УДК 17.958:5

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Р.ТАГИЕВ
Бакинский Государственный Университет
tagiemr@hotmail.com

В середине 20-го века великий американский специалист по системной динамике Д.Медоус в своей книге «Альтернатива росту» указывал на то, что непрерывный рост численности населения и уровня потребления, при ограниченных и невозобновляемых возможностях природы, неизбежно приведет к необходимости анализа и прогноза вопросов устойчивости экономического развития. В рамках анализа устойчивости была выявлена необходимость сбалансированного развития экономики, природы и общества. Анализ устойчивости предполагает более сложную в научном плане концепцию развития, в частности, учета внешних факторов, а это, в свою очередь, приводит к усложнению изучаемой системы. Системный анализ сложных, или как их ещё называют самоорганизующихся систем, привело к появлению нового научного направления как синергетика. В рамках данного направления была определена главная задача синергетики как изучение законов построения организации и упорядоченности [1]. Традиционные методы системного анализа, стохастического моделирования сложных экономических систем наталкиваются на серьёзные проблемы. Те ограничения, которые ставятся в моделях с целью сделать их более адекватными, не отражают сущность нелинейных динамических систем. Сложные взаимодействия, скачкообразное и качественное изменение поведения системы под действием внешних факторов и есть сущность саморазвития.

Ключевые слова: макроэкономические системы, нелинейная динамика, дифференциальные уравнения, итерационный метод, метод Пуанкаре.

Анализ причин современного мирового экономического кризиса показал, что настало время рассматривать экономические системы как нелинейные, динамические. Принципы теории неравновесной динамики, основывающиеся на теории динамического хаоса, является адекватным инструментом анализа сложных динамических процессов, происходящих в экономике. Применяя вышеуказанные методы в моделировании экономических процессов необходимо помнить о том, что все эти методы пришли в экономику из физики (энтропия, фазовый переход, турбулентность и т.д.) и, что наряду со схожестью физических и экономических систем у них есть и различия. Несмотря на то, что макропоказатели физических и экономических систем складываются в результате осреднения характеристик поведения микроэлементов, но последние в физике и в экономике обладают совершенно разными свойствами. Микроэлемент в физике обладает, как правило, стационарным набором характеристик, а микроэлемент в экономике обладает ещё и свойством разумности. Другими словами микроэлемент в экономике обладает свойством накапливать опыт и менять своё поведение (2).

Если экономическая система не находится в состоянии равновесия, то для анализа таких систем следует применять методы неравновесного анализа. Выход состояния системы за пределы равновесия обусловлен воздействием внешних факторов и, в этой связи, они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Некоторые авторы называют эти уравнения эволюционными. При помощи нелинейных дифференциальных уравнений возможно провести детальное качественное исследование системы, определить все критические точки, аттракторы и указать при каких начальных условиях и на какой аттрактор происходит выход.

Обычно параметры дифференциальных уравнений, используемых для описания экономических систем, изменяются в некотором интервале. Одной из главных задач, стоящих перед исследователем, является поведение системы при изменении параметров эволюционного уравнения. Когда эти параметры не являются функцией состояния системы, их называют управляющими (некоторые авторы называют их внешними) параметрами.

Итак, общий вид уравнения, описывающее поведение нелинейной динамической системы, имеет вид [3]

$$\dot{X} = F(X,U), \tag{1}$$

где X – переменные, характеризующие состояние динамической системы, U - набор управляющих параметров, F(X,U) - нелинейная функция, определенная в некоторой области G – евклидовой плоскости. Следующим обязательным условием является наличие в этой области непрерывных производных. Универсальными приближенными моделями динамических систем являются модели вида из теории катастроф [4]

$$\dot{x} = ax - bx^2 \text{ и } \dot{x} = ax^3 + bx + c\,.$$

Простейшей моделью описания динамической системы является, так называемая, логистическая модель [5, 6]

$$\dot{x} = ax - bx^2\,. \tag{2}$$

Данная модель часто применяется для решения биологических задач и описывает динамику популяций [7]. Не вдаваясь в биологические детали видно, что в данной модели есть отрицательная обратная связь, т.е. чем больше сообщество, тем медленнее она растет и этот рост может прекратиться. Если численность популяции больше предельного значения, то через некоторое время она начинает уменьшаться. Постоянная a показывает, как быстро растет популяция, а постоянная b - коэффициент предельной численности популяций.

Уравнение 2 является частным случаем уравнения Бернулли с аналитическим решением:

$$x(t) = \frac{a x_0 e^{at}}{a - b x_0 + b x_0 e^{at}}, \tag{3}$$

где x_0 находится из начальных условий.

Функция $f(x) = ax - bx^2$ является параболой, пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = \frac{a}{b}$, проходит через равновесное положение. Поскольку $\frac{df(0)}{dx} > 0$ и $\frac{df(a/b)}{dx} < 0$, то второе положение равновесия устойчиво в отличие от первого.

Покажем вышеперечисленные утверждения схематично на векторном поле. Для этого в каждой точке отражающей состояние системы приложим вектор скорости изменения этого состояния $\dot{x}$. Пусть в точках *A* и *B* система находится в стационарном состоянии, т.е. скорость изменения состояния системы равна нулю. Между этими точками скорость положительна, а за точкой *B* отрицательна.

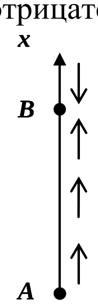

Рис. 1. Вектор изменения состояния системы.

График зависимости X(t) при различных начальных условиях приведена на графике (2).

Как видно из графика логистическая кривая приближается к стационарному режиму, который указывает на его устойчивость.

Как было сказано выше уравнение (2) описывает процессы насыщения и с некоторыми добавлениями междисциплинарный подход здесь уместен. Если в уравнении (2) коэффициенты отрицательны, то данная модель описывает, так называемые, автокаталитические реакции, известные из раздела неорганической химии (кинетика катализ). При начальных данных ниже пороговых, потери бывают выше прироста концентрации, то есть скорость химической реакции не увеличивается. В противном случае реакция идет с нарастающей скоростью. Аналогичным образом, если в уравнение добавить свободный член (с), то можно описать банкротство фирм и даже государств.

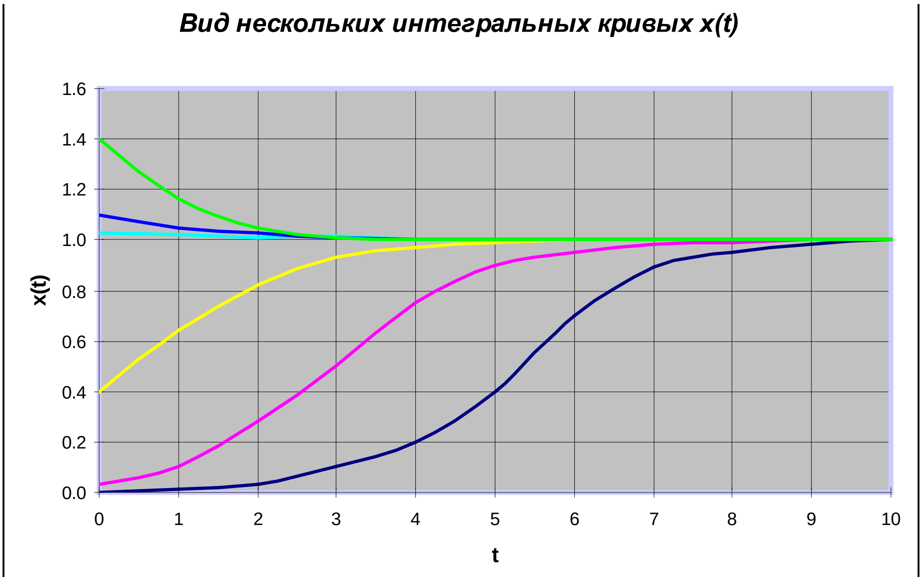

Рис. 2. Вид нескольких интегральных кривых X(t).

$$\dot{x} = ax - bx^2 - c\,. \tag{4}$$

Если значение свободного члена *C* меньше $C_{крит}$, то система имеет два равновесных состояния *A* и *B*. Состояние В устойчиво, а состояние А – неустойчиво. Прогнозировать катастрофу можно тогда, когда состояние А приближается к состоянию В. Три случая соотношения свободного члена уравнения (3) с критическим значением показаны на рисунке векторного поля.

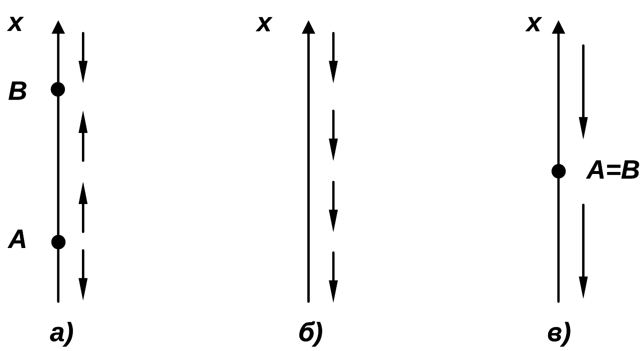

Рис. 3. Три случая соотношения свободного члена уравнения с критическим значением.

При *C* больше $C_{крит}$, процесс уничтожается или катастрофа происходит (терминология зависит от постановки задачи) за конечное время. Если $C=C_{крит}$, то, независимо от начального состояния, процесс выходит на стационарный режим $A=B$. Но это состояние неустойчиво. Незначительное возможно случайное уменьшение х приводит к катастрофе.

Метод Пуанкаре по исследованию дискретных отображений для решений экономических задач

Сложность моделирования поведения динамических систем заключается в нахождении аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Для того чтобы обойти эти сложности предлагается перейти от дифференциальных уравнений к отображениям динамической траектории системы на некоторое подпространство её фазового пространства. Модельное исследование динамических систем предпологает за одномерное отображение считать временную выборку данных $\boldsymbol{x(t_1)}$, $\boldsymbol{x(t_2)}$, …, $\boldsymbol{x(t_n)}$, которую записывают в виде разностного уравнения, зависящего от параметра [8].

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), k = 1,2,3,... \qquad (4)$$

Данная формула (одномерного отображения по числу x_k позволяет определить следующее число $\boldsymbol{x}$ по $\boldsymbol{x_{k+1}}$ и, таким образом, определить всю последовательность. Этот процесс также называют итерационным.

Переход от дифференциальных уравнений к отображениям основывается на методе построений сечений Пуанкаре [9,10,11].

Опишем поведение экономической системы дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = F(x\lambda), x(0) = x_0 .$$

Выберем в фазовом пространстве динамической системы секущую поверхность, которую фазовые кривые пересекают не касаясь. Отметим точкой на этой секущей поверхности каждое пересечение фазовой траекторией происходящее в определенном направлении. В этом случае на этой поверхности получаем некоторый набор точек последовательно переходящих друг в друга. Поскольку начальное условие $\boldsymbol{x_0}$ динамической системы полностью задают всю фазовую траекторию, положение каждой точки в данной последовательности определяется положением предыдущей. Т.е. существует некоторая функция $\boldsymbol{f}$ связывающая положение следующих одна за другой точек. Обозначим через $\boldsymbol{x_n}$ координаты n-ой точки пересечения фазовой траектории с секущей поверхностью, координаты последующих точек пересечения задаются соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$.

Пуанкаре показал, что использование отображения вместо дифференциальных уравнений, при исследовании динамических систем очень удобно как в плане наглядности, так и вычислительном плане.

В 1972-ом году была опубликована работа Неймарка Ю.И. “Методы точечных отображений в теории нелинейных колебаний”. В ней объяснялось, что в теории отображений роль стационарных точек играют неподвижные точки. Это такие точки $\tilde{x}$, для которых $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Если $|f'(\tilde{x})| > 1$, то подвижность и неподвижность указанных точек имеет циклический характер. Цикл порядка m (или m-кратный цикл) - это последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ удовлетворяющая следующим условиям: $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots, x_1 = f(x_m)$. Причем, никакие два элемента в наборе $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не совпадают.

Для большей наглядности, динамику одномерного отображения представим графически, построив для этого на плоскости (x_{n+1}, x_n) график функции $(x_{n+1} = f(x_n)$ и провести прямую $x_{n+1} = x_n$. Эволюционную последовательность итераций можно представить диаграммой или лесенкой Ламерея. На ней откладывают функцию fx, т.е. зависимость x_{n+1} от x_n и проводят биссектрису. В точках касания графика с биссектрисой имеет место бифуркация.

Во всех вышеупомянутых рассуждениях предполагалось, что параметр времени t является непрерывной величиной, т.е. любым действительным числом. Иногда бывает возможность оценки численности популяции раз в год. Другими словами время дискретно и численность популяций выражается функцией дискретного аргумента.

$$x_{n+1} = \alpha x_n - b x_n^2, n = 1,2,... \tag{5}$$

Заменив в вышеприведенном уравнении переменные $x_n = \frac{\alpha}{b} y_n$, получим уравнение следующего вида:

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n), 0 \le y_n \le 1. \tag{6}$$

Отображение (6) называют логистическим отображением.

Задача динамики населения

Рассмотрим задачу динамики населения (ее еще называют задачей биологических популяций).

П р е д п о л о ж и м

t_0 - начальное время,

x_0 - количество популяций в нулевом году,

$\forall t \geq t_0$,

$x(t)$ - количество популяций в t–ом году,

k, α - коэффициенты, зависящие от природных факторов (α - коэффициент естественного отбора или борьбы за выживание)

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ по определению производной.}$$

Дано дифференциальное уравнение вида: $x'(t) = kx(t) - \alpha x^2(t)$

Можно записать в виде: $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) - \alpha x^2(t)$, это уравнение с разделяющими переменными

$$\frac{dx(t)}{k(x(t) - \alpha x^2(t)} = dt \text{ интегрируем}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dx(t)}{kx(t) - \alpha x^2(t)} = \int\limits_{t_0}^{t} dt\,,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dx(t)}{kx(t) - \alpha x^2(t)} = t - t_0\,.$$

Интеграл в левой части необходимо разбить на простые интегралы.

$$\frac{1}{kx - \alpha x^2} = \frac{1}{x(k - \alpha x)} = \left[\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{k - \alpha x}\right]$$

$$\frac{1}{k}\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{k - \alpha x}\right)dx = \frac{1}{k}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{dx}{x} + \frac{\alpha}{k}\int\frac{dx}{k - \alpha x} =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\ln x(t)\right]\Big|_{t_0}^{t} - \frac{1}{k}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d(k - \alpha x)}{k - \alpha x} = \frac{1}{k}\left[\ln x(t)\right]\Big|_{t_0}^{t} - \frac{1}{k}\left[\ln|k - \alpha x|\right]\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\ln t - \ln t_0\right) - \frac{1}{k}\left(\ln(k - \alpha t) - \ln k - \alpha t_0\right) = \left(t - t_0\right),$$

или

не подставляя значения ***t, t₀*** вместо ***x***, можно записать решение данного уравнения в следующем виде:

$$\ln\left|x(t)\right|\Big|_{t_0}^{t} - \ln\left|k - \alpha x(t)\right|\Big|_{t_0}^{t} = k\left(t - t_0\right)$$

$$\ln\frac{x(t)}{k - \alpha x(t)}\Big|_{t_0}^{t} = k\left(t - t_0\right)$$

$$\left.\frac{x(t)}{k-\alpha x(t)}\right|_{t_0}^{t} = e^{k(t-t_0)} \Rightarrow x(t) = \frac{kx_0 e^{k(t-t_0)}}{k-\alpha x_0\left(1-e^{k(t-t_0)}\right)}.$$

Неподвижными точками этой модели являются 0 и $\frac{\alpha}{k}$ и в зависимости от знака $\frac{\alpha}{k}$ при t→∞ поведение решения может измениться. В случае аттрактора качественная картина описывается как $\rightarrow\frac{\alpha}{k}\leftarrow$ и решение будет экспоненциально убывающим при t→∞ с обоих сторон, а при репеллере получатся растущие траектории.

ВЫВОДЫ

Классические методы анализа экономических систем, описывающие устойчивые процессы, происходящие в замкнутой среде и не подверженные внешним воздействиям, не могут описывать сложные, нелинейные процессы, происходящие в современной экономике. Ограничения, которые обычно ставятся перед созданием линейных моделей, не позволяют описывать взаимозависимость конкретной экономики с глобальной экономической системой. В этой связи в последние годы экономические системы стали относить к нерегулярным динамическим системам.

На наш взгляд только теория неравновесной динамики может прийти на смену линейным парадигмам в моделировании экономических процессов. Экономическим системам присуще как регулярное, так и нерегулярное поведение, особенно в период нестабильности. Это объясняется нелинейностью природы этих систем. И, наконец, теория детерминированного хаоса, которая является развитием теории нелинейной динамики, может объяснить неслучайный характер хаотических процессов в экономике и, соответственно, сделать хаос управляемым, а это, в свою очередь, переведет многие стохастические процессы в экономике в разряд детерминированных, тем самым увеличив предсказуемость многих экономических явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагиев М.Р. Системный анализ сложных экономических систем. Известия Национальной Академии Наук Азербайджана, серия Экономика, №4, 2009, с 14-17.
2. Тагиев М.Р.Сравнительный анализ экономических и физических систем. Ежегодник Системные исследования. Методологические проблемы. М., 2009, с.82-90.
3. Холодник М., Клич А., Кубическ М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Наука, 1994, 287 с.
4. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. М.: Наука, 1989, 217 с.
5. Кучин Б.Л., Якушева Е.В. Уравнение развитием экономических систем: технический

прогресс, устойчивость. М.: Экономика, 1990, 156 с.
6. Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П. Нелинейная динамика и проблема прогноза.// Вестник российской академии наук. 2-1, №3, с.210 – 232.
7. Нижнегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования. Моделирование экономической динамики. М: Диалог МГУ, 1997, с. 34-53
8. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1986, 280 с.
9. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984, 528 с.
10. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000, 336 с.
11. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987, 424 с.

QEYRİ-XƏTTİ MAKRO İQTİSADİ SİSTEMLƏRİN İNKİŞAFININ XÜSUSİYYƏTLƏRİ

M.R.TAĞIYEV

XÜLASƏ

Məqalə kimya və biologiyada kumulyativ prosesin modelləşdirilməsinə, həmçinin loqistik modellərin iqtisadiyyatda tətbiqinə həsr olunmuşdur.

Məqalədə dinamik sistemləri təsvir edən loqistik qeyri-xətti diferensial tənliklərin həlli metodu təklif olunmuşdır.

Xarici müdaxiləyə məruz qalmayan qapalı mühitdə baş verən dayanıqlı prosesləri təsvir edən iqtisadi sistemlərin klassik analiz metodları ilə müasir iqtisadiyyatda baş verən qeyri-xətti mürəkkəb prosesləri öyrənmək olmur. Xətti modellərə qoyulan məhdudiyyət şərtləri qlobal iqtisadi sistemlərlə konkret iqtisadiyyat arasındakı qarşılıqlı əlaqəni təsvir etməyə imkan vermir.

Bununla əlaqədar son illər iqtisadi sistemləri, ümumiyyətlə, qeyri-requlyar dinamik sistemlərə aid edirlər.

Dinamikanın qeyri-tarazlıq nəzəriyyəsi bütün sistemlərin davranışlarına yeni rejimlərin əmələ gəlməsi qanunauyğunluğunu öyrənir.

Bizim fikirinizcə dinamikanın qeyri-tarazlıq nəzəriyyəsi iqtisadi proseslərin modelləşdirilməsində xətti konsepsiyanı əvəz edə bilər. Bu həmin sistemlərin təbiətinin qeyri-xəttiliyi ilə uzah olunur. Və nəhayət, qeyri-xətti dinamika nəzəriyyəsinin inkişaflı davamı olan determinik xaos nəzəriyyəsi, iqtisadiyyatda daha xaotik proseslərin təsadüfi olmadığı xarakterini izah etməklə, əlaqədar xaosu idarə olunan edə bilər, bu isə öz növbəsində iqtisadiyyatda çoxlu sayda stoxastik prosesləri determinik hala çevirir və nəticə etibarilə iqtisadiyyatda proseslərin qabaqcadan proqnozlaşdırma səviyyəsini artırır.

Acar sözlər: makro iqtisadi sistemlər, qeyri-xətti dinamik, diferensial tənliklər, iterasiya üsulu, Пуанкаре üsulu.

DEVELOPMENT OF NONLINEAR MACROECONOMIC SYSTEMS

M.R.TAGHIYEV

SUMMARY

This article is devoted to modelling of cumulative processes in chemistry and biology as well as application of logistic models for the economics.

It identifies a method of solving nonlinear differential equations describing dynamic systems.

The classical methods of analysis of the economic systems, describing stable processes occurring in the closed medium and not exposed to the external influences are not sufficient to describe sophisticated nonlinear processes taking place in modern economics.

Restrictions of the linear modelling do not allow capturing of the interrelation of a nation's economy and global economic system. As a result, economic systems have recently been attributed to the irregular dynamic systems.

A theory of non-equilibrium dynamics studies patterns of new behavioral modes of all systems, including economic systems. In our view, only the theory of non-equilibrium dynamics can take place of linear paradigms in the modelling of economic processes. Economic systems have been characterized both by regular and irregular behaviors, especially during the periods of instability.

It is accounted for by the nature of these systems. Finally, the theory of deterministic chaos, being the result of the evolution of the theory of nonlinear dynamics, can explain the nonrandom character of chaotic processes in the economy and regulate the chaos. This consequently will put many stochastic economic processes into the category of deterministic processes and increase predictability of many economic phenomena.

Keywords: macroeconomic systems, nonlinearly dynamic, differential equation, iteration method, Puankares method.

Принято в редакцию: 26.09.2012 г.
Подписано к печати: 12.12.2012 г.