminə $X_5, X_1 \pm X_{10}, X_2 \pm X_{8,} X_3 \pm X_9$ operatorları daxildir.

3) $K(x, x) = 0$ olan halda, birölçülü optimal operatorlar sisteminə $X_1 \pm X_3, X_{10} \pm X_{9,} X_2 \pm X_3, X_8 \pm X_9, X_1 \pm X_2, X_{10} \pm X_8$ operatorları daxildir.

Hər üç halda I tərtibdən optimal operatorlar sistemini tapmış olduq.

ƏDƏBİYYAT

1. Ağamalıyev Ə.Q. İkiölçülü dalğa tənliyinin qrup nəzəriyyəsi metodu ilə tədqiqi / Journal of Qafqaz University. № 25, 2009, s.36-39
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ диффер-уравнений. М.: Наука, 1978, с. 190-198.
3. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, с.7-48
4. Богалюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1957, с.20
5. Алфаро В.Д., Фибини С. и др. Токи в физике адронов. М.: Наука, 1976, с. 90.

ИНВАРИАНТНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА КИЛЛИНГА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А.Г.АГАМАЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В статье, используя выражение для группы инвариантности двухмерного волнового уравнения, вычислена инвариантная квадратичная форма Киллинга.

Ключевые слова: волна, группа, операторы продолжения.

KİLLİNG'S İNVARİANT QUADRATİC FORM FOR TWODİMENSİONAL WAVE EQUATION

A.G.AGAMALIYEV

SUMMARY

In this paper, Killing's invariant quadratic form for twodimensional wave equation is calculated.

Key words: wave, group, prolonged operator.

Redaksiyaya daxil oldu: 20.11.2012-ci il.
Çapa imzalandı: 12.12.2012-ci il.